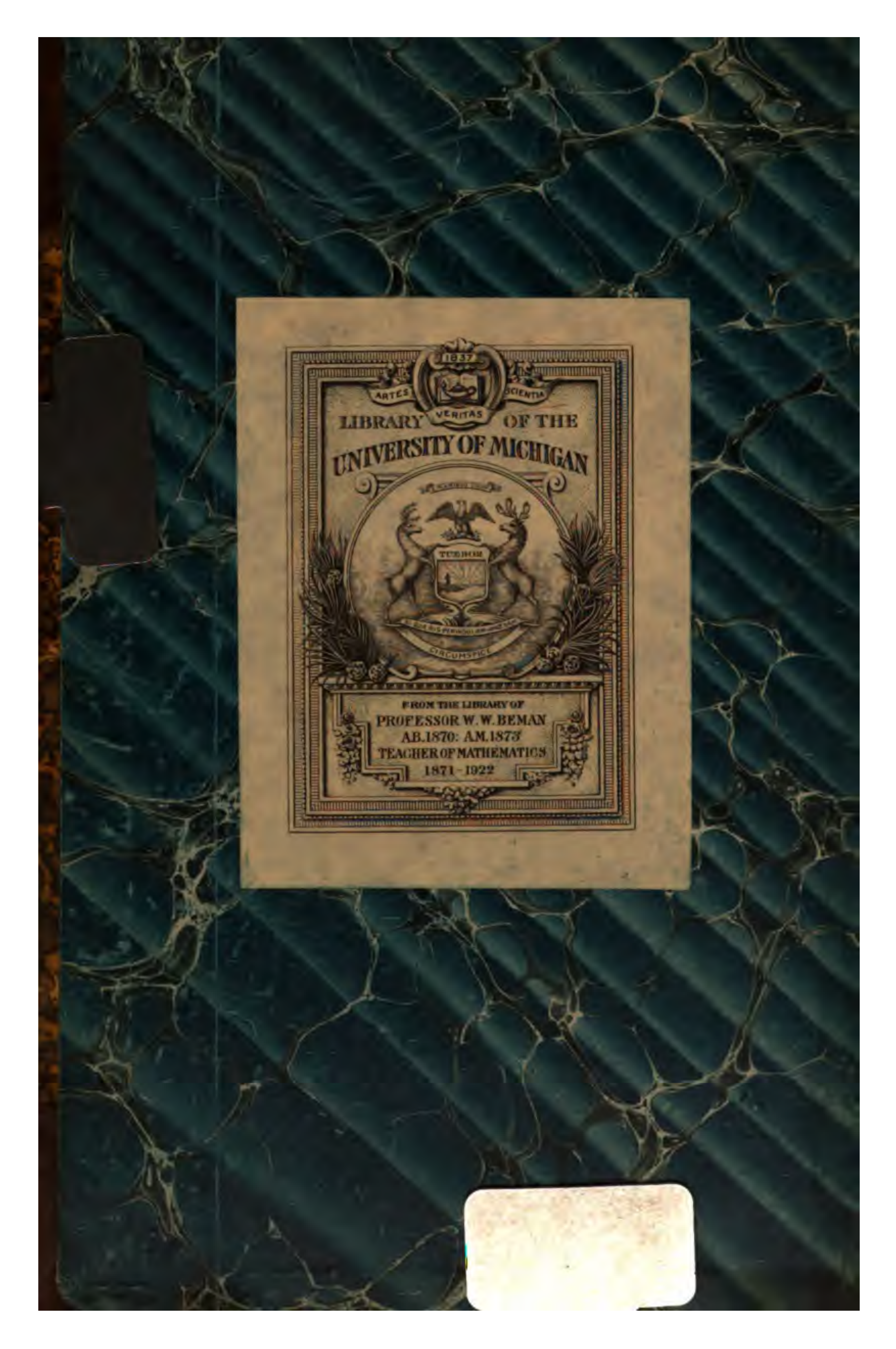
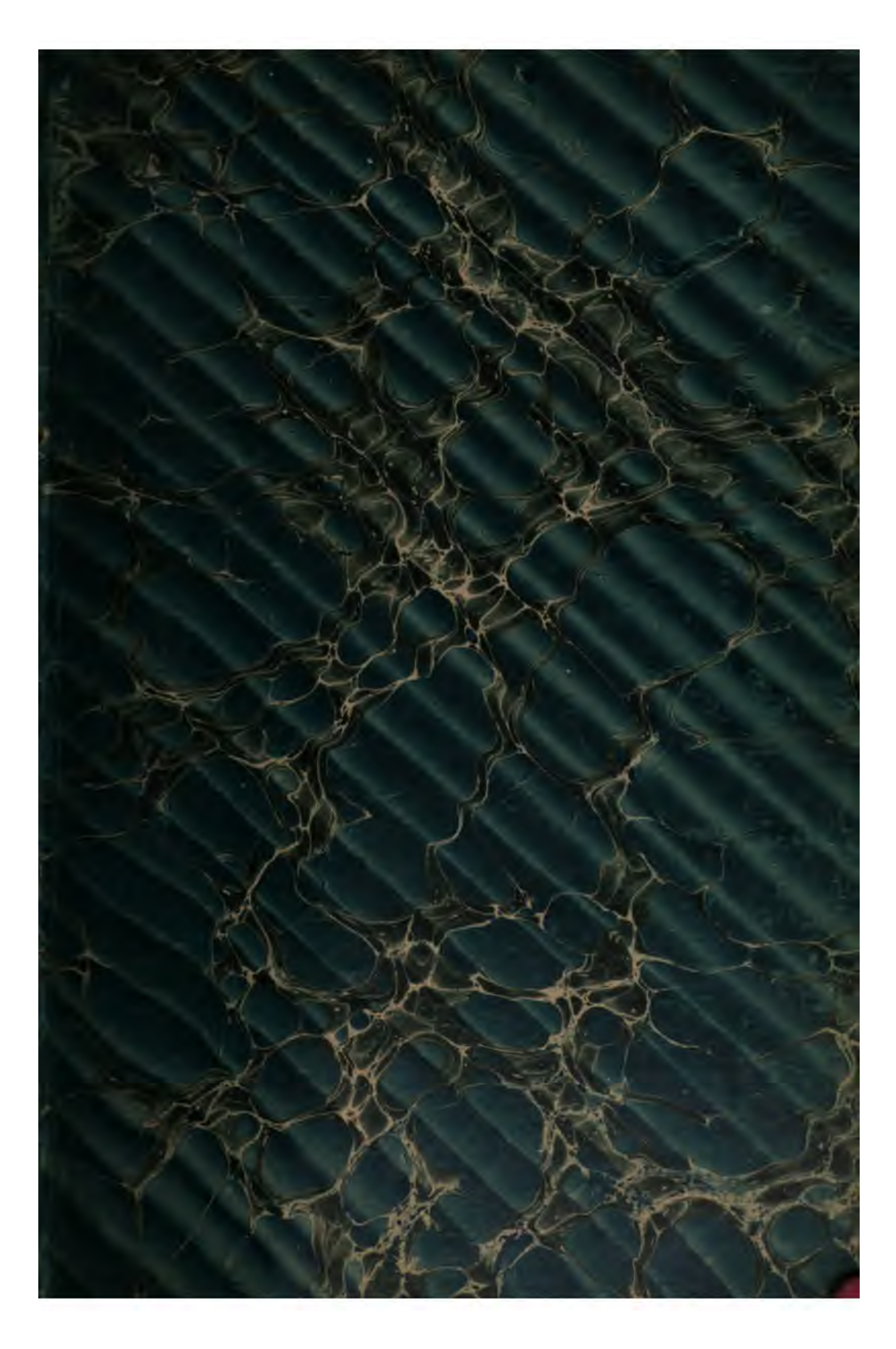
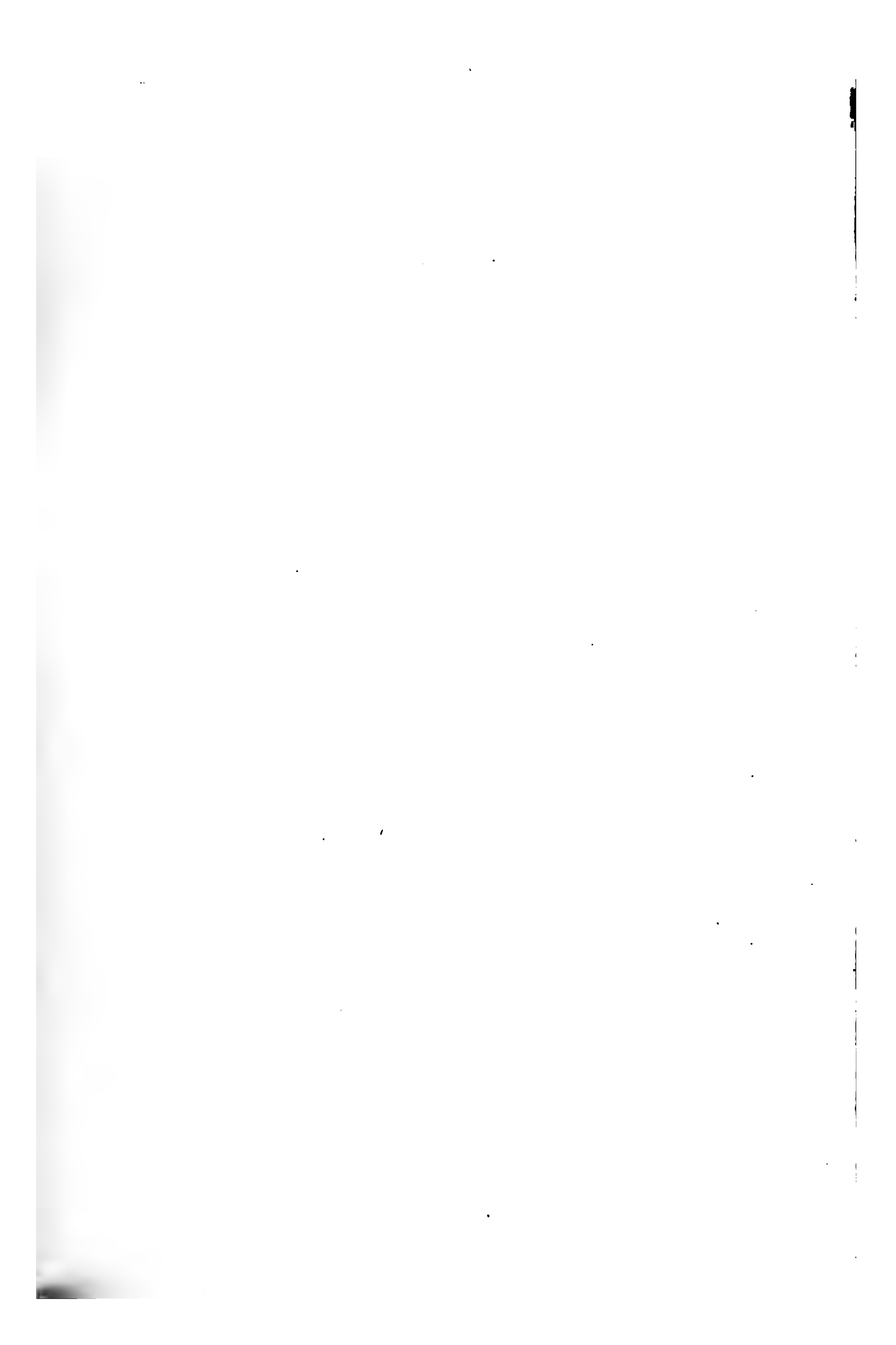

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB.1870: AM.1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871-1922







Erster Cursus

der

Differential- und Integralrechnung

nebst einer

Sammlung von 1450 Beispielen und Uebungsaufgaben

zum

Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium

von

Dr. **Carl Spitz,**
Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe.

Mit 145 in den Text gedruckten Figuren.

Leipzig und **Heidelberg.**
C. F. Winter'sche Verlagshandlung.
1871.

W. W. Beman
gt.
6-23-1923

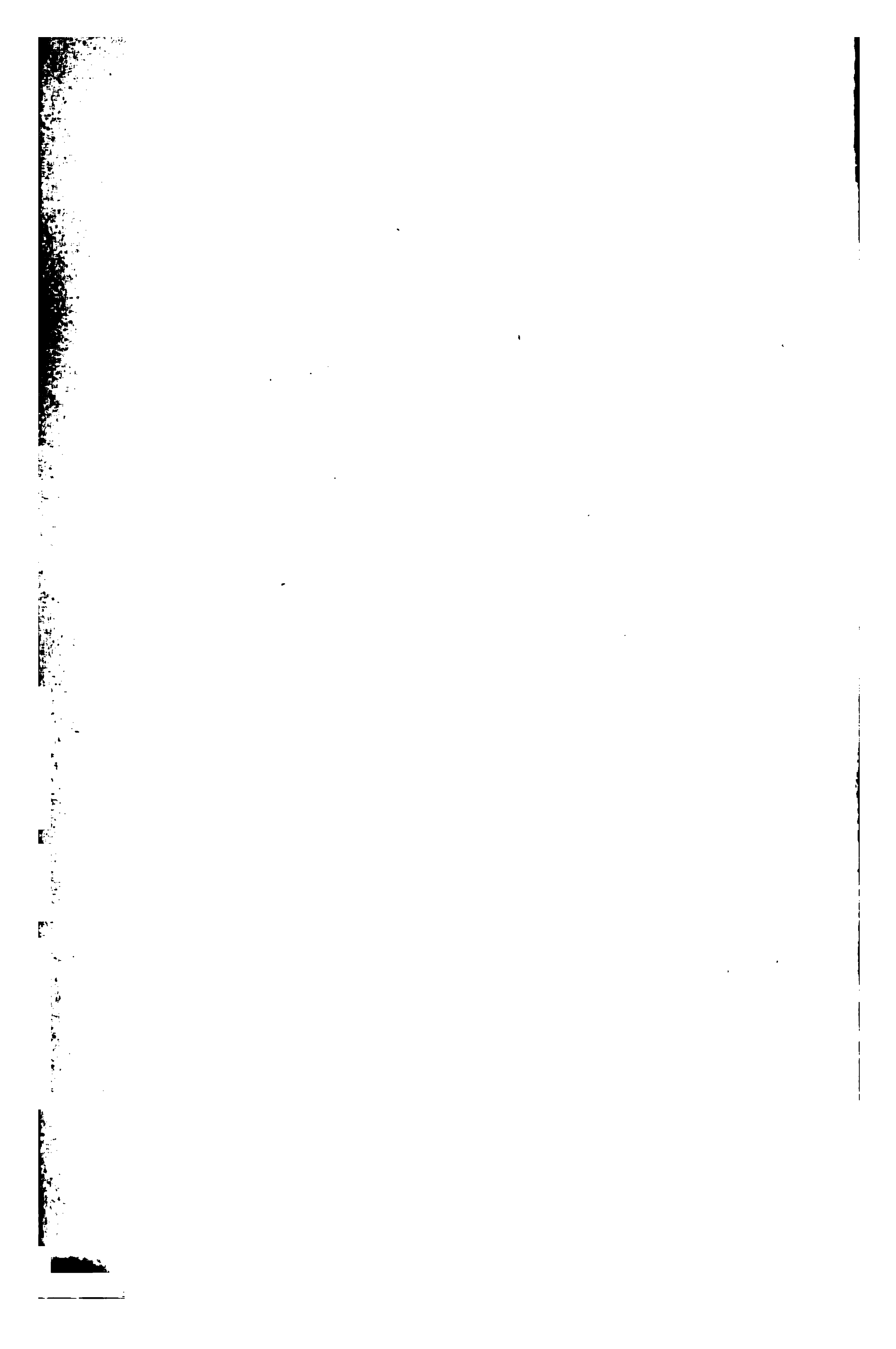
Vorwort.

Das vorliegende Lehrbuch enthält die Grundlehren der Differential- und Integralrechnung soweit dieselben an grösseren Unterrichtsanstalten gewöhnlich im ersten Cursus vorgetragen werden, und schliesst sich hinsichtlich der Behandlungsweise an meine Lehrbücher über Elementarmathematik an. Wie in diesen, habe ich auch in vorliegendem Buche jedem Abschnitte eine beträchtliche Anzahl von Beispielen und Uebungsaufgaben über die in demselben behandelten Lehren beigefügt. Ausserdem befindet sich am Schlusse des Werkchens noch eine reichhaltige Sammlung von vermischten Uebungsaufgaben.

Die Citate A. A., St., Eb. Tr. und sph. Tr. beziehen sich auf die neuesten Auflagen meiner Lehrbücher über allgemeine Arithmetik, Stereometrie, ebene Trigonometrie und sphärische Trigonometrie.

Carlsruhe, im Januar 1871.

C. Spitz.



Inhalt.

Differentialrechnung.

Erster Abschnitt.

Seite

Zweiter Abschnitt.

Differentiation entwickelter Functionen von einer unabhängig Veränderlichen.

A. Entwickelung des ersten Differentialquotienten.

B. Wiederholte Differentiation.

Dritter Abschnitt.

Differentiation unentwickelter Functionen.

A. Entwickelung des ersten Differentialquotienten.

B. Wiederholte Differentiation.

Vierter Abschnitt.

Functionen complexer Ausdrücke.

Seite

Fünfter Abschnitt.

Entwickelung der Functionen in Reihen.

Sechster Abschnitt.

Werthbestimmung der Functionen im Falle sie für specielle Werthe der Veränderlichen unbestimmte Formen annehmen.

Siebenter Abschnitt.

Maxima und Minima der Functionen.

Achter Abschnitt.

Theorie der ebenen Curven.

A. Für rechtwinklige Coordinaten.

B. Für Polarcoordinaten.

Integralrechnung.

Neunter Abschnitt.

Grundbegriffe.

Zehnter Abschnitt.

Integration einfacher Functionen.

Elfter Abschnitt.

Integration der rationalen gebrochenen Functionen.

Zwölfter Abschnitt.

Integration irrationaler Functionen.

Dreizehnter Abschnitt.

Binomische Integrale.

Vierzehnter Abschnitt.

Integration transcendenter Functionen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Integration durch unendliche Reihen.

Sechzehnter Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

Siebenzehnter Abschnitt.

Differentialquotienten bestimmter Integrale.

Achtzehnter Abschnitt.

Reihen von Bürmann und Lagrange.

Neunzehnter Abschnitt.

Anwendung der bestimmten Integrale auf die Summirung von Reihen.

Zwanzigster Abschnitt.

Quadratur und Rectification der ebenen Curven, Quadratur der Oberflächen und Cubatur von Rotationskörpern.

Anhang.

Verbesserungen.

Seite 48 Zeile 13 v. u. lies: Für statt für.
- 64 - 5 v. o. lies: $x\sqrt{7x+3}$ statt $\sqrt{7x+3}$.
- 64 - 7 v. o. lies: $x^2\sqrt{x^2+1}$ statt $x\sqrt{x+1}$.
- 133 - 7 v. u. lies: $\psi(t_m)$ statt $\psi(t)$.
- 142 - 1 v. u. lies: (9) statt (5).
- 165 - 7 v. o. lies: $\frac{x}{x^2+1}$ statt $\frac{1}{x^2+1}$.
- 198 - 9 v. u. lies: Minimum statt Maximum.
- 348 - 9 v. u. lies: $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{a-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{a-x^2}}{m} + \frac{a(m-1)}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a-x^2}}$.
- 350 - 11 v. u. lies: $+\frac{a^2}{2}$ statt $-\frac{a^2}{2}$.
- 528 - 9 v. u. lies: $(x-10)$ statt $(x+10)$.
- 530 - 4 v. o. lies: a^x statt a und füge im Zähler noch $+\frac{1}{x}-1$ hinzu.
- 532 - 2 v. o. lies: $4\,la$ statt 4.
- 532 - 8 v. o. lies: $\frac{1}{(1-\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$ statt $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
- 533 - 8 v. o. lies: a statt e.
- 535 - 9 v. u. lies: $-\frac{1}{2(x+1)\sqrt{x}}$ statt $\frac{\sqrt{x}}{2(x+1)}$.
- 535 - 7 v. u. lies: $\frac{2(2x^2+1)}{4x^4+1}$ statt $\frac{3(2x^2+1)}{(x^2+1)(4x^2+1)}$.
- 535 - 1 v. u. ist noch beizufügen: $=\frac{1}{(1+4x+2x^2)\sqrt{2x+x^2}}$.
- 563 - 21 v. u. lies: y_0^{IX} statt y_9^{IX}.
- 563 - 20 v. u. lies: $y_0^{(4n+2)}$ statt $y_0^{(4n+2)}{}_0$.
- 565 - 4 v. o. lies: $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ statt $\frac{x^{2n}}{(2n!)}$.

Integralrechnung.

Differentialrechnung.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

§. 1. Von den Functionen im Allgemeinen.

1) Bezeichnen x und y irgend zwei noch unbekannte Grössen und ist die gegenseitige Beziehung derselben durch eine Gleichung ausgedrückt, welche die beiden Unbekannten enthält, so erkennt man sofort, dass darin jedem beliebigen Werthe von x ein oder mehre bestimmte Werthe von y entsprechen und dass sich somit unzählig viele zusammengehörige Werthe von x und y angeben lassen, welche der gegebenen Gleichung genügen.

Man nennt in einem solchen Falle die beiden Unbekannten x und y die Veränderlichen und insbesondere diejenige, welcher man, wie oben x, beliebige Werthe beilegt, die unabhängig Veränderliche, während die andere y in Bezug auf dieselbe alsdann die abhängig Veränderliche heisst. Zum Unterschiede von den Veränderlichen werden alle übrigen Grössen, welche während einer und derselben Untersuchung ihre Werthe unverändert beibehalten, Unveränderliche oder Constante genannt und gewöhnlich durch C bezeichnet.

2) Um die Beziehung auszudrücken, dass der Werth der Veränderlichen y von einer anderen x abhängig ist, sagt man, es sei y eine Function von x und deutet diese Abhängigkeit an durch eine der (hungen:

$$y = f(x); \quad y = F(x); \quad y = \varphi(x) \text{ etc.}$$

sagt man z. B. es sei der Inhalt eines Kreises oder einer Kugel e nction des Halbmessers.

merkung. Schreiben wir in der Folge $y = f(x)$, so setzen wir voraus, dass nderung von x innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ eine entsprechende derung von y nach sich zieht. Ist daher $y = C$, so kann nicht y eine Function x sein.

3) Enthält eine Gleichung drei Veränderliche x, y, z und sieht man darin x und z als unabhängig Veränderliche an, so ist y abhängig von x und z. Man schreibt, um diese Beziehung anzudeuten,

$$y = f(x, z); \quad y = F(x, z); \quad y = \varphi(x, z) \text{ etc.}$$

und sagt y sei eine Function zweier Veränderlichen.

So ist z. B. der Inhalt eines Cylinders eine Function von Grundfläche und Höhe.

Diese Veränderlichen können natürlich selbst wieder hinsichtlich anderer Grössen abhängig oder unabhängig sein.

Analog kann eine Grösse als eine Function von drei, vier oder mehr abhängig oder unabhängig Veränderlichen auftreten.

Anmerk. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, werden wir in der Folge nur eindeutige d. h. solche Functionen betrachten, bei welchen einem bestimmten Systeme von Werthen der unabhängig Veränderlichen im Allgemeinen nur ein Werth der abhängig Veränderlichen entspricht.

Ist z. B. $y = \sqrt{x}$ oder $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, so zerfällt jene Gleichung in $y = +\sqrt{x}$ und $y = -\sqrt{x}$, ebenso diese in $z = +\sqrt{x^2 + y^2}$ und $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

§. 2. Benennung der Functionen.

1) Functionen, in welchen die Veränderlichen unter sich oder mit Constanten nur durch die vier Grundoperationen verbunden sind, oder als Basis von Potenzen mit constanten Exponenten erscheinen, heissen algebraische, zum Unterschiede von den transcendenten, zu welchen alle übrigen Functionen gehören.

So sind z. B. $a - bx$; $ax^3 - bx^{\frac{4}{5}} + c$; $\frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$ algebraische, dagegen $\sin x$; $tg\,(x + a)$; $\log x$; a^x transcendente Functionen von x.

2) Eine Function heisst rational oder irrational, je nachdem in derselben die Veränderlichen nur mit ganzen oder auch mit gebrochenen Exponenten erscheinen.

3) Ist eine Gleichung, welche die Abhängigkeit der Veränderlichen ausdrückt, in Bezug auf die abhängig Veränderliche aufgelöst, so heisst diese eine entwickelte oder explicite, im anderen Falle eine unentwickelte oder implicite Function der unabhängig Veränderlichen.

So ist z. B. in der Gleichung

$$y = ax^3 - bx^2 + c$$

y eine entwickelte, aber in

$$ax^3 - bxy^2 + cy - d = 0$$

eine unentwickelte Function von x. Jener Fall ist repräsentirt durch die Gleichung

$$y = f(x),$$

dieser dagegen durch

$$f(x, y) = 0.$$

4) Ist y eine Function von u, also $y = F(u)$, u eine Function von x, also $u = f(x)$, so sagt man, y sei eine Function von einer Function und deutet solches an durch das Symbol

$$y = F[f(x)]$$

5) Aus

$$y = f(x)$$

folgt unmittelbar die Beziehung

$$x = F(y) = F[f(x)].$$

Man nennt nun $F(y)$ die umgekehrte Function von $f(x)$.

So folgt z. B. aus

$$y = a^x; \qquad y = \sin x; \qquad y = tg\, x$$

dass

$$log^{(a)} y; \qquad arc \sin y; \qquad arc\, tg\, y$$

die umgekehrten Functionen sind von

$$a^x; \qquad \sin x; \qquad tg\, x.$$

6) Ist $f(x)$ irgend eine Function von x und man lässt x sich um irgend eine Grösse h ändern, so geht die Function über in $f(x+h)$. Die Aenderung, welche dadurch die Function erlitten hat, wird hiernach ausgedrückt durch

$$f(x+h) - f(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Ist z. B.

$$f(x) = x^2 - 3x + 5,$$

so wird

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h) + 5 = x^2 + 2hx + h^2 - 3x - 3h + 5$$

also

$$f(x+h) - f(x) = 2hx + h^2 - 3h.$$

7) Nähert sich der Absolutwerth des Ausdruckes (1) bei der Annahme eines bestimmten $x = a$ sowohl für ein positives als ein negatives h immer mehr und mehr der Null, wenn man h selbst der Null sich nähern lässt, so sagt man die Function $f(x)$ sei für den speciellen Werth $x = a$ stetig oder continuirlich; andernfalls wird sie unstetig oder discontinuirlich für diesen Werth von x genannt.

8) Die unabhängig Veränderliche einer Function wird in ihrem ganzen Verlaufe als stetig angesehen.

9) Ist $f(a) = \infty$, so ist $f(x)$ für $x = a$ jedenfalls unstetig; denn da $f(a+h)$ und $f(a-h)$ nicht unendlich sind, so wird $f(a \pm h) - f(a) = \infty$ für ein beliebig kleines h.

10) Ist $f(x)$ für $x = a$ unstetig, etwa $f(a+\delta) = b$, $f(a-\varepsilon) = c$, wo δ, ε unendlich klein werdende positive, b und c aber beliebige [illegible]che Grössen bezeichnen und setzen wir die Differenz $b - c$ als [illegible]ull verschieden voraus, so nimmt der Ausdruck $f(x+h) - f(x)$ [illegible] $= a$ die drei Werthe $b - b = c - c = 0$, $b - c$ *und* $c - b$ an, [illegible] $f(a)$ selbst unbestimmt ist und zwei Werthe, nämlich b und c [illegible]men kann, je nachdem $f(a)$ als $f(a+0)$ oder $f(a-0)$ aufge[illegible] wird und ebenso der Werth von $f(a+h)$ durch das Zeichen [illegible] bestimmt wird.

Ist z. B. $f(x) = x^3 + 3x - 8$,
so wird $f(x \pm h) - f(x) = \pm 3hx^2 + 3h^2x \pm h^3 \pm 3h$
für **jeden** Werth von x **Null**, wenn $h = 0$ wird. Die gegebene Function ist somit in ihrem ganzen Verlaufe d. h. für alle innerhalb der Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden Werthe von x **stetig**.

Ist dagegen $f(x) = arc\,tg \frac{1}{x-2}$,

so wird $f(x+h) = arc\,tg \frac{1}{x+h-2}$; $f(x-h) = arc\,tg \frac{1}{x-h-2}$
also für $x = 2$:

$$f(2+h) = arc\,tg \frac{1}{h}; \qquad f(2-h) = arc\,tg \left(-\frac{1}{h}\right)$$

und man erhält hiernach für $h = 0$:

$$f(2+0) = arc\,tg\,\infty = \frac{\pi}{2} \text{ und } f(2-0) = arc\,tg\,(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Die vorgelegte Function macht somit für $x = 2$ einen Sprung von $\frac{\pi}{2}$ auf $-\frac{\pi}{2}$, ändert sich also an dieser Stelle plötzlich um π und ist somit **discontinuirlich**.

Ebenso ist $f(x) = tg\,x$ discontinuirlich für

$$x = \pm \frac{\pi}{2}, \quad x = \pm \frac{3\pi}{2} \quad \text{etc.}$$

Die Function $f(x) = (-a)^x$, wo a positiv ist, hat unendlich viele unendlich nahe liegende Unstetigkeitsstellen.

11) Die in der Algebra und Trigonometrie gebräuchlichen Functionen sind, wie eine leichte Untersuchung zeigt, nur für specielle Werthe der unabhängig Veränderlichen unstetig und werden daher als stetige Functionen bezeichnet. Findet die Stetigkeit für alle Werthe von $x = a$ bis $x = b$ statt, so sagt man $f(x)$ sei stetig innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$.

12) Ist eine Function $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ im Allgemeinen stetig, tritt aber für specielle Werthe innerhalb dieses Intervalles dadurch eine Unstetigkeit ein, dass die Function dafür **unendlich** wird, so wollen wir dieselbe innerhalb des bezeichneten Intervalles **einwerthig** nennen.

13) Ist $u = f(x, y, z, \ldots)$ eine Function der n unabhängig Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und $x_0 < x < X$; $y_0 < y < Y$; $z_0 < z < Z$, so sagt man diese Function sei innerhalb der bezeichneten Grenz **continuirlich**, wenn, nachdem die Werthe von $n-1$ Veränderlich bestimmt sind, $f(x, y, z, \ldots)$ eine **stetige** Function der noch übrige $n$ten Variabeln ist.

Die Bedeutung einer einwerthigen Function von mehren Verände lichen innerhalb gewisser Grenzen ist nach 12. für sich klar.

§. 3. Graphische Darstellung einer Function.

1) Das geeignetste Mittel die aufeinander folgenden Werthe, welche eine Function $y = f(x)$ der Reihe nach annimmt, wenn man der unabhängig Veränderlichen x successiv alle Werthe beilegt, anschaulich zu machen, besteht darin, dass man zwei rechtwinklige Coordinatenachsen annimmt, von deren Anfangspunkt aus die betreffenden Werthe von x als Abscissen und die zugehörigen Werthe von y als entsprechende Ordinaten aufträgt. Die Endpuncte der Ordinaten bestimmen alsdann eine Curve, deren Form die successive Werthveränderung der abhängig Veränderlichen y veranschaulicht.

Besteht die Curve aus mehren Aesten, so ist jeder derselben besonders zu betrachten.

2) Ist die Function $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ reell und stetig, so werden für unendlich kleine h und k die Endpunkte der beiden Ordinaten, welche den Abscissen $x - h$ und $x + k$ entsprechen, unendlich nahe zusammen fallen und die Curve geht daher in einem continuirlichen Zuge von A nach B. Umgekehrt folgt hieraus:

Geht die Curve in einem ununterbrochenen Zuge, der aber in keiner endlichen Strecke eine zur Ordinatenachse parallele Gerade darstellt, von A nach B, so ist die Ordinate $f(x)$ reell und stetig von $x = a$ bis $x = b$, erleidet der Curvenzug aber innerhalb dieser Punkte ein oder mehre Unterbrechungen, so ist die Ordinate an den betreffenden Stellen imaginär, oder discontinuirlich.

3) Aendert eine stetige Function innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = b$ ihr Zeichen, so muss sie für einen gewissen Werth von x, der zwischen a und b liegt, Null sein. Denn alle Punkte der die Function innerhalb dieser Grenzen repräsentirenden Curve liegen offenbar zwischen den unendlich gedachten Grenzordinaten, und da wegen der Stetigkeit die Curve an irgend einer Stelle zwischen $x = a$ und $x = b$ die Abscissenachse durchschneiden muss, so liegt auch diese Uebergangsstelle, für welche aber $f(x) = 0$ ist, zwischen jenen Ordinaten oder auf der Strecke $b - a$.

4) Ist $K = f(k)$ der kleinste, $G = f(g)$ der grösste Werth, den eine stetige Function $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ annehmen und ist $K < M < G$, so wird $f(x)$ für einen bestimmten Werth $x = m$, der zwischen a und b liegt, gleich M. Denn da die stetige ...ction $f(x) - M$ für $x = k$ in $f(k) - M = K - M$, für $x = g$ ...n $f(g) - M = G - M$ übergeht, im ersten Falle also negativ, ... zweiten positiv wird, so muss nach 3. für einen zwischen k und g ...enden Werth m der Ausdruck $f(m) - M = 0$ oder $f(m) = M$ ...den.

5) Ist für irgend einen Werth von $x = a$ die Function **unstetig**, so erleidet der Zug der betreffenden Curve an der entsprechenden Stelle eine Unterbrechung, indem daselbst die Ordinate plötzlich einen Sprung macht, so dass nun die Endpunkte der Ordinaten $f(a-h)$ und $f(a+k)$ für unendlich kleine positive h und k nicht mehr einander unendlich nahe kommen.

6) Die folgenden Betrachtungen setzen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, nur solche Functionen voraus, welche entweder im ganzen Verlaufe stetig, oder wenigstens einwerthig sind.

7) Analog, wie oben mittelst rechtwinkliger Coordinaten gezeigt wurde, lässt sich der Gang einer Function auch mittelst **Polarcoordinaten** oder irgend eines anderen Coordinatensystems graphisch darstellen.

8) Um in entsprechender Weise eine Function von **zwei** unabhängig Veränderlichen $z = f(x, y)$ graphisch zu versinnlichen, nehme man drei zu einander rechtwinklige Coordinatenachsen und betrachte z als die zur XY Ebene im Punkte x, y senkrechte Ordinate. Auch hier könnte man wieder jedes andere Coordinatensystem zu Grunde legen.

§. 4. Grenzwerthe einer Function.

1) Nähert sich eine Function bei einer fortgesetzten Ab- oder Zunahme der betreffenden unabhängig Veränderlichen immer mehr und mehr einem **bestimmten** Werthe, so heisst dieser Werth die **Grenze** (bezeichnet durch *lim*) der entsprechenden Function.

So ist z. B.
$$\lim \frac{a}{a-x} = 1$$
für unendlich klein werdende x, dagegen
$$\lim \left(a \pm \frac{1}{x}\right) = a$$
für unendlich gross werdende x. Ebenso ist der Kreis die Grenze des eingeschriebenen n ecks, wenn man n ohne Ende zunehmen lässt u. s. w.

Sind $P, Q, R, \ldots$ Functionen von x, welche sich für $\lim x = w$, wo w irgend einen bestimmten Grenzwerth bedeutet, bezüglich den endlichen Grenzen $p, q, r, \ldots$ nähern, und sind $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Werthe, welche mit $x - w$ gleichzeitig sich der Null nähern, so kann man setzen:
$$P = p + \alpha; \quad Q = q + \beta; \quad R = r + \gamma; \ldots$$
wo also $\quad p = \lim P; \quad q = \lim Q; \quad r = \lim R; \ldots$

Hieraus folgt unmittelbar:
$$P \pm Q \pm R \pm \ldots = p \pm q \pm r \pm \ldots + (\alpha \pm \beta \pm \gamma \pm \ldots)$$
oder
$$\lim (P \pm Q \pm R \pm \ldots) = p \pm q \pm r \pm \ldots$$
$$= \lim P \pm \lim Q \pm \lim R \pm \ldots$$

Damit diese, so wie die nachfolgenden Gleichungen allgemein Giltigkeit haben, muss man unter der Grenze einer **Constanten** diese Constante selbst verstehen, also $\lim C = C$ setzen und umgekehrt

2) Wächst eine Veränderliche y beständig und bleibt dieselbe dennoch stets kleiner als eine endliche Grösse g, so nähert sich dieselbe immer mehr einer **endlichen** Grenze. Denn ist $lim\,(g-y)=\alpha$, also $lim\,(g-y)-lim\,\alpha = lim\,(g-\alpha-y)=0$, so muss y sich der endlichen Grenze $g-\alpha$ in's Unendliche nähern.

3) Durch Multiplication der Gleichungen

$$P=p+\alpha \text{ und } Q=q+\beta$$

erhält man

$$PQ=pq+q\alpha+p\,\beta+\alpha\,\beta.$$

Da nun die Summe $q\,\alpha+p\,\beta+\alpha\,\beta$, weil p und q endlich, mit $x-w$ zugleich unendlich klein wird, so folgt

$$lim\,(PQ)=p\,q=lim\,P\,.\,lim\,Q,$$

woraus sich unmittelbar ergibt:

$$lim\,(CP)=lim\,C\,.\,lim\,P=C\,lim\,P.$$

4) Durch Division der Gleichungen

$$P=p+\alpha \text{ und } Q=q+\beta$$

folgt:

$$\frac{P}{Q}=\frac{p+\alpha}{q+\beta}=\frac{p}{q}+\frac{q\,\alpha-p\,\beta}{q\,(\beta+q)}.$$

Bei unendlicher Abnahme von $x-w$ nähert sich aber der Zähler $q\,\alpha-p\,\beta$ der Null, der Nenner $q\,(\beta+q)$ dem Werthe q^2 und es ist somit

$$lim\,\frac{P}{Q}=\frac{p}{q}=\frac{lim\,P}{lim\,Q}.$$

5) Nach 3 ist

$$\begin{aligned} lim\,P^n &= lim\,(\overset{1}{P}\,.\,\overset{2}{P}\,.\,\overset{3}{P}\,.\,.\,.\,.\,\overset{n}{P}) \\ &= \overset{1}{lim}\,P\,.\,\overset{2}{lim}\,P\,.\,\overset{3}{lim}\,P\,.\,.\,.\,.\,\overset{n}{lim}\,P \\ &= (lim\,P)^n \end{aligned}$$

6) Setzt man

$$P^Q=(p+\alpha)^{q+\beta}=(p+\alpha)^q\,(p+\alpha)^\beta$$

und berücksichtigt, dass wenn $x-w$ unendlich klein wird, sich $(p+\alpha)^q$ und $(p+\alpha)^\beta$ bezüglich p^q und der Einheit nähern, so folgt:

$$lim\,(P^Q)=p^q=(lim\,P)^{lim\,Q}$$

woraus unmittelbar

$$lim\,(P^C)=(lim\,P)^C.$$

Aus $\quad log\,P=log\,(p+\alpha)=log\,p+log\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)$

sich sofort

$$lim\,(log\,P)=log\,p=log\,(lim\,P).$$

8) Ist $\lim \frac{x}{a} = 0$, wo a eine endliche Zahl bezeichnet, so sagt man, es sei x **unendlich klein** in Bezug auf a.

Ist $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, $\lim \frac{\beta}{\alpha} = k$, wo k einen von Null verschiedenen Grenzwerth bedeutet, so sagt man, α und β seien **unendlich klein von derselben Ordnung.** Setzt man nun

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon,$$

wo ε eine mit α gleichzeitig sich der Null nähernde Grösse bezeichnet, so ergibt sich:

$$\beta = \alpha\,(k + \varepsilon)$$

als allgemeiner Ausdruck für eine unendlich kleine Grösse **derselben Ordnung.**

Ist allgemein $$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = k$$

also $$\frac{\beta}{\alpha^n} = k + \varepsilon, \quad \beta = \alpha^n\,(k + \varepsilon),$$

so sagt man β sei unendlich klein von der $n$ten Ordnung und erhält in vorstehender Gleichung einen allgemeinen Ausdruck für eine solche Grösse.

Sehen wir z. B. den Bogen x als unendlich klein von der ersten Ordnung an, so wird $\sin x$ von derselben Ordnung, dagegen $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ unendlich klein von der zweiten und $x - \sin x$ von der dritten Ordnung.*)

9) Ist $$\lim \frac{\alpha_1}{\alpha} = 1;\ \lim \frac{\beta_1}{\beta} = 1,$$

so ist $$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

Denn setzt man $\frac{\alpha_1}{\alpha} = 1 + \delta$, $\frac{\beta_1}{\beta} = 1 + \varepsilon$, wo δ und ε unendlich klein sind, so folgt:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1 + \delta}{1 + \varepsilon}$$

und hiernach $$\lim \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \lim \frac{\alpha}{\beta} \,.\, \lim \frac{1 + \delta}{1 + \varepsilon} = \lim \frac{\alpha}{\beta}.$$

10) Nach 9. ist $\lim \frac{\alpha + (\alpha_1 - \alpha)}{\beta + (\beta_1 - \beta)} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$,

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha} = \delta; \quad \frac{\beta_1 - \beta}{\beta} = \varepsilon$$

woraus hervorgeht, dass $\alpha_1 - \alpha$ unendlich klein ist im Verhältniss zu α und ebenso $\beta_1 - \beta$ im Verhältniss zu β. Es bleibt hier

*) Vergl. mein Lehrbuch der sphär. Trig. §. 68.

nach $lim \frac{\alpha}{\beta}$ ungeändert, wenn man α und β um Grössen, die in Bezug auf α und β selbst unendlich klein sind, vermehrt oder vermindert.

11) Bezeichnen $A, B, C, \ldots L$, sowie X Werthe, welche sämmtlich von Null verschieden sind, ferner $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ ganze positive Zahlen, wo $\alpha < \beta < \gamma \ldots < \lambda$, so kann h stets so klein gewählt werden, dass

$$[Ah^\alpha + Bh^\beta + Ch^\gamma + \ldots + Lh^\lambda] < [X]$$

wo wir allgemein durch $[X]$ den Absolutwerth des innerhalb der Klammern stehenden Werthes X bezeichnen.

Um diesen Satz zu beweisen, können wir $h < 1$ und positiv voraussetzen; denn ist h negativ, so kann man sich das Zeichen mit den Coefficienten vereinigt vorstellen. Bezeichnet nun $[G]$ den Absolutwerth des grössten der Coefficienten $A, B, \ldots L$, ferner $[R]$ den Absolutwerth von $Ah^\alpha + Bh^\beta + \ldots + Lh^\lambda$, so ist

$$[G]\,(h^\alpha + h^\beta + h^\gamma + \ldots + h^\lambda) > [R]$$

also, wenn n die Anzahl der Exponenten $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ bedeutet,

$$[G]\,(h^\alpha + h^{\alpha+1} + h^{\alpha+2} + \ldots + h^{\alpha+n-1}) > [R]$$

oder

$$[G]\,\frac{h^\alpha - h^{\alpha+n}}{1-h} = \frac{[G]\,h^\alpha}{1-h} - \frac{[G]\,h^{\alpha+n}}{1-h} > [R]$$

Da nun $h < 1$ und α und n positive Zahlen sind, so ist

$$h^{\alpha+n} < h^\alpha, \quad \frac{[G]\,h^{\alpha+n}}{1-h} < \frac{[G]\,h^\alpha}{1-h}$$

folglich um so mehr

$$\frac{[G]\,h^\alpha}{1-h} > [R]$$

oder da

$$\frac{[G]\,h}{1-h} > \frac{[G]\,h^\alpha}{1-h}$$

auch

$$\frac{[G]\,h}{1-h} > [R]$$

Nimmt man nun

$$[X] > \frac{[G]\,h}{1-h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

so folgt

$$[R] < [X] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b).$$

Aus (a) ergibt sich aber

$$([X] + [G])\,h < [X]$$

$$h < \frac{[X]}{[X] + [G]}.$$

ıtspricht somit h, positiv oder negativ genommen, dieser Be-ᵕng, so ist (b) erfüllt.

2) Aus 11. fliesst unmittelbar für ein positives r und ein hin-ᵕnd kleines h die Ungleichung

$$[Ah^{\alpha+r} + Bh^{\beta+r} + \ldots + Lh^{\lambda+r}] < [Xh^r]$$

oder

$$[Ah^{\alpha_1} + Bh^{\beta_1} + \ldots + Lh^{\lambda_1}] < [Xh^r]$$

wo $r < \alpha_1 < \beta_1 < \ldots . < \lambda_1$ lauter positive ganze Zahlen bedeuten.

13) Hieraus ergibt sich weiter, dass man in der Reihe

$$Ah^\alpha + Bh^\beta + Ch^\gamma + \ldots . + Lh^\lambda,$$

wo $\alpha < \beta < \gamma < \ldots < \lambda$ und ganze positive Zahlen sind, stets h so klein wählen kann, dass

$$[Ah^\alpha] > [Bh^\beta + Ch^\gamma + \ldots + Lh^\lambda],$$

also das Zeichen der ganzen Reihe mit dem des ersten Gliedes übereinstimmt.

14) Nehmen wir in 11. $[X] = \delta$, wo δ positiv und beliebig klein, so ist für ein hinreichend kleines h

$$[Ah^\alpha + Bh^\beta + \ldots . + Lh^\lambda] < \delta$$

und es kann somit der Absolutwerth von $Ah^\alpha + Bh^\beta + \ldots + Lh^\lambda$ so klein gemacht werden, als man nur will.

Ist $Ah^\alpha + Bh^\beta + \ldots + Lh^\lambda$ positiv, so folgt

$$Ah^\alpha + Bh^\beta + \ldots + Lh^\lambda < \delta$$

und wenn jenes Aggregat negativ ist, so kann man nach 13. h so klein wählen, dass

$$[Ah^\alpha] > [Bh^\beta + Ch^\gamma + \ldots + Lh^\lambda].$$

Nimmt man nach 11. zugleich $h < \dfrac{\delta}{\delta + [G]}$,

so ist, h mag positiv oder negativ sein,

$$[Ah^\alpha + Bh^\beta + \ldots + Lh^\lambda] < \delta.$$

Ist daher α ungerade, so kann man durch entsprechende Wahl des Zeichens von h stets $Ah^\alpha + Bh^\beta + \ldots + Lh^\lambda$ positiv und

$$Ah^\alpha + Bh^\beta + \ldots + Lh^\lambda < \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

machen. Für ein gerades α kann man den Zeichenwechsel des Aggregats in der angegebenen Weise nicht erzielen; allein da das Positive stets grösser ist als das Negative, so kann auch in diesem Falle immer die Ungleichung (c) hervorgebracht werden.

§. 5. Beispiele über Grenzbestimmungen.

1) $Lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für ein unendlich grosswerdendes n zu bestimmen.

Auflösung. Nach dem binomischen Satze ist für ganze positiv α und β:

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{\beta}=1+1+\frac{1-\frac{1}{\beta}}{1\,.\,2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{2}{\beta}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=1+1+\frac{1-\frac{1}{\alpha}}{1\,.\,2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$

Setzen wir nun $\beta > \alpha$ voraus, so hat die erste dieser Entwickelungen offenbar mehr Glieder als die zweite und, da beide die zwei ersten Glieder gemeinschaftlich haben, aber

$$\frac{1}{\beta}<\frac{1}{\alpha},\quad \frac{2}{\beta}<\frac{2}{\alpha},\quad \frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}\ldots$$

also $1-\frac{1}{\beta}>1-\frac{1}{\alpha},\quad 1-\frac{2}{\beta}>1-\frac{2}{\alpha},\quad 1-\frac{3}{\beta}>1-\frac{3}{\alpha}\ldots$

so ergibt sich hieraus unmittelbar, dass

$$\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{\beta}>\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

also $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ mit wachsendem n selbst wächst. Nun ist ferner, wenn k irgend eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$\left(1+\frac{1}{\alpha k}\right)^{\alpha}=1+\frac{1}{k}+\frac{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{1\,.\,2}\frac{1}{k^2}+\frac{\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1}{k^3}+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{k}+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{2k^2}+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\frac{1}{4k^3}+$$

$$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\left(1-\frac{3}{\alpha}\right)\frac{1}{8k^4}+$$

$$\frac{2}{15}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\left(1-\frac{3}{\alpha}\right)\left(1-\frac{4}{\alpha}\right)\frac{1}{16k^5}+\ldots$$

also $\left(1+\frac{1}{\alpha k}\right)^{\alpha}<1+\frac{1}{k}+\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{4k^3}+\frac{1}{8k^4}+\frac{1}{16k^5}+\ldots$

oder $\left(1+\frac{1}{\alpha k}\right)^{\alpha}<1+\frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{2k}}$ oder $<\frac{2k+1}{2k-1}$

$$\left(1+\frac{1}{\alpha k}\right)^{\alpha k}<\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)^{k}$$

[Di]ese Ungleichheit besteht aber auch dann noch, wenn der Expo[nent de]s Ausdrucks der linken Seite nicht durch k theilbar ist. Denn [bezeic]hnet $r<k$ eine beliebige positive Zahl, so ist nach Obigem

$$\left(1+\frac{1}{\alpha k-r}\right)^{\alpha k-r}<\left(1+\frac{1}{\alpha k}\right)^{\alpha k}<\left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)^{k}$$

oder wenn man $ak - r = n$ setzt,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{2k+1}{2k-1}\right)^k$$

Nimmt man nun $k = 2, 3, 4, \ldots.$ so resultirt bezüglich

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2{,}777\ldots; \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2{,}744 \text{ u. s. w.}$$

Da also $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ mit wachsendem n beständig wächst und die endliche Grösse $2{,}777\ldots$ nicht überschreitet, so ist $lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für $lim\, n = \infty$ nach §. 4. 2. eine ganz bestimmte Grenze, welche zwischen 2 und $2{,}777\ldots$ liegt.

Wir bezeichnen diesen Grenzwerth durch den Buchstaben e und haben somit für ein unendlich wachsendes n:

$$lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nehmen wir nun an, es sei n eine positive gebrochene, zwischen m und $m + 1$ liegende Zahl und setzen $n = m + \beta$, wo $0 < \beta < 1$, so ist

$$m < n < m + 1, \text{ also } \frac{1}{m} > \frac{1}{n} > \frac{1}{m+1},$$

$$1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{m+1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^\beta > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1-(1-\beta)}$$

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^\beta > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{1-\beta}}.$$

Nach Obigem nähern sich aber mit wachsendem m die Ausdrücke $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ und $\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}$ der Grenze e, während $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^\beta$ und $\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{1-\beta}$ sich der Einheit nähern, und es ist somit nach A. A. II. §. 65. 10 auch in vorliegendem Falle bei wachsendem n

$$lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Nehmen wir endlich an, es sei n negativ und setzen statt dessen $-\gamma$, so ist

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^{-\gamma}=\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{-\gamma}=\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)^{\gamma}=\left(\frac{\gamma-1+1}{\gamma-1}\right)^{\gamma}=$$
$$\left(1+\frac{1}{\gamma-1}\right)^{\gamma-1}\left(1+\frac{1}{\gamma-1}\right)$$

und da dieser Ausdruck sich für ein wachsendes n ebenfalls der Grenze e nähert, so gilt obiger Grenzwerth auch für negative n.

Aus Vorstehendem folgt unmittelbar für ein unendlich wachsendes n

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\lim\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=\left[\lim\left(1+\frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=e^x \quad \ldots . \quad (2)$$

Anmerk. Den Grenzwerth e hat man als Basis eines Logarithmensystems gewählt und dieses im Gegensatze zu dem künstlichen Systeme, dessen Basis 10 ist, das natürliche oder Neper'sche Logarithmensystem genannt.

Für natürliche Logarithmen, welche stets vorausgesetzt werden, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, und die wir, um sie von den Logarithmen eines beliebigen Systems zu unterscheiden, durch l andeuten, ist daher $le = 1$.

2) Man soll $\lim\frac{\sin x}{x}$ für $\lim x = 0$ bestimmen.

Auflösung. Da bekanntlich

$$tg\, x > x > \sin x \text{ oder } \frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1,$$

also

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

somit $\frac{\sin x}{x}$ stets zwischen $\cos x$ und 1 liegt und sich bei abnehmendem x der Werth von $\cos x$ immer mehr und mehr der Einheit nähert, so ist nach A. I §. 65. 10

$$\lim\frac{\sin x}{x}=1.$$

3) $\lim\frac{a^x-1}{x}$ für $\lim x = 0$ zu bestimmen.

Auflösung. Setzt man $a^x - 1 = \frac{1}{\alpha}$, wo α wächst, während [illegible]ner wird, also

$$a^x = 1+\frac{1}{\alpha}$$

$$x=\frac{\log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log a}$$

und
$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{\log a}{\log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha}$$

so folgt: $$\lim \frac{a^x - 1}{x} = \frac{\log^{(a)} a}{\log^{(a)} e} = \frac{1}{\log^{(a)} e} = la^{*)}$$

Hiernach ist ferner $$\lim \frac{e^x - 1}{x} = le = 1.$$

4) $\lim \frac{\log(1+x)}{x} = \lim \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ für $\lim x = 0$ zu ermitteln.

Auflösung. Setzt man $\frac{1}{x} = \alpha$, $x = \frac{1}{\alpha}$, wo also α wächst, wenn x abnimmt, so folgt

$$\lim \frac{\log(1+x)}{x} = \lim \log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = \log\left[\lim\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha\right] = \log e.$$

für natürliche Logarithmen folgt hieraus unmittelbar

$$\lim \frac{l(1+x)}{x} = le = 1.$$

5) Man soll $\lim \frac{(1+x)^n - 1}{x}$ für $\lim x = 0$ bestimmen.

Auflösung. Setzt man $(1+x)^n = e^y$, wo y gleichzeitig mit x sich der Null nähert, also

$$n\,l(1+x) = y,$$

so wird
$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} = \frac{e^y - 1}{x} = \frac{n}{x}\,\frac{e^y - 1}{y}\,\frac{y}{n} =$$
$$\frac{n}{x}\,\frac{e^y - 1}{y}\,l(1+x) = n\,\frac{e^y - 1}{y}\,\frac{l(1+x)}{x}$$

also $$\lim \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n \lim \frac{e^y - 1}{y} \lim \frac{l(1+x)}{x}$$

oder da nach 3 und 4

$$\lim \frac{e^y - 1}{y} = 1 \text{ und } \lim \frac{l(1+x)}{x} = 1,$$
$$\lim \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n.$$

Anmerk. Zu demselben Resultate gelangt man auch einfach durch Anwendung des binomischen Satzes.

§. 6. Convergenz der unendlichen Reihen.

α) Mit lauter reellen Gliedern.

1) Nähert sich die Summe S_n der n ersten Glieder einer Rei immer mehr und mehr einer bestimmten Grenze S, je grösser mar

*) Vergl. A. A. I §. 137. 12.

werden lässt, so heisst die Reihe convergent, S ihre Summe und $S - S_n$ das Restglied derselben; im anderen Falle wird sie divergent genannt.

So ist z. B. die geometrische Reihe

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots\ldots$$

convergent, wenn $q < 1$ und divergent, wenn $q \geqq 1$ ist. Für $q = -1$ geht dieselbe über in $a - a + a - a + a - \ldots.$ hat also o oder a zur Summe und heisst dann oscillirend.

Convergirt eine Reihe unabhängig von der Anordnung der Glieder, so sagt man, dieselbe sei unbedingt convergent, ist dagegen zur Convergenz eine bestimmte Aufeinanderfolge der einzelnen Glieder erforderlich, so ist sie bedingt convergent. Zuweilen ändert sich die Summe einer unendlichen Reihe mit der Aenderung der Anordnung ihrer Glieder.

Ist z. B. $s = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$

$$+ \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n}\right) + \ldots$$

$$S = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \ldots$$

und bezeichnen s_n und S_n die Summen der n ersten Gliedergruppen beider Reihen, so wird

$$S_n - s_n = \Sigma \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{2n}\right)$$

also für $n = \infty$

$$S - s = \frac{s}{2} \text{ oder } S = \frac{3}{2} s$$

woraus hervorgeht, dass der Werth der Reihe s durch blosse Abänderung der Gliederfolge sich geändert hat.

2) Ist

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n + \ldots = S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

eine convergente Reihe und man setzt

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = S_n$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+r-1} = S_{n+r}$$

so [illegible]n sich S_n und S_{n+r} einer und derselben Grenze, wenn n in's U[illegible]he wächst. Für ein solches n wird daher

$$lim\,(S_{n+r} - S_n) = 0$$

u[illegible]t somit für eine convergirende Reihe:

$$\lim\,(u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+r-1}) = 0$$

wenn man n unendlich wachsen lässt.

Setzt man den willkürlichen Werth von $r = 1$, so folgt für die convergente Reihe (1) als nothwendige, aber nicht genügende Bedingung:

$$\lim u_n = 0.$$

Anmerk. Für eine Reihe mit lauter positiven Gliedern ist ferner eine nothwendige, aber ebenfalls nicht allein genügende Convergenzbedingung, dass $\lim n u_n = 0$ sei. Denn nehmen wir an, $n u_n$ nähere sich mit wachsendem n einer endlichen Grenze g, so wäre von einer gewissen Stelle an $n u_n = g$, $u_n = \frac{g}{n}$, also

$$u_n + u_{n+1} + \ldots = g\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\right) = \infty\,^{*})$$

also die Reihe divergent.

3) Setzen wir den Rest der Reihe (1) oder

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = R_n$$

und kann $[R_n]$ für ein hinreichend grosses n beliebig klein gemacht werden, ist also $\lim R_n = 0$, so convergirt (1). Denn bezeichnet S_n die Summe der n ersten Glieder, so liegt der Werth der ganzen Reihe zwischen $S_n - [R_n]$ und $S_n + [R_n]$ und wenn wir nun annehmen, es sei $[R_n] = \delta$, wo δ mit wachsendem n sich der Null nähert, so liegt für ein hinreichend grosses n der Werth der Reihe zwischen $S_n - \delta$ und $S_n + \delta$.

Da also S stets zwischen zwei endlichen Grenzen liegt, die einander so nahe gebracht werden können, als man nur will, so ist die Reihe (1) convergent.

4) Ist $\lim R_n$ für $n = \infty$ nicht Null, sondern eine endliche oder gar unendliche Grösse, so kann sich die Summe der n ersten Glieder für ein unendlich wachsendes n keiner bestimmten Grenze nähern und die Reihe ist somit nach der Definition divergent.

---

*) Denn da

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+n-1} > n \cdot \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \ldots + \frac{1}{2n+2n-1} > 2n \cdot \frac{1}{4n} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4n} + \frac{1}{4n+1} + \ldots + \frac{1}{4n+4n-1} > 4n \cdot \frac{1}{8n} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8n} + \frac{1}{8n+1} + \ldots + \frac{1}{8n+8n-1} > 8n \cdot \frac{1}{16n} > \frac{1}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

so ergibt sich hieraus durch Addition:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \text{ in inf.}$$

d. h. $$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots = \infty$$

5) Wenn die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots$$

mit lauter positiven Gliedern convergirt, so convergirt auch die Reihe

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

mit abwechselnden Zeichen der Glieder.

Nach der Voraussetzung nähert sich

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_{2n-1}$$

einer endlichen Grenze für ein unendlich wachsendes n, dasselbe ist daher der Fall für jede der zwei Partialsummen

$$u_0 + u_2 + u_4 + u_6 + \dots\dots + u_{2n-2}$$

$$u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \dots\dots + u_{2n-1}$$

also auch mit deren Differenz

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots\dots + u_{2n-2} - u_{2n-1}$$

Nach der Definition der Convergenz convergirt daher die zweite Reihe und ihre Summe ist kleiner als die der ersten.

Dieser Satz gilt aber nicht umgekehrt, wie sich auf analoge Weise leicht zeigen lässt.

Hiernach ist die Convergenzbedingung einer Reihe mit alternirenden Gliedern abhängig gemacht von der einer Reihe mit nur positiven Gliedern. Genügt also eine Reihe mit abwechselnden Zeichen den für Reihen mit lauter positiven Gliedern aufgestellten Convergenzbedingungen, so ist jene nothwendig auch convergent.

6) Es lässt sich die Convergenz einer Reihe mit alternirenden Zeichen einfacher auch nach folgendem Satze ermitteln, der selbst dann noch zur Entscheidung führt, wenn die vorige Regel nicht anwendbar sein sollte.

Die Reihe (2) convergirt, wenn von einem bestimmten Gliede u_n an

$$u_n > u_{n+1} > u_{n+2} > \dots\dots$$

und $u_n = 0$ für $n = \infty$ wird.

Um die Richtigkeit dieses Satzes nachzuweisen, stelle AB (Fig. 1)

Fig. 1.

A B 2 4 3 1

... mme

$$S_{2n} = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots - u_{2n-1}$$

repräsentiren

$$AB, \quad A1, \quad A2, \quad A3, \quad A4, \dots Am, \dots$$

...ihe nach die Werthe

$$S_{2n}, \quad S_{2n+1}, \quad S_{2n+2}, \quad S_{2n+3}, \quad S_{2n+4}, \dots \quad S_{2n+m}, \dots$$

der Endpunkt der Strecke hierbei immer kleinere Oscillationen

$B1$, 12, 23, 34, ... macht und diese wegen $\lim u_n = 0$ in's Unendliche abnehmen, so wird der Punkt schliesslich in eine feste Lage kommen und durch seine Entfernung von A die Summe S der unendlichen Reihe vorstellen, woraus die Convergenz der Reihe (2) hervorgeht.

7) Sind
$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \ldots\ldots$$
zwei Reihen mit lauter positiven Gliedern und ist
$$u_0 > v_0, \quad u_1 > v_1, \quad u_2 > v_2, \ldots\ldots$$
und convergirt die erste Reihe, so convergirt nothwendig auch die zweite.

Denn da $\lim (u_n + u_{n+1} + \ldots\ldots) = 0$,
so ist um so mehr $\lim (v_n + v_{n+1} + \ldots\ldots) = 0$.

Ist unter derselben Voraussetzung beständig $v_n > u_n$ und divergirt die erste, so divergirt auch die zweite Reihe.

8) Ist $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \quad . \quad .$ (3)
die vorgelegte Reihe mit lauter positiven Gliedern und $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = g$ für $n = \infty$, wo g einen echten Bruch bezeichnet, so muss für ein hinreichend grosses n offenbar $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha$ sein, wenn $g < \alpha < 1$ und $\alpha - g$ eine endliche Grösse ist. Denn wäre stets $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \alpha$, so müsste $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \alpha$, also um so mehr $> g$ sein und wäre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bald $> \alpha$ bald $< \alpha$, so hätte $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ entweder keinen bestimmten Werth oder den Werth α, was der Voraussetzung widersprechen würde.

Aus $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha$ folgt aber unmittelbar $u_{n+1} < \alpha u_n$ und es ist daher jedes Glied der Reihe
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = R_n$$
vom zweiten Gliede an kleiner als das entsprechende Glied der geom. Reihe
$$u_n + \alpha u_n + \alpha^2 u_n + \alpha^3 u_n + \ldots$$
und somit auch
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots < u_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots)$$
oder
$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = R_n < \frac{u_n}{1 - \alpha}.$$

Lässt man nun n immer grösser und grösser werden, so ist, da $\lim u_n = 0$ für $n = \infty$, $\lim R_n = 0$, also die Reihe convergent.

Ist daher allgemein in der Reihe (3) für ein unendlich gross werdendes n der Absolutwerth von $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, so ist die Reihe stets convergent.

9) Ist $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = g$, aber $g > 1$, so kann man n so gross annehmen, dass $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \alpha$, wo $1 < \alpha < g$ und $\alpha - g$ eine endliche Grösse ist; denn wäre stets $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \alpha$ so müsste auch $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$ für $n = \infty$, also um so mehr $< g$ sein, was mit der Voraussetzung im Widerspruche stünde, und wäre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ bald $> \alpha$, bald $< \alpha$, so könnte $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ keinen bestimmten Werth haben oder müsste $= \alpha$, also $< g$ sein. Man hat daher

$$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots > u_n (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots)$$

und da die Reihe der rechten Seite dieser Gleichung offenbar divergirt, so kann die Summe $u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = R_n$ unendlich wachsen. Die Reihe (3) ist demnach divergent, wenn $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ ist.

Anmerk. Ist $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ für $n = \infty$, so darf man hieraus nicht unbedingt auf die Divergenz der betreffenden Reihe schliessen; denn es lässt sich beweisen, dass auch in diesem Falle die Reihe convergirt, wenn $\lim n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1$, dagegen divergirt, wenn $\lim n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 1$ ist. Wird $\lim n \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$, so bleibt die Sache unentschieden.

So ist z. B. die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \ldots$$

für $\alpha > 1$ convergent, während sie für $\alpha = 1$ divergirt*), obgleich $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\right)^\alpha = 1$ ist.

10) Ist

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = S_n$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n = S'_n$$

. nähern sich S_n und S'_n mit unendlich wachsendem n den endlichen ·nzen S und S' in's Unendliche, so convergiren nach 1. die beiden

*) Vergl. die Note auf Seite 18.

Reihen und deren Summen sind bezüglich S und S'. Bezeichnen nun a und b endliche von n unabhängige Factoren, so wird

$$(au_0 + bv_0) + (au_1 + bv_1) + \ldots + (au_n + bv_n) = aS_n + bS'_n$$

und es nähert sich die Summe $(au_0 + bv_0) + (au_1 + bv_1) + \ldots + (au_n + bv_n)$ für ein unendlich wachsendes n der endlichen Grenze $aS + bS'$.

Die Reihe

$$(au_0 + bv_0) + (au_1 + bv_1) + (au_2 + bv_2) + \ldots.$$

convergirt somit und hat $aS + bS'$ zur Summe.

Analog gilt dieser Satz für eine beliebige endliche Anzahl von Reihen.

Multiplicirt man daher die allgemeinen Glieder $u_n, v_n, w_n, \ldots\ldots$ einer endlichen Anzahl von convergirenden Reihen mit den endlichen von n unabhängigen Factoren $a, b, c, \ldots$ so convergirt auch die Reihe $\Sigma\,(au_n + bv_n + cw_n + \ldots)$ und ihre Summe ist $aS + bS' + cS'' + \ldots$

11) Ist $$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$
eine convergente Reihe mit positiven und negativen Gliedern, welche ihre Convergenz jedoch nicht dem Zeichenwechsel, sondern den Bedingungen $\lim a_n = 0$ und $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ verdankt, die also convergent bleibt, wenn man jedes Glied durch seinen Absolutwerth ersetzt, und nehmen wir an, es seien der Ordnung nach $a_\alpha, a_\beta, a_\gamma, \ldots$ die positiven, $a_{\alpha_1}, a_{\beta_1}, a_{\gamma_1}, \ldots$ die negativen Glieder, wo also $\alpha < \beta < \gamma < \ldots. < \mu < \nu$; $\alpha_1 < \beta_1 < \gamma_1 < \ldots. < \mu_1 < \nu_1 \ldots$ und setzen

$$\Sigma = a_\alpha + a_\beta + a_\gamma + a_\delta + \ldots + a_\mu + a_\nu + \ldots$$
$$\Sigma_1 = a_{\alpha_1} + a_{\beta_1} + a_{\gamma_1} + a_{\delta_1} + \ldots + a_{\mu_1} + a_{\nu_1} + \ldots$$

so ist jede dieser beiden Reihen convergent. Denn zunächst sind die Bedingungen $\lim a_\nu = 0$, $\lim a_{\nu_1} = 0$, wegen $\lim a_n = 0$, erfüllt und um zu zeigen, dass auch

$$\lim \frac{a_\nu}{a_\mu} < 1, \qquad \lim \frac{a_{\nu_1}}{a_{\mu_1}} < 1,$$

wählt man n so gross, dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \lambda$, wo $0 < \lambda < 1$, also $a_{n+1} < \lambda\, a_n$, so folgt:

$$\begin{aligned} a_{\mu+1} &< \lambda\, a_\mu \\ a_{\mu+2} &< \lambda\, a_{\mu+1} \\ &\;\;\vdots \\ a_{\nu-1} &< \lambda\, a_{\nu-2} \\ a_\nu &< \lambda\, a_{\nu-1} \end{aligned}$$

und hieraus durch Multiplication

$$a_\nu < \lambda^{\nu-\mu}\, a_\mu \quad \text{oder} \quad \frac{a_\nu}{a_\mu} < \lambda^{\nu-\mu},$$

oder da $\nu > \mu$ ist, $$\frac{a_\nu}{a_\mu} < \lambda < 1,$$

also auch $$\lim \frac{a_\nu}{a_\mu} < 1 \text{ und ebenso } \lim \frac{a_{\nu_1}}{a_{\mu_1}} < 1.$$

Setzt man nun

$$\Sigma = a_\alpha + a_\beta + a_\gamma + \ldots + a_\nu + \varrho$$
$$\Sigma_1 = a_{\alpha_1} + a_{\beta_1} + a_{\gamma_1} + \ldots + a_{\nu_1} + \varrho_1$$

und nimmt n so gross an, dass in der Summe

$$\Sigma_2 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \varrho_2$$

alle Glieder der Reihen Σ und Σ_1 und ausserdem noch andere deren Summe σ sei, enthalten sind, so müssen die Indices dieser Glieder offenbar grösser als ν und ν_1 sein und da man ν und ν_1 so gross wählen kann, dass die Summe der Absolutwerthe aller Glieder, deren Indices grösser als ν und ν_1 sind, so klein wird, als man nur will, so kann auch σ, das nur ein Theil dieser Summe mit positiven und negativen Gliedern ist, beliebig klein werden. Aus

$$\Sigma_2 - \varrho_2 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$= \Sigma - \varrho + \Sigma_1 - \varrho_1 + \sigma$$

oder $$\Sigma_2 = \Sigma + \Sigma_1 + \varrho_2 - \varrho - \varrho_1 + \sigma$$

folgt daher für ein unbegrenzt wachsendes n

$$\Sigma_2 = \Sigma + \Sigma_1,$$

woraus hervorgeht, dass die Summe der Werthe der convergirenden Reihen Σ und Σ_1 gleich dem Werthe der Reihe Σ_2 ist.

Convergirt also eine Reihe, deren Glieder nicht einerlei Zeichen haben, auch dann noch, wenn man jedes Glied durch seinen Absolutwerth ersetzt, so convergirt auch jede der Reihen, welche die positiven und die negativen Glieder für sich bilden und die Summe dieser beiden Reihen ist gleich der Summe der gegebenen Reihe.

Hieraus folgt unmittelbar:

ine unendliche Reihe convergirt unbedingt, wenn sie ihre Con- ‚nz auch dann noch bewahrt, wenn man jedes Glied durch seinen olutwerth ersetzt.

Convergirt die Reihe

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots = S$$

nalb gewisser Grenzen, so ist dieselbe auch stetig innerhalb die- renzen.

Denn setzen wir

$$S = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_{n-1} x^{n-1} + R_n = f(x) + R_n$$

$$S' = u_0 + u_1 x_1 + u_2 x_1^2 + \ldots + u_{n-1} x_1^{n-1} + R'_n = f(x_1) + R'_n$$

wo x_1 statt $x + h$ steht und x und x_1 das Convergenzintervall nicht überschreiten und wählen n so gross, dass die Absolutwerthe von R_n und $R'_n < \delta$, so wird

$$S' - S = f(x_1) - f(x) + R'_n - R_n.$$

Da aber $f(x)$ als rationale ganze Function stetig ist, so kann die Differenz $f(x_1) - f(x)$ für hinreichend kleine h so klein gemacht werden als man nur will und weil auch $[R'_n] - [R_n] < 2\delta$ beliebig klein gemacht werden kann, so wird man auch $S' - S$, es mag $x_1 \gtrless x$ sein, beliebig klein machen können. Es ist somit S für jeden Werth von x stetig.

β) Mit imaginären Gliedern.

1) Behalten wir die in α. 1) für die Convergenz der Reihen mit reellen Gliedern gegebene Definition auch hier bei, so wird die Reihe

$$(a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots.$$

convergiren, wenn

$$(a_0 + b_0 i) + (a_1 + b_1 i) + \ldots + (a_n + b_n i)$$

mit unendlich wachsendem n sich einer Grenze $A + Bi$ nähert. Dieser Bedingung wird aber entsprochen, wenn

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$

und

$$b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n$$

mit wachsendem n sich den endlichen Grenzen A und B nähern. Alsdann convergiren beide Reihen und deren Summen sind bezüglich A und B.

2) Wenn A oder B oder beide zugleich unendlich werden, so ist die ursprüngliche Reihe divergent.

3) Bilden die Moduli der Glieder der Reihe eine convergirende Reihe, so ist die Reihe selbst convergent.

Um dieses zu beweisen, bringen wir die vorgelegte Reihe auf die Form

$$r_0 (\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0) + r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) + \ldots.$$

$$= r_0 \cos\varphi_0 + r_1 \cos\varphi_1 + \ldots + i (r_0 \sin\varphi_0 + r_1 \sin\varphi_1 + \ldots)$$

Da nun die Glieder der Reihe $r_0 + r_1 + r_2 + \ldots$ alle positiv sind und dieselbe nach der Voraussetzung convergirt, als die Summe

$$r_n + r_{n+1} + r_{n+2} + \ldots$$

und somit um so mehr sowohl

$$r_{n+1} \cos\varphi_{n+1} + r_{n+2} \cos\varphi_{n+2} + \ldots$$

als auch $\qquad r_{n+1} \sin \varphi_{n+1} + r_{n+2} \sin \varphi_{n+2} + \ldots$
beliebig klein gemacht werden kann, so ist die gegebene Reihe convergent.

Beispiele.

1) Um die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ auf ihre Convergenz zu prüfen, hat man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} x$$

also $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = x \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$, damit nun die Reihe convergire, muss $x \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ oder $x < \lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$ sein. Ist $x > \lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$, so divergirt dieselbe.

2) Soll die Reihe

$$1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$$

auf ihre Convergenz untersucht werden, so setze man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

alsdann folgt: $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$, also < 1, und die Reihe ist somit convergent.

3) Auf die gleiche Weise findet man für die Reihe

$$x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots, \text{ dass } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1}$$

und da man hiernach das Verhältniss $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für jeden endlichen Werth von x so klein machen kann, als man nur will, wenn man nur n hinreichend wachsen lässt, so ist jedenfalls $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ und die Reihe somit für jeden endlichen, positiven und negativen Werth von x convergent.

4) Zur Ermittelung der Bedingungen unter welchen die Reihe

$$x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} h + \binom{m}{2} x^{m-2} h^2 + \ldots + \binom{m}{n} x^{m-n} h^n + \ldots\ldots$$

convergirt, wenn m eine beliebige Zahl und allgemein $\binom{m}{n}$ den Bruch

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

[...]et, setze man

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m-n}{n+1} \cdot \frac{h}{x} = -\left(1 - \frac{m+1}{n+1}\right) \frac{h}{x}.$$

[...]n erkennt alsdann hieraus, dass für ein wachsendes n der Ausdruck $\frac{[\ldots]+1}{[\ldots]+1}$ sich der Einheit nähert, also $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ist, wenn der Ab-

solutwerth von $\frac{h}{x} < 1$. Die Bedingung der Convergenz der vorstehenden Reihe ist daher $\left(\frac{h}{x}\right)^2 < 1$.

5) Um die Reihe $\frac{1}{1^{1+\alpha}} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \frac{1}{3^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{1}{n^{1+\alpha}} + \ldots$ auf ihre Convergenz zu untersuchen, wenn α positiv vorausgesetzt wird, setze:

$$\frac{1}{1^{1+\alpha}} = 1$$

$$\frac{1}{2^{1+\alpha}} + \frac{1}{3^{1+\alpha}} < 2 \cdot \frac{1}{2^{1+\alpha}} \text{ oder } < \frac{1}{2^\alpha}$$

$$\frac{1}{4^{1+\alpha}} + \frac{1}{5^{1+\alpha}} + \frac{1}{6^{1+\alpha}} + \frac{1}{7^{1+\alpha}} < 4 \cdot \frac{1}{4^{1+\alpha}} \text{ ,, } < \frac{1}{(2^\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{8^{1+\alpha}} + \frac{1}{9^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{1}{15^{1+\alpha}} < 8 \cdot \frac{1}{8^{1+\alpha}} \text{ ,, } < \frac{1}{(2^\alpha)^3}$$

. . . .

so geht daraus hervor, dass die Summe obiger Reihe kleiner ist als

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{(2^\alpha)^2} + \frac{1}{(2^\alpha)^3} + \ldots$$

Diese Reihe ist aber für ein positives α convergent, also ist es auch die vorgelegte.

6) Ist in vorhergehender Reihe $\alpha = 0$ oder negativ und absolut kleiner als 1, so setze

$$\frac{1}{1^{1+\alpha}} = 1$$

$$\frac{1}{2^{1+\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\alpha}$$

$$\frac{1}{3^{1+\alpha}} + \frac{1}{4^{1+\alpha}} > 2 \cdot \frac{1}{4^{1+\alpha}} \text{ oder } > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\alpha)^2}$$

$$\frac{1}{5^{1+\alpha}} + \frac{1}{6^{1+\alpha}} + \frac{1}{7^{1+\alpha}} + \frac{1}{8^{1+\alpha}} > 4 \cdot \frac{1}{8^{1+\alpha}} \text{ ,, } > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\alpha)^3}$$

. . . .

Daher ist die gegebene Reihe grösser als

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\alpha)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\alpha)^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2^\alpha)^4} + \ldots$$

Diese Reihe divergirt aber unter den gemachten Voraussetzungen, also auch die gegebene.

7) Um die Convergenz der Reihe

$$x \sin x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} \sin 2x + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \sin 3x + \ldots + \frac{x^n}{n!} \sin nx + \ldots$$

zu untersuchen, vergleiche man sie mit der Reihe

$$x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Da nun diese nach Aufg. 3 convergirt, so convergirt die vorgelegte Reihe noch um so mehr, da offenbar allgemein

$$\left[\frac{x^n}{n!}\sin nx\right] < \left[\frac{x^n}{n!}\right]$$

8) Um den Werth von $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ für ein unendlich wachsendes n zu berechnen (§. 5, 1.), setze man

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{1}{1}+\frac{1-\frac{1}{n}}{1\,.\,2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}+R,$$

wo der Kürze halber

$$R=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)..\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}\left[\frac{1-\frac{m}{n}}{m+1}+\frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(1-\frac{m+1}{n}\right)}{(m+1)\,(m+2)}+..\right]$$

so ist offenbar

$$R<\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}\left[\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}+\ldots\right]$$

oder da $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+1)^3}+\ldots=\frac{1}{m}$,

$$R=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}\cdot\frac{\varepsilon}{m}$$

wo $0<\varepsilon<1$.

Lässt man nun n unendlich wachsen, so nähert sich der Bruch

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)}{m!}$$

immer mehr der Grenze $\frac{1}{m!}$ und man hat daher

$$\lim R=\frac{1}{m!}\cdot\frac{\varepsilon}{m}$$

..ir wachsende n:

$$\text{1}+\frac{1}{n}\Big)^n = 1+1+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots+\frac{1}{m!}+\frac{1}{m!}\cdot\frac{\varepsilon}{m}$$

..sen wir nun auch m unendlich werden, so ist $\lim\frac{1}{m!}\cdot\frac{\varepsilon}{m}=0$ und

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\,.\,2}+\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots.$$

Durch Summirung einer entsprechenden Anzahl von Gliedern dieser Reihe findet man

$$lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045.$$

9) Die Reihe

$$\left(\frac{1}{\sqrt[x]{1}} - \frac{1}{\sqrt[x]{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt[x]{3}} - \frac{1}{\sqrt[x]{4}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt[x]{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt[x]{2n}}\right) + \ldots$$

wo x eine ganze positive Zahl ist, convergirt, weil die Zeichen der Glieder abwechseln und diese ins Unendliche abnehmen.

10) Um die Convergenz der Reihe

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots.$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) + \ldots.$$

zu untersuchen, schliessen wir dieselbe zunächst mit der $n$ten Gruppe ab und bezeichnen die Summe der n ersten Gruppen durch S'_n, die der n ersten Gruppen der in Aufg. 9 gegebenen Reihe für $x = 2$ durch S_n, so folgt:

$$S'_n - S_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

Da $1, 3, 5, \ldots 2n - 1$ zusammen n Zahlen ausmachen, so enthält diese Differenz noch n Glieder und man hat somit

$$S'_n - S_n > \frac{n}{\sqrt{4n-1}}$$

also für $n = \infty$

$$lim\, S'_n = lim\, S_n + \tfrac{1}{2}\sqrt{\infty} = \infty,$$

indem nach Aufg. 9 $lim\, S_n$ endlich ist. Die vorgelegte Reihe divergirt demnach, obgleich sie dieselben Glieder enthält, wie die convergente Reihe der vorhergehenden Aufgabe.

§. 7. Differentialquotient.

Nehmen wir an, es bewege sich ein Punkt gleichförmig von A aus in einer Geraden und gelange nach der Zeit x zur Stelle B, nach der Zeit $x_1 > x$ nach C, er habe also innerhalb der Zeit x den W[illegible] $AB = y$, während der Zeit x_1 den Weg $AC = y_1$ zurückgelegt, so [illegible] der während der Zwischenzeit $x_1 - x$ von ihm gleichförmig dur[illegible] laufene Weg $BC = y_1 - y$ und somit die Geschwindigkeit*), [illegible]

*) Geschwindigkeit ist der Weg in der Zeiteinheit.

welcher die Bewegung erfolgte $= \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$. Es ist klar, dass der Werth dieses Quotienten unabhängig ist von der Zwischenzeit $x_1 - x$ und bei derselben Bewegung sich gleich bleibt, wie gross oder wie klein man auch $x_1 - x$ annehmen mag.

2) Erfolgt die Bewegung des Punktes von B nach C nicht gleichförmig, aber doch continuirlich*), so kann man die Zwischenzeit $x_1 - x$ so klein annehmen, dass der Punkt, während er den entsprechenden Weg BC zurücklegt, seine Bewegungsrichtung nicht ändert und sich dann, um diese Bewegung in Bezug auf ihre Schnelligkeit mit einer bekannten Bewegung, der gleichförmigen, zu vergleichen, einen zweiten Punkt denken, welcher die Strecke BC in derselben Zeit $x_1 - x$ gleichförmig durchläuft. Die dazu erforderliche Geschwindigkeit ist alsdann wie vorhin $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, aber natürlich, nun nicht für jede Zwischenzeit $x_1 - x$ dieselbe. Da bei den betrachteten Bewegungen für ein unendlich kleines $x_1 - x$ der Weg $y_1 - y$ von derselben Ordnung ist wie $x_1 - x$, so nähert sich der Quotient $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ bei unendlich klein werdendem $x_1 - x$ einer bestimmten Grenze, welche dann die Geschwindigkeit des sich ungleichförmig bewegenden Punktes in B abgibt. Je nachdem die Bewegung in positivem oder negativem Sinne bei B erfolgt, wird das betreffende Wegelement und damit auch die entsprechende Geschwindigkeit positiv oder negativ. Nimmt man in dieser Weise Rücksicht auf das Zeichen der Wegelemente, so ist $y_1 - y$ die algebraische Summe der während der Zwischenzeit $x_1 - x$ zurückgelegten Wege, die Zeit mag gross oder klein sein.

3) Wie wir wissen, ist der gleichförmig zurückgelegte Weg y stets eine Function der Zeit x nämlich $y = Cx$. Man kann nun aber allgemein jede continuirliche Function $y = f(x)$ als den Ausdruck für den Weg ansehen, welchen ein Punkt in der durch die unabhängig Veränderliche x repräsentirten Zeit durchlaufen hat.

ısen wir darum x sich um Δx ändern also in $x_1 = x + \Delta x$ ül ..hen und bezeichnen den Werth, welchen dafür $y = f(x)$ annimmt, d.. h. $y_1 = f(x + \Delta x)$, ferner die entsprechende Functionsänderung

*) D. h. so, dass in unendlich kleiner Zeit ein unendlich kleiner Weg zurückgelegt wi.. .. mit der Zeit von einerlei Ordnung ist.

oder Differenz $y_1 - y$ durch Δy, so ergibt sich aus dem Mitgetheilten, dass der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

bei fortgesetztem Kleinerwerden der Differenz Δx sich immer mehr derjenigen Grenze nähert, welche das Mass der Schnelligkeit ausdrückt, mit welcher der Werth der Function $y = f(x)$ sich ändert, wenn x, von einer bestimmten Stelle ausgehend, eine unendlich kleine Aenderung erleidet. Es ist diese Schnelligkeit nicht allein bei verschiedenen Functionen, sondern auch bei der nämlichen Function verschieden, je nachdem man bei dieser von dem einen oder anderen Werthe der Function aus die Aenderung der unabhängig Veränderlichen vornimmt.

4) Um nun diesen bestimmten Grenzwerth zu kennzeichnen, vertauscht man nach Leibnitz den Buchstaben Δ mit d, setzt also

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

und nennt denselben den Differentialquotienten oder die derivirte (abgeleitete) Function der ursprünglichen Function $y = f(x)$. Man liest dafür: „Differentialquotient von $f(x)$ nach x".

Angenommen, es sei

$$y = f(x) = x^3 - 5x + 7,$$

so wird, wenn x in x_1 übergeht,

$$y_1 = f(x_1) = x_1^3 - 5x_1 + 7$$

also
$$y_1 - y = \Delta y = x_1^3 - x^3 - 5(x_1 - x)$$

und
$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = x_1^2 + x_1 x + x^2 - 5.$$

Lässt man nun x_1 dem x immer mehr sich nähern, so muss schliesslich x statt x_1 gesetzt werden, so dass man erhält

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^2 + x^2 + x^2 - 5$$

oder
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 5.$$

Es wäre somit $3x^2 - 5$ der Differentialquotient von $x^3 - 5x + 7$.

5) Nach Lagrange bezeichnet man den Differentialquotient einer Function $y = f(x)$ auch durch y' oder $f'(x)$. Wir werden v dieser Bezeichnungsweise der Kürze wegen bei Entwickelungen häu und insbesondere dann Gebrauch machen, wenn in Bezug auf die u abhängig Veränderliche kein Zweifel entstehen kann.

6) Das Aufsuchen des Differentialquotienten einer Function geschieht durch das **Differenziren** oder die **Differentiation** derselben.

7) Nach Vorstehendem ist für sich klar, dass **gleichen** Functionen **gleiche** Differentialquotienten entsprechen.

8) Findet die Gleichung $y = f(x) = C$ für jeden Werth von x statt, so gilt dieses auch in Bezug auf die daraus abgeleitete $\frac{df(x)}{dx} = 0$; denn ein Punkt, welcher sich in Ruhe befindet, hat die Geschwindigkeit **Null**.

9) Der Differentialquotient der unabhängig Veränderlichen ist stets $= 1$; denn man hat

$$\frac{dx}{dx} = \lim \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = \lim 1 = 1.$$

10) Wie wir oben gesehen haben, ist die Geschwindigkeit $\frac{dy}{dx}$ eines Punktes $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$, wenn die Bewegung im $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiven}}{\text{negativen}}$ Sinne erfolgt, weil dann aber auch für ein hinreichend kleines Δx der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ausfällt, indem $y_1 \gtrless y$ ist, so kann man jederzeit Δx so klein wählen, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\frac{dy}{dx}$ einerlei Vorzeichen haben. Hieraus folgt unmittelbar, dass, je nachdem $\frac{dy}{dx}$ positiv oder negativ ausfällt, die betreffende Function bezüglich im Zu- oder Abnehmen begriffen sein wird, indem im ersten Falle die entsprechende Bewegung im positiven, im anderen Falle im negativen Sinne erfolgt.

11) Ist $f(x)$ für $x = a$ **discontinuirlich**, d. h. ändert sich der entsprechende Abstand für den betreffenden Zeitmoment a plötzlich um einen **endlichen** Werth, so ist die Geschwindigkeit für eben diese Zeit a **unbestimmt**.*) Da man aber auch die Geschwindig-

---

…wegt sich z. B. der Punkt stetig von O nach A (Fig. 2), macht derselbe aber bei A plötzlich den Sprung AB und bewegt sich alsdann wieder continuirlich gegen C und bezeichnen A_1, B_1 zwei unendlich nahe an A und B in den Strecken OA und BC gelegene Punkte, so sind die Geschwindigkeiten bei A_1 und B_1 …nen bei A und B unendlich wenig verschieden und da jene im Allgemeinen un… sein werden, so sind auch diese ungleich, so dass also der Punkt an der Un…stelle zwei verschiedene Geschwindigkeiten besitzt.

Fig. 2.

A_1 A B B_1 O

keit ausdrücken kann durch $\frac{f(a+\delta)-f(a-\varepsilon)}{\delta+\varepsilon}$, wo δ und ε unendlich kleine Zahlen bedeuten, und der Zähler dieses Bruches dafür endlich und etwa gleich b wird, der Nenner sich aber der Null nähert, so wird die Geschwindigkeit auch unendlich. Wir schliessen hieraus, dass dem Differentialquotienten einer Function an jeder Unstetigkeitsstelle drei Werthe entsprechen, von welchen im Allgemeinen zwei endlich, der dritte unendlich ist.

12) Da im Allgemeinen der Differentialquotient einer Function wiederum eine Function derselben unabhängig Veränderlichen sein wird, so lässt sich in Bezug auf ihn abermals der Differentialquotient bestimmen u. s. f. Man unterscheidet hiernach den ersten, zweiten, ... $n$ten Differentialquotienten einer Function $y=f(x)$ und bezeichnet diese nach Leibnitz der Reihe nach durch

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad \dots \quad \frac{d^ny}{dx^n}$$

oder

$$\frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \dots \quad \frac{d^nf(x)}{dx^n}$$

und nach Lagrange durch

$$y', \quad y'', \quad y''', \dots\dots y^{(n)}$$

oder

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots f^{(n)}(x).$$

Anmerk. In manchen Fällen bezeichnet man die auf einander folgenden Differentialquotienten auch durch D, D', D'', D''', ...

13) Vom zweiten an belegt man die auf einander folgenden Differentialquotienten mit dem gemeinschaftlichen Namen Differentialquotienten höherer Ordnung. Die Aufsuchung derselben geschieht durch wiederholte Differentiation.

Zusatz.

Ist $y=f(x)$ und wir setzen

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=f'(x)+\varepsilon$$

wo ε eine gleichzeitig mit Δx sich der Null nähernde Grösse bezeichnet, so folgt

$$\Delta f(x) = \Delta x\, f'(x) + \varepsilon \Delta x.$$

Die Aenderung $\Delta f(x)$ der Function besteht somit aus der alg braischen Summe zweier Ausdrücke, von welchen der eine $\Delta x\, f'(x$ das Differential von $f(x)$ genannt und durch $df(x)$ bezeichne wird. Man hat daher

$$\frac{\Delta f(x)}{df(x)} = \frac{\Delta x\, f'(x) + \varepsilon \Delta x}{\Delta x\, f'(x)} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)}$$

also
$$\lim \frac{\Delta f(x)}{df(x)} = 1$$

Bei Grenzbestimmungen (§. 4, 10) darf man somit immer $\Delta f(x)$ durch $df(x)$ ersetzen, ohne dass dadurch das Resultat geändert würde. Wir machen hiervon bei gewissen Herleitungen der angewandten Mathematik oft mit Vortheil Gebrauch.

§. 8. Differentialquotient von Functionen von Functionen.

1) Bezeichnet y eine Function von u, u eine solche von x, ist also

$$y = f(u),\ u = \varphi(x),\ y = f[\varphi(x)],$$

so hat man, wenn x als die unabhängig Veränderliche angesehen wird,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$

und somit
$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y_1 - y}{u_1 - u} \cdot \lim \frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$

oder
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du}\frac{d\varphi(x)}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

oder nach der anderen Schreibweise

$$y' = f'(u)\,\varphi'(x) \quad \ldots\ldots \quad (1a)$$

Der Differentialquotient einer Function von einer Function ist also gleich dem Producte der Differentialquotienten der einzelnen Functionen.

2) Ist allgemein

$$y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(w),\ w = \chi(x),$$

so erhält man auf analoge Weise:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

oder
$$y' = f'(u)\,\varphi'(v)\,\psi'(w)\,\chi'(x) \quad \ldots\ldots \quad (2a)$$

3) Ist
$$y = f(u),\ x = \varphi(u),$$

so wird
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\dfrac{y_1 - y}{u_1 - u}}{\dfrac{x_1 - x}{u_1 - u}}.$$

Durch den Uebergang zur Grenze erhält man somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{du}}{\dfrac{dx}{du}} = \frac{\dfrac{df(u)}{du}}{\dfrac{d\varphi(u)}{du}} = \frac{f'(u)}{\varphi'(u)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

4) Setzt man in (3) $u = y$, so folgt:

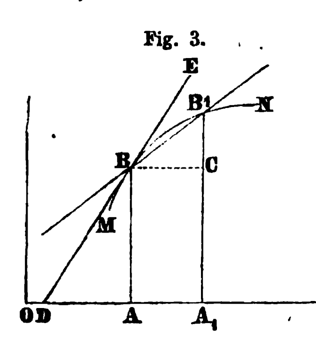
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Der Differentialquotient der umgekehrten Function ist daher dem Differentialquotienten der directen Function reciprok.

§. 9. Bedeutung des ersten Differentialquotienten in der Geometrie.

1) Stellt die Curve MN (Fig. 3) den nach §. 3 construirten Verlauf der continuirlichen Function $y = f(x)$ dar, und repräsentiren die Abscissen OA, OA_1 die Werthe x und x_1, dagegen die Ordinaten AB, A_1B_1 die zugehörigen Werthe y und y_1 der Function, so drückt der Quotient $\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{B_1C}{BC}$ den Werth der trigonometrischen Tangente des Winkels aus, den die Secante BB_1 mit der Abscissenachse bildet. Lässt man nun den Punkt A_1 sich dem Punkte A immer mehr und mehr nähern, also $x_1 - x$ immer kleiner werden, so wird B_1 gleichzeitig dem Punkte B näher rücken und die Secante BB_1 um B sich drehend, sich der Lage der in B an die Curve gezogenen Tangente DE nähern.

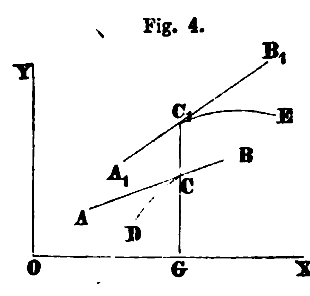
Fig. 3.



Sobald also A_1 dem Punkte A unendlich nahe gekommen, oder die Differenz $x_1 - x$ unendlich klein geworden ist, geht die Secante BB_1 in die Tangente des Punktes B, und der Werth $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ in die trigonometrische Tangente des Winkels EDA über, welchen jene Tangente mit der Abscissenachse bildet. Da aber $lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ für $lim(x_1 - x) = 0$ der Differentialquotient der besagten Function ist, so ergibt sich hieraus unmittelbar dessen geometrische Deutung.

An jeder reellen Unstetigkeitsste hat nach §. 7. 11. $f'(x)$ im Allgemein zwei endliche und einen unendliche Werth. Die zwei endlichen Werthe sin (Fig. 4) ausgedrückt durch die trigon metrischen Tangenten der Winkel, welche die Berührenden AB, A_1B

Fig. 4.



der Punkte C und C_1 mit der Abscissenachse bilden, der dritte Werth ist durch die Tangente des Winkels dargestellt, den $C_1 C$ mit dieser Achse einschliesst.

2) Denkt man sich die Curve durch stetige Bewegung eines Punktes erzeugt, so kommt diesem im Allgemeinen an jeder Stelle nur eine Bewegungsrichtung zu*), die bestimmt wird durch die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die an jener Stelle zur Curve gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet. Ist daher die Ordinate y eine stetige Function von x, so geht aus Vorstehendem hervor, dass, specielle Fälle ausgenommen, der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ sich einer endlichen Grenze nähert, wenn Δx unendlich abnimmt, was mit dem oben in §. 7. 2. Ausgesprochenen übereinstimmt.

Ist die Bewegungsrichtung des Punktes an einer bestimmten Stelle parallel der YAchse, so entspricht dem betreffenden Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ keine endliche Grenze, geschieht dagegen die Bewegung parallel zur XAchse, so ist dafür $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Wir schliessen hieraus auf folgende zwei Sätze:

α) Ist der Quotient $\frac{dy}{dx}$ der Function $y = f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ stets Null, so bewegt sich der die betreffende Curve erzeugende Punkt von $x = a$ bis $x = b$ in einer zur Abscissenachse parallelen Geraden, oder y hat von $f(a)$ bis $f(b)$ einerlei Werth, ist somit innerhalb dieser Grenzen constant, somit keine Function von x. (§. 1. 2.)

β) Ist $\frac{dy}{dx}$ von $x = a$, $y = b$ bis $x = \alpha$, $y = \beta$ immer unendlich, so ist die Bewegungsrichtung stets parallel mit der Ordinatenachse. Dieses ist nur dann möglich, wenn einer der Punkte (a, b), (α, β) im Unendlichen liegt, die Curve also mit einer zur YAchse

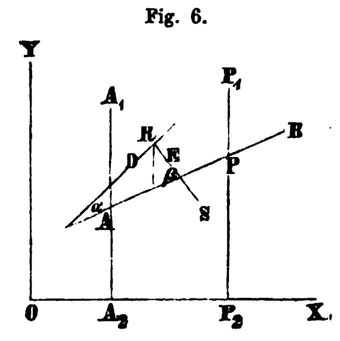
*) Wenn der Punkt an der Stelle x sprungweise seine Bewegungsrichtung ändert, fängt daselbst $\lim \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$ von dem Zeichen des Restes $x_1 - x$ ab und der Differentialquotient $\frac{df(x)}{dx}$ hat in diesem Falle zwei Werthe (vergl. Fig. 5).

Fig. 5.

Parallelen zusammenfällt, also $x = C$ und somit abermals x keine Function von y ist. Aus Vorstehendem erhellt zugleich, dass $x_1 - x$ und $y_1 - y$ bei stetigen Functionen im Allgemeinen von derselben Ordnung des unendlich Kleinen sind; denn wäre dieses nicht der Fall, so müsste innerhalb eines bestimmten Intervalles der Quotient $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ stets Null oder stets unendlich sein, also die Curve innerhalb dieses Intervalles eine mit der X- oder YAchse parallele Strecke sein.

3) Bewegt sich ein Punkt in einer continuirlichen Linie $y = f(x)$ (Fig. 6) von A nach B und ist $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ eindeutig und stetig, ferner $f'(x)$ einwerthig, ändert also der die Curve beschreibende Punkt immer stetig und niemals plötzlich seine Richtung, so bewegt er sich wenigstens ein Mal zwischen A und B parallel zur Sehne AB.

Fig. 6.



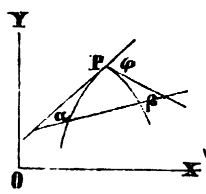
Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich leicht aus folgender Betrachtung. Im Allgemeinen wird der Punkt die Sehne AB beliebig vielmal überschreiten. Bezeichnet nun P die erste Uebergangsstelle, so muss der Bogen, welcher der Sehne AP entspricht, auf einerlei Seite von AP liegen.*) Denkt man sich nun durch jeden Punkt der continuirlichen Linie AP eine Parallele mit der YAchse bis zur Sehne AP gezogen, so können diese Ordinaten nicht beständig wachsen und nicht beständig abnehmen, sondern müssen wenigstens einmal vom Wachsen in's Abnehmen oder umgekehrt übergehen. Es sei nun R ein solcher Culminationspunkt zwischen A und P (diese Punkte ausgeschlossen), so ist die Bewegungsrichtung daselbst parallel zu AB. Denn bezeichnen D und E zwei unmittelbar zu beiden Seiten von R gelegene Punkte der Curve, α und β die Winkel, unter welchen RD und RE die Sehne AP schneiden und es würden sich nun α und β nicht der Null, sondern einer endlichen Grenze nähern, wenn

---

*) Alle Punkte der Linie über AP liegen in dem Streifen der von den Grenzor naten A_1A_2, P_1P_2 gebildet wird. Wären nun R und S zwei Punkte der Linie auf v schiedenen Seiten der Strecke AP, so müssten auch alle Punkte der Linie RS zwisch A_1A_2 und P_1P_2 liegen. Da aber der den Bogen $ARSP$ in continuirlicher Bewegung b schreibende Punkt von der einen Seite von AP auf die andere übersetzt, so muss d Uebergangsstelle, als Punkt der Linie $ARSP$ ebenfalls zwischen A_1A_2 und P_1P_2 liege und da die Uebergangsstelle auch auf der Geraden AB liegt, so ist dieselbe jedenfal auf der Strecke AP zu suchen. Die Linie $ARSP$ schneidet daher zwischen A und die Strecke AP, was gegen die Voraussetzung ist.

D und E dem Punkte R unendlich nahe rücken, so müsste die Bewegungsrichtung in R plötzlich eine Aenderung erleiden (Fig. 7), um $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle \alpha + \sphericalangle \beta$, d. h. um eine **endliche** Grösse, was der Voraussetzung, dass die Curve continuirlich verlaufe, widerspricht. Es muss somit $\lim \alpha = \lim \beta = 0$ oder die Bewegungsrichtung bei R **parallel** zu AB sein. Liegen daher n Uebergangsstellen zwischen A und B, so ist die Bewegungsrichtung wenigstens an $n+1$ Stellen parallel zur Sehne AB.

Fig. 7.



§. 10. Differentialquotient eines Bogens.

Es sei $y = f(x)$ der allgemeine Ausdruck für die Ordinate PQ (Fig. 8) einer Curve MN, x die entsprechende Abscisse OQ, so ist der Bogen AP, gezählt von dem festen Punkte A bis zum beweglichen Punkte P, eine Function von x, deren Differentialquotient nun zu ermitteln ist. Lässt man x in x_1 übergehen und bezeichnet $P_1 Q_1 = y_1$ die der Abscisse x_1 entsprechende Ordinate, so wächst der Bogen um PP_1. Man kann aber den Punkt Q_1 so nahe an Q, oder die Differenz $x_1 - x$ so klein wählen, dass der Bogen PP_1 der Abscissenachse stets die concave (Fig. 8) oder stets die convexe Seite (Fig. 9) zukehrt.

Fig. 8.

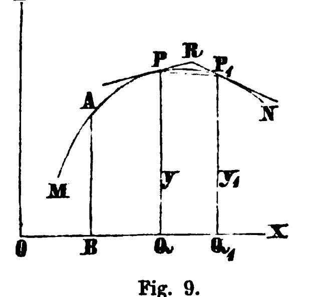
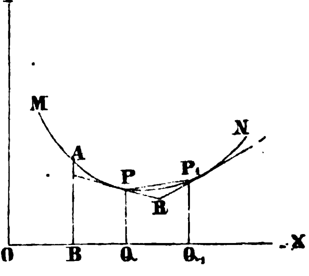


Fig. 9.



Zieht man darum in den Punkten P und P_1 die Tangenten an die Curve und bezeichnet R deren Durchschnittspunkt, so ist bekanntlich

$$PR + P_1R > \text{Bog. } PP_1 > \text{Sehne } PP_1$$

also auch

$$\frac{PR + P_1R}{QQ_1} > \frac{\text{Bog. } PP_1}{QQ_1} > \frac{\text{Sehne } PP_1}{QQ_1}$$

näher nun P_1 dem Punkte P rückt, um so mehr nähert sich der ·el PRP_1 einem gestreckten und $PR + P_1R$ der Sehne PP_1. ·enn man daher QQ_1 unendlich klein werden lässt, ist

$$\lim \frac{PR + P_1R}{QQ_1} = \lim \frac{\text{Sehne } PP_1}{QQ_1}$$

·omit auch

$$\lim \frac{PR + P_1R}{QQ_1} = \lim \frac{\text{Bog. } PP_1}{QQ_1} = \lim \frac{\text{Sehne } PP_1}{QQ_1}.$$

Bezeichnen wir nun das Bogenstück AP durch s, also AP_1 durch s_1, setzen die Abscisse $OQ = x$, $OQ_1 = x_1$, so folgt:

$$\frac{\text{Bog. } PP_1}{QQ_1} = \frac{s_1 - s}{x_1 - x}$$

$$\text{Sehne } PP_1 = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

also $$\lim \frac{s_1 - s}{x_1 - x} = \lim \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)^2}$$

oder nach §. 4. 6.

$$\lim \frac{s_1 - s}{x_1 - x} = \sqrt{1 + \left(\lim \frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)^2}$$

woraus sich unmittelbar für den Differentialquotienten des Bogens ergibt:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Wir haben bei vorstehender Entwickelung vorausgesetzt, dass s mit wachsendem x ebenfalls wachse. Nimmt s mit wachsendem x gleichzeitig ab, so wird $\frac{s_1 - s}{x_1 - x}$ also auch $\frac{ds}{dx}$ negativ und man kann darum allgemein setzen:

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

§. 11. Differentialquotient einer Fläche.

Fig. 10.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve MN (Fig. 10) in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten, so ist das zwischen irgend zwei Ordinaten liegende Flächenstück $ABQP = u$ eine Function von x. Lässt man nun $OQ = x$ in $OQ_1 = x_1$ übergehen und bezeichnet das der Abscisse x_1 entsprechende Flächenstück ABQ_1P_1 durch u_1, die Ordinate P_1Q_1 durch y_1, so hat man

$$\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{PQQ_1P_1}{QQ_1}.$$

Nun kann man aber das Bogenelement PP_1 so klein annehmen, dass die Ordinaten der von P gegen P_1 auf einander folgenden Punkte

desselben immer kleiner (Fig. 10) oder immer grösser werden (Fig. 11) oder wenn man PR und $P_1S \parallel QQ_1$ zieht, dass bezüglich

$$QQ_1P_1S \gtrless QQ_1P_1P \gtrless QQ_1RP$$

Fig. 11.

oder $(x_1 - x)\, y_1 \gtrless u_1 - u \gtrless (x_1 - x)\, y$

oder $y_1 \gtrless \dfrac{u_1 - u}{x_1 - x} \gtrless y$ wird.

Da sich nun y_1 dem y immer mehr und mehr nähert, wenn man die Differenz $x_1 - x$ der Null sich nähern lässt, so folgt allgemein für den Differentialquotienten der Fläche:

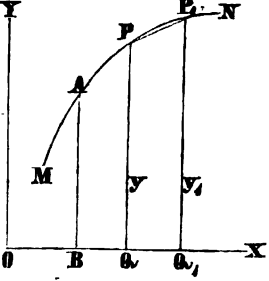
$$\frac{du}{dx} = lim\, \frac{u_1 - u}{x_1 - x} = y.$$

Der Differentialquotient einer Fläche ist somit die zur betreffenden Abscisse gehörige Grenzordinate.

§. 12. Differentialquotient der Oberfläche eines Rotationskörpers.

Es sei $y = f(x)$ die Gleichung der erzeugenden Curve MN (Fig. 12), die Abscissenachse OX die Rotationsachse, so ist die von irgend einem Curventheil AP bei der Umdrehung beschriebene krumme Fläche u eine Function der Abscisse x. Bezeichnen wir nun die den Abscissen $OQ = x$ und $OQ_1 = x_1$ entsprechenden Ordinaten PQ und P_1Q_1 durch y und y_1, die Sehne PP_1 durch s, so beschreibt diese bei der Umdrehung die Mantelfläche m eines abgekürzten Kegels und man hat:

Fig. 12.



$$m = \pi\,(y + y_1)\, s = \pi\,(y + y_1)\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}$$

oder $$\frac{m}{x_1 - x} = \pi\,(y + y_1)\sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - y}{x_1 - x}\right)^2}.$$

Je näher man nun P_1 gegen P rücken, je kleiner man also $x_1 - x$ werden lässt, um so mehr nähert sich der Bogen PP_1 der Sehne PP_1. r eine verschwindend kleine Differenz $x_1 - x$ muss y statt y_1, die Sehne statt des Bogens PP_1, somit statt der vom Curventheil PP_1 be-benen Rotationsfläche die oben erwähnte Mantelfläche, $\frac{dy}{dx}$ statt $\frac{y}{x}$ und endlich $lim\, \frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{du}{dx}$ statt des Quotienten $\frac{m}{x_1 - x}$ ge-

setzt werden. Man erhält hiernach für den fraglichen Differentialquotienten

$$\frac{du}{dx} = 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

§. 13. Differentialquotient des Inhaltes eines Rotationskörpers.

Ist wieder $y = f(x)$ die Gleichung der erzeugenden Curve MN (Fig. 12), so beschreibt bei der Umdrehung derselben um die Achse OX die Curvenfläche $APQB$ einen Rotationskörper, dessen Inhalt eine Function von x ist. Behalten wir wieder die in voriger Entwickelung angeführten Bezeichnungen bei, bedeuten aber nun u und u_1 die Inhalte der den Abscissen x und x_1 entsprechenden Rotationskörper, und wählt man das Bogenelement PP_1 so klein, dass die Ordinate y beim Uebergange in y_1 stets abnimmt oder stets wächst, so hat man bezüglich

$$(x_1 - x)\,\pi y^2 \gtrless u_1 - u \gtrless (x_1 - x)\,\pi y_1^2$$

oder

$$\pi y^2 \gtrless \frac{u_1 - u}{x_1 - x} \gtrless \pi y_1^2.$$

Mit verschwindendem $(x_1 - x)$ geht aber y_1 in y, also πy_1^2 in πy^2 über und es ist daher der Differentialquotient des Rotationskörpers oder

$$\frac{du}{dx} = lim\,\frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \pi y^2.$$

Der Differentialquotient eines Rotationskörpers ist somit der dem betreffenden x entsprechende Querschnittsinhalt.

Dieses Resultat gilt, wie auf ganz analoge Weise gezeigt werden kann, für jeden Körper, wenn man nur statt πy^2 den einem gewissen x_1 entsprechenden Querschnittsinhalt setzt.

Zweiter Abschnitt.

Differentiation entwickelter Functionen von einer unabhängig Veränderlichen.

A. Entwickelung des ersten Differentialquotienten.

§. 14. Differentialquotient einer Constanten.

Aus §. 7. 8. ergibt sich unmittelbar:

Der erste und alle folgenden Differentialquotienten einer Constanten sind Null.

§. 15. Differentialquotient einer Summe.

Ist $u, v, w, \ldots$ eine endliche Anzahl von Functionen der unabhängig Veränderlichen x und

$$y = u \pm v \pm w \pm \ldots .$$

so hat man nach Früherem:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 \pm v_1 \pm w_1 \pm \ldots . - (u \pm v \pm w \pm \ldots)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{u_1 - u}{x_1 - x} \pm \frac{v_1 - v}{x_1 - x} \pm \frac{w_1 - w}{x_1 - x} \pm \ldots$$

a... ...h §. 4. 2.

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{u_1 - u}{x_1 - x} \pm \lim \frac{v_1 - v}{x_1 - x} \pm \ldots$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots \quad \ldots . . (1)$$

d ...r Differentialquotient einer algebraischen Summe v ...nctionen einer und derselben unabhängig Veränder-

lichen ist gleich der algebraischen Summe der Differentialquotienten der einzelnen Summanden.

§. 16. Differentialquotient eines Productes.

1) Ist
$$y = Cu$$
wo C eine Constante und u eine Function von x bezeichnet, so hat man:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Cu_1 - Cu}{x_1 - x} = C\frac{u_1 - u}{x_1 - x}$$
also
$$\frac{dy}{dx} = C\frac{du}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
d. h. der constante Factor kann stets dem Differentialquotienten der Function als Coefficient voran gesetzt werden.

2) Bezeichnen u und v zwei Functionen von x und ist
$$y = uv$$
so folgt
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 v_1 - uv}{x_1 - x} = u\frac{v_1 - v}{x_1 - x} + v_1\frac{u_1 - u}{x_1 - x}.$$
Berücksichtigt man nun, dass mit $x_1 - x$ gleichzeitig auch $v_1 - v$ unendlich klein wird, also beim Uebergang zum Grenzwerthe in dem zweiten Gliede der rechten Seite der vorstehenden Gleichung v statt des Factors v_1 gesetzt werden muss, so ergibt sich:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
d. h. der Differentialquotient eines Productes ist gleich der Summe der Producte aus jedem Factor in den Differentialquotienten des anderen Factors.

3) Sind u, v, w, r mehre Functionen von x und ist
$$y = uvwr,$$
so folgt aus Obigem unmittelbar:
$$\frac{dy}{dx} = uvw\frac{dr}{dx} + uvr\frac{dw}{dx} + uwr\frac{dv}{dx} + vwr\frac{du}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
wofür man auch schreiben kann:
$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w} + \frac{r'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
Dasselbe gilt natürlich auch für mehr als vier Factoren, wie leicht durch den Schluss von n auf $n+1$ gezeigt werden kann.

Nennen wir allgemein das Verhältniss $\frac{\frac{dz}{dx}}{z}$ oder $\frac{z'}{z}$ den logarithmischen Differentialquotienten der Function z, so sagt die Gl. (4):

Der logarithmische Differentialquotient eines Productes ist gleich der Summe der logarithmischen Differentialquotienten der einzelnen Factoren.

§. 17. Differentialquotient eines Bruches.

1) Ist
$$y = \frac{u}{C},$$
so hat man §. 15, 1. unmittelbar
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{C}\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

2) Ist $y = \frac{C}{v}$,

so wird
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{C}{v_1} - \frac{C}{v}}{x_1 - x} = C\frac{v - v_1}{vv_1(x_1 - x)} = -C\frac{v_1 - v}{vv_1(x_1 - x)}$$
und hiernach, da beim Uebergang zur Grenze v statt v_1 gesetzt werden muss,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\frac{C}{v}}{dx} = -\frac{C\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
Für $C = 1$ ergibt sich somit
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\frac{1}{v}}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
und für $v = x$, also $y = \frac{1}{x}$:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

3) Ist $y = \frac{u}{v}$,

also
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{u_1}{v_1} - \frac{u}{v}}{x_1 - x} = \frac{vu_1 - v_1u}{vv_1(x_1 - x)} = \frac{1}{v_1v}\left(v\frac{u_1 - u}{x_1 - x} - u\frac{v_1 - v}{x_1 - x}\right)$$
so [illegible] durch den Uebergang zur Grenze
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$
O[illegible] ziehungen führen zu folgendem allgemeinen Schlusse:

[illegible] Differentialquotient eines Bruches wird erhalte[illegible] nn man vom Producte aus dem Nenner in den

Differentialquotienten des Zählers das Product aus dem Zähler in den Differentialquotienten des Nenners subtrahirt und die Differenz durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Schreibt man statt der Gl. (3):

$$vy = u$$

so folgt nach §. 16 (4); $\frac{v'}{v} + \frac{y'}{y} = \frac{u'}{u}$

und hieraus: $$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Diese Gleichung besagt:

Der logarithmische Differentialquotient eines Bruches ist gleich dem logarithmischen Differentialquotienten des Zählers weniger dem des Nenners.

§. 18. Differentialquotient einer Potenz.

Es sei u eine Function von x und $y = u^n$.

Erster Fall. Der Exponent n sei eine ganze positive Zahl.

Nach §. 15 (3) folgt aus

$$y = u^n = \overset{1}{u}\,\overset{2}{u}\,\overset{3}{u}\,\overset{4}{u}\ldots\overset{n}{u}$$

unmittelbar

$$\frac{dy}{dx} = \overset{1}{u^{n-1}}\frac{du}{dx} + \overset{2}{u^{n-1}}\frac{du}{dx} + \ldots + \overset{n}{u^{n-1}}\frac{du}{dx}$$

oder $$\frac{dy}{dx} = \frac{du^n}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{(u^n)'}{u^n} = n\frac{u'}{u} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Zweiter Fall. Der Exponent sei eine gebrochene positive Zahl oder $n = \frac{m}{p}$.

Aus $$y = u^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{u^m}$$

ergibt sich $$y^p = u^m$$

also nach (2) $$p\frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u}$$

und hieraus $$y' = \frac{m}{p}\,y\,\frac{u'}{u} = \frac{m}{p}\,u^{\frac{m}{p}}\,\frac{u'}{u}$$

oder
$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{p} u^{\frac{m}{p} - 1} \frac{du}{dx}$$

Dritter Fall. Der Exponent sei eine ganze oder gebrochene negative Zahl oder $n = - q$.

Aus
$$y = u^{-q} = \frac{1}{u^q}$$
ergibt sich nach §. 17 (6) und obiger Gl. (2) sofort
$$\frac{y'}{y} = - q \frac{u'}{u}; \; y' = - qy \frac{u'}{u} = - qu^{-q} \frac{u'}{u}$$
oder
$$\frac{dy}{dx} = - qu^{-q-1} \frac{du}{dx}$$

Wir erhalten hiernach für sämmtliche Fälle folgende Sätze:

Der Differentialquotient einer Potenz ist gleich dem Producte aus dem Fxponenten der ursprünglichen Function in die Potenz, wenn deren Exponent um die Einheit vermindert ist und dem Differentialquotienten der Basis;

oder:

Der logarithmische Differentialquotient einer Potenz ist gleich dem Producte aus dem Exponenten in den logarithmischen Differentialquotienten der Basis.

Zusätze.

1) Für $u = x$ oder $y = x^n$ folgt aus Obigem
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}.$$

2) Für den speciellen Fall, dass $n = \frac{1}{2}$, also $y = \sqrt{u}$ ist, erhält man
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{u}}{dx} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{du}{dx}$$
d. h. der Differentialquotient einer Quadratwurzel wird gefunden, wenn man den Differentialquotienten des Radicanden durch die doppelte Wurzel dividirt.

Für $u = x$ folgt hieraus
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Beispiele.

$$\frac{5}{c} = 5x^{5-1} = 5x^4.$$

2) $\frac{dx^{-8}}{dx} = -8x^{-8-1} = -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$.

3) $\frac{d\sqrt[3]{x^{10}}}{dx} = \frac{10}{3} x^{\frac{10}{3}-1} = \frac{10}{3} x^{\frac{7}{3}} = \frac{10}{3} \sqrt[3]{x^7}$.

4) $\frac{d(7x^4)}{dx} = 7 \frac{dx^4}{dx} = 7.\ 4\ x^3 = 28x^3$.

5) $\frac{d}{dx}(a + bx^5 - cx^{-4} + \sqrt[5]{x^2}) = 5bx^4 + 4cx^{-5} + \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = 5bx^4 + \frac{4c}{x^5} + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$.

6) Um $\frac{d}{dx}(a^3 + x^3)^6$ zu bestimmen, kann man zuerst $u = a^3 + x^3$, also $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(a^3 + x^3) = 3x^2$ setzen. Man erhält alsdann $\frac{d}{dx}(a^3 + x^3)^6 = \frac{du^6}{dx} = 6u^5 \frac{du}{dx} = 6\,(a^3 + x^3)^5\, 3x^2 = 18x^2\,(a^3 + x^3)^5$.

Es ist jedoch dem Studirenden anzurathen, hier und in ähnlichen Fällen die erwähnte Substitution nur in Gedanken vorzunehmen und unmittelbar zu setzen:

$$\frac{d}{dx}(a^3 + x^3)^6 = 6\,(a^3 + x^3)^5.\ 3x^2 = 18x^2\,(a^3 + x^3)^5.$$

7) Soll der Differentialquotient der Function $y = (5 - x^7)(7 + x^3)$ bestimmt werden, so setze man

$$u = 5 - x^7 \text{ und } v = 7 + x^3$$

also
$$\frac{du}{dx} = -7x^6 \text{ und } \frac{dv}{dx} = 3x^2.$$

Nach §. 16 erhält man alsdann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} = (5 - x^7)\ 3x^2 - (7 + x^3)\ 7x^6 = 15x^2 - 49x^6 - 10x^9.$$

Bei einiger Uebung kann man jedoch auch hier die Einführung der Functionen u und v umgehen und unmittelbar das Ergebniss von

$$(5 - x^7)\frac{d}{dx}(7 + x^3) + (7 + x^3)\frac{d}{dx}(5 - x^7)$$

niederschreiben.

8) Um den Differentialquotienten von $y = \frac{4 + 5x^2}{5 - 3x^5}$ zu bestimmen, entwickle man nach §. 17

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5 - 3x^5)\frac{d}{dx}(4 + 5x^2) - (4 + 5x^2)\frac{d}{dx}(5 - 3x^5)}{(5 - 3x^5)^2}$$

Man erhält alsdann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(5 - 3x^5)\ 10x + (4 + 5x^2)\ 15x^4}{(5 - 3x^5)^2} = \frac{50x + 60x^4 + 45}{(5 - 3x^5)^2}$$

9) Ist
$$y = x^2 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}},$$
so folgt
$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{dx^2}{dx} \text{ (§. 16.)}$$
$$= \frac{x^2}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot 2x \text{ (§. 18 Zus. 1)}$$
$$= \frac{x^2}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}} \cdot \frac{(x^2-1)\,2x-(x^2+1)\,2x}{(x^2-1)^2} + 2x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \text{ (§.17)}$$
$$= \frac{-2x^3}{(x^2-1)\sqrt{x^4-1}} + 2x\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \frac{2x\,(x^4-x^2-1)}{(x^2-1)\sqrt{x^4-1}}.$$

§. 19. Differentialquotient einer Exponentialgrösse.

Erster Fall. Es sei $y = a^x$

so ist
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x_1}-a^x}{x_1-x} = \frac{a^x\,(a^{x_1-x}-1)}{x_1-x}.$$

Setzt man hierin
$$a^{x_1-x} = 1 + \frac{1}{\alpha},$$
wo α mit abnehmender Differenz $x_1 - x$ in's Unendliche wächst, so erhält man hieraus durch Logarithmiren nach einem beliebigen Systeme:
$$(x_1 - x)\, log\ a = log\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$
und hiernach
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x \cdot \frac{1}{\alpha}}{x_1-x} = a^x \frac{\frac{1}{\alpha}\, log\ a}{log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)} = a^x \frac{log\ a}{log\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha}.$$

Je grösser man aber hierin α werden lässt, um so mehr nähert sich nach Beisp. 1 der Werth $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha$ der Grenze e. Durch den Ueber- um Grenzwerthe erhält man somit
$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = \frac{a^x\ log\ a}{log\ e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = a^x\ la \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Setzen wir e statt a, so folgt hieraus unmittelbar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x \quad \ldots \ldots \quad (2a).$$

Für ein Logarithmensystem von der Basis a ist nach (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = \frac{a^x}{\overset{(a)}{log}\ e} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Zweiter Fall. Ist allgemein

$$y = a^u$$

wo u eine Function von x bedeutet, so hat man nach §. 8

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^u}{du} \frac{du}{dx}$$

oder da nach (1)

$$\frac{da^u}{du} = \frac{a^u \log a}{\log e}$$

ist, für ein künstliches System:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^u}{dx} = \frac{a^u \log a}{\log e} \frac{du}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

und für das natürliche System:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^u}{dx} = a^u\, la\, \frac{du}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Ist a die Basis des Systems, so wird nach (4)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da^u}{dx} = \frac{a^u}{\log^{(a)} e} \frac{du}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

für

$$y = e^u$$

folgt aus (5) unmittelbar

$$\frac{dy}{dx} = \frac{de^u}{dx} = e^u \frac{du}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Beispiele.

1) Ist $y = a^{5x}$, so folgt nach (5), wenn man $5x = u$ setzt,

$$\frac{dy}{dx} = a^{5x}\, la\, \frac{d(5x)}{dx} = 5a^{5x}\, la$$

2) Ist $y = a^{3x^4}$, so erhält man, wenn $3x^4$ als u angesehen wird,

$$\frac{dy}{dx} = a^{3x^4}\, la\, \frac{d3x^4}{dx} = 12a^{3x^4}\, x^3\, la.$$

3) $y = a^{\sqrt{x}}$;

$$\frac{dy}{dx} = a^{\sqrt{x}}\, la\, \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{a^{\sqrt{x}}\, la}{2\sqrt{x}}.$$

4) $y = x^n\, n^x$;

$$\frac{dy}{dx} = x^n \frac{dn^x}{dx} + n \frac{dx^n}{dx} \text{ (§. 16. 2.)}$$

$$= n^x\, x^n\, ln + n\,.\, n^x\, x^{n-1} = n^x\, x^{n-1}\,(xln + n).$$

5) $y = a^{m^x};$

$$\frac{dy}{dx} = a^{m^x}\, la\, \frac{dm^x}{dx} = a^{m^x}\, m^x\, la\, lm.$$

6) $y = \sqrt[m]{a^{nx}} = a^{\frac{nx}{m}};$

$$\frac{dy}{dx} = a^{\frac{nx}{m}}\, la\, \frac{d\frac{nx}{m}}{dx} = \frac{na^{\frac{nx}{m}}\, la}{m} = \frac{n\, la\, \sqrt[m]{a^{nx}}}{m}$$

7) $y = \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{x^3};$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 \frac{de^{\sqrt[3]{x}}}{dx} - e^{\sqrt[3]{x}} \frac{dx^3}{dx}}{x^6} \quad (\S\ 17)$$

$$= \frac{x^3 e^{\sqrt[3]{x}} \frac{d\sqrt[3]{x}}{dx} - 3x^2\, e^{\sqrt[3]{x}}}{x^6} = \frac{\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\; e^{\sqrt[3]{x}} - 3e^{\sqrt[3]{x}}}{x^4}$$

$$= \frac{(x^{\frac{1}{3}} - 9)\, e^{\sqrt[3]{x}}}{3x^4}.$$

§. 20. Differentialquotient einer logarithmischen Grösse.

Erster Fall. Es sei $y = log^{(a)}x$,

so ist $a^y = x$

also $\frac{da^y}{dx} = 1$

oder nach §. 19 (5) $a^y\, la\, \frac{dy}{dx} = 1,$

woraus folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y\, la}$

oder
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,log^{(a)}x}{dx} = \frac{1}{x\, la} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Setzt man hierin $la = \frac{1}{log^{(a)}e}$ *) so bekommt man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,log^{(a)}x}{dx} = \frac{1}{x}\, log^{(a)}e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

al[illegible]ngrundelegung des natürlichen Systems

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dlx}{dx} = \frac{1}{x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

---

*) [illegible]t $a = e^z$, so ist $la = z$, $log^{(a)}a = z\, log^{(a)}e = 1$, also $la = \frac{1}{log^{(a)}e}$.

Zweiter Fall. Ist allgemein u eine Function von x und

$$y = log^{(a)}u$$

so folgt nach §. 8

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dlog^{(a)}u}{dx} = \frac{dlog^{(a)}u}{du}\frac{du}{dx}$$

oder da nach (1) $\frac{d\,log^{(a)}u}{du} = \frac{1}{u\,la}$

ist, auch

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,log^{(a)}u}{dx} = \frac{1}{u\,la}\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

oder, wenn man wieder $la = \frac{1}{log^{(a)}e}$ setzt,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,log^{(a)}u}{dx} = \frac{log^{(a)}e}{u}\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für natürliche Logarithmen fliesst hieraus unmittelbar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dlu}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

d. h. der Differentialquotient des natürlichen Log. einer Function ist gleich dem logarithmischen Differentialquotienten dieser Function.

Beispiele.

1) Ist $y = l^4x$ *)

so erhält man nach (6), wenn man $lx = u$, $l^4x = u^4$ setzt,

$$\frac{dy}{dx} = 4l^3x\frac{dlx}{dx} = \frac{4l^3x}{x}.$$

2) Es sei $y = llx.$

Sieht man hierin lx als u an, so folgt nach (6)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{lx}\cdot\frac{dlx}{dx} = \frac{1}{lx}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{xlx}.$$

3) Aus $y = l\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

folgt nach (6), wenn man $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ als u ansieht,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= \frac{x+1}{2(x-1)}\cdot\frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2-1}.$$

---

*) Hier steht l^4x statt $(lx)^4$ und ist wohl von lx^4 zu unterscheiden.

Anmerk. Berücksichtigt man, dass

$$l\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1}{2}\,[l\,(x-1) - l\,(x+1)]$$

ist, so kann vorstehende Aufgabe auch auf kürzere Weise gelöst werden. Denn man findet dann sofort

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{x^2-1}.$$

§. 21. Differentialquotient von sin x und sin u.

Erster Fall. Ist $y = \sin x$, wo x den veränderlichen Bogen bezeichnet (E. T. §. 18), so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(x_1 + x)\sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)} \quad \text{[E. T. §. 17 (6)]}$$

$$= \cos \tfrac{1}{2}(x_1 + x)\,\frac{\sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)}.$$

Wird nun $x_1 - x$ unendlich klein, so geht nach §. 5 (2) $\frac{\sin \frac{1}{2}(x_1 - x)}{\frac{1}{2}(x_1 - x)}$ in 1 und $x_1 + x$ in $2x$ über. Man hat daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Zweiter Fall. Ist allgemein u eine beliebige Function von x und $y = \sin u$, so hat man nach §. 8:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin u}{dx} = \frac{d\sin u}{du}\,\frac{du}{dx}$$

oder nach (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin u}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Beispiele.

1) Soll $y = \sin(a + bx^2)$ differenzirt werden, so denke man sich in (2) $a + bx^2$ statt u gesetzt. Man erhält alsdann:

$$= \cos(a + bx^2)\,\frac{d}{dx}(a + bx^2) = 2bx\cos(a + bx^2).$$

$$= a\sin^n x;$$

$$= a\,\frac{d\sin^n x}{dx} = a\,n\sin^{n-1}x\,\frac{d\sin x}{dx} = a\,n\sin^{n-1}x\cos x \;[\text{§.18.(1)}].$$

$$= a^x \sin lx;$$

$$= a^x\,\frac{d\sin lx}{dx} + \sin lx\,\frac{da^x}{dx} \quad (\text{§. 16}).$$

$$= a^x \cos lx \frac{dlx}{dx} + \sin lx \, a^x \, la$$

$$= \frac{a^x \cos lx}{x} + a^x \, la \sin lx$$

$$= a^x \left(\frac{\cos lx}{x} + la \sin lx\right)$$

§. 22. Differentialquotient von cos x und cos u.

Erster Fall. Es sei $y = \cos x.$

Setzt man
$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

so wird
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = \frac{d\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx}$$

also nach §. 21 (2):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{dx} = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

oder
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Zweiter Fall. Ist allgemein $y = \cos u$

so folgt nach §. 8:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos u}{dx} = \frac{d\cos u}{du} \frac{du}{dx}$$

oder nach (1)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Beispiele.

1) $y = \cos mx;$

Setzt man in (2) mx statt u, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin mx \frac{dmx}{dx} = -m \sin mx.$$

2) $y = \cos 4x \sin 3x;$

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \frac{d\sin 3x}{dx} + \sin 3x \frac{d\cos 4x}{dx} \quad (§. 16)$$

$$= \cos 4x \cos 3x \frac{d\,3x}{dx} - \sin 3x \sin 4x \frac{d\,4x}{dx}$$

$$= 3 \cos 3x \cos 4x - 4 \sin 3x \sin 4x.$$

3) $y = (\sin a)^{\cos x};$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin a)^{\cos x} \, l\sin a \frac{d\cos x}{dx} \quad [§. 19 (5)]$$

$$= -\sin x \, (\sin a)^{\cos x} \, l\sin a.$$

4) $y = \cos(\sqrt{a - bx^2})$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sqrt{a - bx^2})\,\frac{d}{dx}\sqrt{a - bx^2}$$

$$= -\sin(\sqrt{a - bx^2})\,\frac{1}{2\sqrt{a - bx^2}}\,.\,-2bx$$

$$= \frac{bx\sin(\sqrt{a - bx^2})}{\sqrt{a - bx^2}}$$

§. 23. Differentialquotient von tg u.

Aus
$$y = tg\,u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

folgt nach §. 17 unmittelbar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos u\,\frac{d\sin u}{dx} - \sin u\,\frac{d\cos u}{dx}}{\cos^2 u} = \frac{\cos u\,\cos u\,\frac{du}{dx} + \sin u\,\sin u\,\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

$$= \frac{(\cos^2 u + \sin^2 u)\,\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$$

oder da $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,tg\,u}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u}\,\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Für $u = x$, also $\frac{du}{dx} = 1$ ergibt sich aus (1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Beispiele.

1) $y = a\,tg\,bx$;

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{d\,tg\,bx}{dx} = \frac{a}{\cos^2 bx}\cdot\frac{d\,bx}{dx} = \frac{ab}{\cos^2 bx}.$$

2) $y = tg\sin ax$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2\sin ax}\cdot\frac{d\sin ax}{dx} = \frac{a\cos ax}{\cos^2\sin ax}.$$

$y = \frac{1}{3}\,tg^3 x + \frac{1}{2}\,tg^2 x + l\,tg\,x$;

$$\frac{dy}{dx} = tg^2 x\,\frac{d\,tg x}{dx} + tg\,x\,\frac{d\,tg\,x}{dx} + \frac{1}{tg\,x}\,\frac{d\,tg x}{dx}$$

$$= \left(tg^2 x + tg\,x + \frac{1}{tg\,x}\right)\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \left(tg^2 x + \frac{2}{\sin 2x}\right)\frac{1}{\cos^2 x}$$ [E. T. §. 6 (11)].

§. 24. Differentialquotient von cot u.

Aus
$$y = cot\, u = \frac{cos\, u}{sin\, u}$$
folgt auf analoge Weise wie in §. 23:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\, cot\, u}{dx} = -\frac{1}{sin^2 u}\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
Für $u = x$ wird nach (1):
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\, cot\, x}{dx} = -\frac{1}{sin^2 x} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Beispiele.

1) $y = cot\, ax$;
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin^2 ax}\frac{d\,ax}{dx} = -\frac{a}{sin^2 ax}.$$
2) $y = cot\, l\,tg x$;
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin^2 l\,tg x}\frac{dl\,tg x}{dx} = -\frac{\frac{1}{cos^2 x}}{tg x\, sin^2 l\,tg x} = -\frac{2}{sin\, 2x\, sin^2 l\, tg\, x}.$$

Anmerk. Will man die im Allgemeinen überflüssigen Functionen *sec u* und *cosec u* berücksichtigen, so findet man auf analoge Weise wie oben:
$$\frac{d\,sec\,u}{dx} = \frac{d\,sec\,u}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\frac{1}{cos\,u}\frac{du}{dx} = \frac{sin\,u}{cos^2 u}\frac{du}{dx};$$
$$\frac{d\,cosec\,u}{dx} = \frac{d\,cosec\,u}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\frac{1}{sin\,u}\frac{du}{dx} = -\frac{cos\,u}{sin^2 u}\frac{du}{dx}.$$

§. 25. Differentialquotient von arc sin u.*)

Aus
$$y = arc\, sin\, u$$
folgt
$$sin\, y = u,$$
also nach §. 21 (2)
$$cos\, y\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$
und hiernach
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos\, y}\frac{du}{dx}$$
oder da $cos\, y = \sqrt{1 - sin^2 y} = \sqrt{1-u^2}$,
auch
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,arc\,sin\,u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots (1)$$

Setzt man in (1) $u = x$, also $\frac{du}{dx} = 1$, so folgt:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,arc\,sin\,x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots\ldots$$

*) Wir nehmen stets an, dass der Bogen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, also $cos\, y$ positiv sei. Man hat alsdann $arc\, sin\,(-u) = -\,arc\, sin\, u$.

Beispiele.

1) Um $y = arc\ sin \sqrt{1-x^2}$
zu differenziren, setze man in obiger Gl. (1)

$$u = \sqrt{1-x^2},\ u^2 = 1 - x^2$$

also nach §. 18 Zus. 2

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Anmerk. Bei einiger Uebung kann man die Substitution von u umgehen und das Resultat unmittelbar anschreiben.

2) $y = arc\ sin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \sqrt{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

3) $y = arc\ sin\ l\, sin x$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-l^2 sin\, x}} \cdot \frac{dl\, sin\, x}{dx} = \frac{cos\, x}{sin\, x\sqrt{1-l^2 sin\, x}} = \frac{cot\, x}{\sqrt{1-l^2 sin\, x}}.$$

§. 26. Differentialquotient von arc cos u.*)

Aus $y = arc\ cos\ u$

folgt $cos\, y = u$,

also nach §. 22 (2): $-sin\ y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$

und hieraus $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{sin\ y}\frac{du}{dx}$

oder
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\, arc\ cos\ u}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Für $u = x$ erhält man aus (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\, arc\ cos\ x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

.k. Zu dem Resultate (1) gelangt man auch, indem man $arc\ cos\ u = \frac{\pi}{2} - arc\ sin\ u$

*) Der Bogen wird immer zwischen 0 und π genommen, $sin\ y$ also stets als positiv

Beispiele.

1) $y = arc\cos lx$;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - l^2x}} \frac{dlx}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1 - l^2x}}.$$

2) $y = arc\cos x^4$;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^8}} \frac{dx^4}{dx} = -\frac{4x^3}{\sqrt{1 - x^8}}.$$

3) $y = arc\cos(5 - 3x^2 + 4x^4)$;

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - (5 - 3x^2 + 4x^4)^2}} \frac{d}{dx}(5 - 3x^2 + 4x^4)$$

$$= \frac{6x - 16x^3}{\sqrt{1 - (5 - 3x^2 + 4x^4)^2}}.$$

§. 27. Differentialquotient von arc tg u.*)

Aus
$$y = arc\,tg\,u$$
folgt
$$tg\,y = u,$$
also ist nach §. 23 (1)
$$\frac{1}{\cos^2 y} \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$
und hiernach
$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y \frac{du}{dx}$$
oder nach E. T. §. 6 (11)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + tg^2 y} \frac{du}{dx}$$
oder
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,arc\,tg\,u}{dx} = \frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$
Für $u = x$ folgt aus (1):
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,arc\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Beispiele.

1) $y = arc\,tg\sqrt{x}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x} \frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2(1 + x)\sqrt{x}}.$$

2) $y = arc\,tg\frac{x^2}{lx}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{lx}\right)^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{lx}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{lx}\right)^2} \cdot \frac{lx \cdot 2x - x}{l^2x}$$

$$= \frac{2x\,lx - x}{l^2x + x^4} = \frac{x(2lx - 1)}{l^2x + x^4}.$$

---

* Der Bogen ist immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen, damit y eine einwerthi Function von u ist.

§. 28. Differentialquotient von arc cot u.*)

Aus
$$y = arc\ cot\ u = arc\ tg\ \frac{1}{u}$$
folgt nach §. 27:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ arc\ tg\ \frac{1}{u} = \frac{1}{1 + \frac{1}{u^2}}\ \frac{d\frac{1}{u}}{dx}$$
oder
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,arc\ cot\,u}{dx} = -\frac{1}{1 + u^2}\ \frac{du}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
Für $u = x$ folgt aus (1)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,arc\,cot\,x}{dx} = -\frac{1}{1 + x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Anmerk. Um die Gl. (1) zu erhalten, kann man auch $arc\,cot\,u = \frac{\pi}{2} - arc\,tg\,u$ setzen.

Beispiele.

1) $y = arc\ cot\ a^{3x}$;
$$\frac{dy}{ax} = -\frac{1}{1 + a^{6x}}\ \frac{d\,a^{3x}}{dx} = -\frac{3a^{3x}\,la}{1 + a^{6x}}.$$
2) $y = \frac{1}{n}\ arc\,cot\,x^n$;
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{n\,(1 + x^{2n})}\ \frac{dx^n}{dx} = -\frac{x^{n-1}}{1 + x^{2n}}.$$
3) $y = arc\,cot\,\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$;
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1 + \frac{1 - x^2}{x^2}}\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Anmerk. Analog erhält man noch, wenn $u = sec\,y = \frac{1}{cos\,y}$, also $y = arc\,sec\,u$; $\frac{du}{dx} = \frac{sin\,y}{cos^2 y}\,\frac{dy}{dx}$ ist:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 y}{sin\,y}\,\frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{u^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{u^2}}}\,\frac{du}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\,\frac{du}{dx}$$
und hiernach, wenn $y = arc\,cosec\,u$ ist,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - arc\,sec\,u\right) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\,\frac{du}{dx}.$$

---

*) Der Bogen soll stets zwischen 0 und π liegen.

§. 29. Differentialquotient von u^v.

Sind allgemein u und v Functionen der unabhängig Veränderlichen x und ist

$$y = u^v,$$

so folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1^{v} - u^v}{x_1 - x} = \frac{u_1^{v_1} - u_1^{v}}{x_1 - x} + \frac{u_1^{v} - u^v}{x_1 - x}.$$

und hieraus

$$\frac{dy}{dx} = lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim \frac{u_1^{v_1} - u_1^{v}}{x_1 - x} + lim \frac{u_1^{v} - u^v}{x_1 - x}.$$

Berücksichtigt man nun, dass nach §. 19 $lim \frac{u_1^{v_1} - u_1^{v}}{x_1 - x}$ der Differentialquotient von u_1^v oder auch, wegen der unendlich kleinen Differenz $u_1 - u$, von u^v nach x ist, wenn man u als constant, und v als Function der unabhängig Veränderlichen x, dagegen nach §. 18 $lim \frac{u_1^{v} - u^v}{x_1 - x}$ der von u^v ist, wenn man v als constant und u als Function von x ansieht; also

$$lim \frac{u_1^{v_1} - u_1^{v}}{x_1 - x} = u^v lu \frac{dv}{dx}$$

und

$$lim \frac{u_1^{v} - u^v}{x_1 - x} = v u^{v-1},$$

so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du^v}{dx} = u^v lu \frac{dv}{dx} + v u^{v-1} \frac{du}{dx} = u^{v-1} \left(u lu \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}\right) \quad . . . (1)$$

Für den speciellen Fall, dass $u = v = x$ ist, folgt aus Vorstehendem:

$$\frac{dx^x}{dx} = x^{x-1}(x lx + x) = x^x (lx + 1) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Anmerk. Zu der Gl. (1) gelangt man auch auf folgende Weise:

Aus $y = u^v$

folgt $ly = v lu$

also nach §. 16 $\frac{d ly}{dx} = v \frac{d lu}{dx} + lu \frac{dv}{dx}$

oder nach §. 20 (6)

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \frac{du}{dx} + lu \frac{dv}{dx}$$

und hieraus wieder $\frac{dy}{dx} = u^{v-1}\left(v \frac{du}{dx} + u lu \frac{dv}{dx}\right)$.

Beispiele.

1) Ist $y = x^{2x}$

und man setzt in (1) $u = x$, $v = 2x$, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = x^{2x-1}(2x lx + 2x) = 2x^{2x}(lx + 1).$$

2) $y = \sin x^{\cos x}$;

$$\frac{dy}{dx} = \sin x^{\cos x - 1}\left[\sin x\, l\sin x\, \frac{d\cos x}{dx} + \cos x\, \frac{d\sin x}{dx}\right]$$
$$= \sin x^{\cos x - 1}\left[- \sin^2 x\, l\sin x + \cos^2 x\right].$$

3) $y = x^{lx}$;

$$\frac{dy}{dx} = x^{lx-1}\left(x\, lx\, \frac{d\, lx}{dx} + lx\right) = x^{lx-1}(lx + lx) = 2x^{lx-1}\, lx.$$

Anmerk. Zum Schlusse dieser Betrachtungen wollen wir noch auf einige Beziehungen, welche zwischen einer gegebenen Reihe und der durch Differentiation derselben abgeleiteten Reihe bestehen, so wie auf die Bestimmung der gleichen Wurzeln einer Gleichung aufmerksam machen.

1) Convergirt eine Reihe von der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \ldots \quad (1)$$

für $-g < x < +g$, so convergirt innerhalb derselben Grenzen auch die Reihe, welche die Differentialquotienten der auf einander folgenden Glieder bilden, d. i. die Reihe

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots \ldots \quad (2)$$

Denn es ist die Convergenzbedingung für (1):

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{a_{n+1}\, x^{n+1}}{a_n\, x^n} < 1 \text{ oder } x < \lim \frac{a_n}{a_{n+1}},$$

und für (2):

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{(n+1)\, a_{n+1}\, x^n}{n\, a_n\, x^{n-1}} < 1 \text{ oder } x < \lim \frac{n}{n+1} \cdot \lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

oder da $\lim \frac{n}{n+1} = 1$, auch $x < \lim \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Für beide Reihen gelten somit dieselben Convergenzbedingungen und die Convergenz der ersten zieht somit auch die der zweiten nach sich.

2) Besteht die Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \ldots \quad (3)$$

für alle Werthe von x, welche zwischen $-g$ und $+g$ liegen, so hat auch die Gleichung

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots \ldots \quad (4)$$

für alle Werthe von $x = -g$ bis $x = +g$ Giltigkeit, wobei die Grenzen $-g$ und $+g$ selbst eingeschlossen sind, im Falle beide Reihen an diesen Grenzen noch convergiren.

Setzen wir, um die Richtigkeit dieses Satzes nachzuweisen, zunächst voraus, es seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sowie x positiv und bezeichnen durch h eine positive Grösse, so beschaffen, dass x und $x + h$ stets innerhalb der Grenzen $-g$ und $+g$ liegen, so ist

$$f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + a_2(x+h)^2 + \ldots$$

also

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a_1 \frac{(x+h) - x}{(x+h) - x} + a_2 \frac{(x+h)^2 - x^2}{(x+h) - x} + \ldots$$

wo die Reihe rechter Hand nach §. 6. 10 convergirt.

Hieraus folgt, weil $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} < n(x+h)^{n-1}$ aber $> nx^{n-1}$ *),

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} < a_1 + 2a_2(x+h) + 3a_3(x+h)^2 + \ldots$$
$$> a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

..eihen rechter Hand nach 1. convergiren.

Denn ist $x_1 > x$ und sind x_1 und x positiv, so folgt aus der identischen ..ung

$$x_1^n - x^n = (x_1 - x)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2} x + x_1^{n-3} x^2 + \ldots + x^{n-1})$$

..lbar $\frac{x_1^n - x^n}{x_1 - x} < n x_1^{n-1}$ aber $> n x^{n-1}$.

..tzt man nun $x_1 = x + h$, so resultirt obige Beziehung.

Setzt man daher

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots = \varphi(x)$$

so folgt

$$\varphi(x) < \frac{f(x+h) - f(x)}{h} < \varphi(x+h)$$

Ist h negativ, also $x + h < x$, so wird $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} > n(x+h)^{n-1}$ aber $< nx^{n-1}$, also $\varphi(x) > \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > \varphi(x+h)$, woraus hervorgeht, dass in beiden Fällen für unendlich klein werdende h

$$\varphi(x) = f'(x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

wird, weil $\varphi(x)$ und $f(x)$ stetig sind (§. 6. 12).

Convergiren beide Reihen noch für $x = +g$, so ist h negativ zu nehmen, damit man das Convergenzintervall nicht überschreitet.

Sind die Glieder der Reihe (3) theils positiv, theils negativ, und verdankt dieselbe ihre Convergenz nicht dem Zeichenwechsel, sondern den zwei Bedingungen

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \text{ und } \lim a_n = 0,$$

so kann man doch stets x als positiv voraussetzen.*) Denkt man sich nun alle positiven Glieder zur Summe $\chi(x)$, alle negativen zur Summe $\psi(x)$ vereinigt, so ist

$$f(x) = \chi(x) - \psi(x),$$

wo nun durch $\chi(x)$ und $\psi(x)$ nach §. 6. 11. convergirende Reihen ausgedrückt werden. Setzt man entsprechend

$$\varphi(x) = \chi_1(x) - \psi_1(x),$$

wo $\chi_1(x)$ die Summe aller positiven Differentialquotienten, $\psi_1(x)$ die aller negativen andeutet, so ist nach (5)

$$\chi_1(x) = \frac{d}{dx}\chi(x); \quad \psi_1(x) = \frac{d}{dx}\psi(x)$$

also

$$\chi_1(x) - \psi_1(x) = \frac{d}{dx}[\chi(x) - \psi(x)] = \frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

oder

$$\varphi(x) = f'(x)$$

Obiger Satz gilt somit allgemein.

3) Enthält eine algebraische Gleichung $f(x) = 0$, α mal die Wurzel a, βmal die Wurzel b u. s. w., so ist bekanntlich

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots$$

also

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha (x-a)^{\alpha-1} (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots \\ &+ \beta (x-a)^\alpha (x-b)^{\beta-1} (x-c)^\gamma \ldots \\ &+ \gamma (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^{\gamma-1} \ldots \\ &+ \ldots \\ &= (x-a)^{\alpha-1} (x-b)^{\beta-1} \ldots [\alpha (x-b)(x-c) \ldots \\ &+ \beta (x-a)(x-c) \ldots + \gamma (x-a)(x-b(x-d) + \ldots] \end{aligned}$$

woraus hervorgeht, dass $f(x)$ und $f'(x)$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler $(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1}(x-c)^{\gamma-1} \ldots$ haben.

Ist daher $f(x) = 0$ eine gegebene Gleichung mit gleichen Wurzeln und man entwickelt hieraus $f'(x)$, bestimmt dann zu $f(x)$ und $f'(x)$ den grössten gemeinschaftlichen Theiler, so lassen sich hieraus die gleichen Wurzeln erkennen.

Ist z. B.

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$$

also

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$

so findet man $x - 1$ als grössten gemeinschaftlichen Theiler und die Gleichung hat demnach zweimal die Wurzel 1.

---

*) Denn ist x negativ, so kann man das negative Zeichen mit den Coefficienten vereinigen.

§. 30. Zusammenstellung der Differentialquotienten der einfachsten entwickelten Functionen.

1) $\frac{d\,(u \pm v \pm w \pm \ldots)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \ldots$

2) $\frac{d\,(u \pm C)}{dx} = \frac{du}{dx}$

3) $\frac{d\,uv}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}.$

4) $\frac{d\,Cu}{dx} = C\,\frac{du}{dx}.$

5) $\frac{d\,uvwr}{dx} = uvw\,\frac{dr}{dx} + uvr\,\frac{dw}{dx} + uwr\,\frac{dv}{dx} + vwr\,\frac{du}{dx}.$

6) $\frac{d\,u^n}{dx} = n\,u^{n-1}\,\frac{du}{dx}.$

α) $\frac{dx^n}{dx} = n\,x^{n-1}.$

β) $\frac{d\sqrt{u}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,\frac{du}{dx}.$

γ) $\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

7) $\frac{d\,\frac{u}{v}}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2.}.$

8) $\frac{d\,a^u}{dx} = a^u\,l\,a\,\frac{du}{dx}.$

α) $\frac{d\,e^u}{dx} = e^u\,\frac{du}{dx}.$

β) $\frac{d\,e^x}{dx} = e^x.$

9) $\frac{d\log u}{dx} = \frac{\log u}{u}\,\frac{du}{dx}.$

α) $\frac{d\,l\,u}{dx} = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}.$

β) $\frac{d\,l\,x}{dx} = \frac{1}{x}.$

0) $\frac{d\sin u}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}.$

α) $\frac{d\sin x}{dx} = \cos x.$

11) $\frac{d\cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}.$

$\alpha)$ $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x.$

12) $\frac{d\,tg\,u}{dx} = \frac{1}{\cos^2 u}\,\frac{du}{dx}.$

$\alpha)$ $\frac{d\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

13) $\frac{d\cot u}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 u}\,\frac{du}{dx}.$

$\alpha)$ $\frac{d\cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$

14) $\frac{d\arcsin u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{du}{dx}.$

$\alpha)$ $\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

15) $\frac{d\arccos u}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{du}{dx}.$

$\alpha)$ $\frac{d\arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

16) $\frac{d\,arc\,tg\,u}{dx} = \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{dx}.$

$\alpha)$ $\frac{d\,arc\,tg\,x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$

17) $\frac{d\,arc\cot u}{dx} = -\frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{dx}.$

$\alpha)$ $\frac{d\,arc\cot x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$

§. 31. Aufgaben zur Uebung.

1) $y = a + bx + cx^2 + dx^3;$

Aufl. $\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3dx^2.$

2) $y = \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 + 4x^4 - 3x^2 + x + 1;$

Aufl. $\frac{dy}{dx} = x^6 - x^7 + 16x^3 - 6x + 1.$

3) $y = 6 + 5\sqrt[3]{x^2} - 8\sqrt[5]{x^3};$

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{24}{5\sqrt[5]{x^2}}.$

4) $y = 5 - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x\sqrt[3]{x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{8}{x^2\sqrt[3]{x}}$.

5) $y = (x^2 + 3x - 5)(2x^2 - x - 1)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 15x^2 - 28x + 2$.

6) $y = \frac{5 + x}{5 - x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{10}{(5 - x)^2}$.

7) $y = \frac{x^2}{x^5 + x + 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^6 - x^2 - 2x}{(x^5 + x + 1)^2}$.

8) $y = \frac{4x + 1}{x^3 - 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{8x^3 + 3x^2 + 4}{(x^3 - 1)^2}$.

9) $y = \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 3}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^2 + 14x + 15}{(x^2 - 3)^2}$.

10) $y = \frac{x^3 + x^2 - 7x - 5}{2x^2 - 3x + 2}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^4 - 6x^3 + 17x^2 + 24x - 29}{(2x^2 - 3x + 2)^2}$.

11) $y = (3 + 4x^2)^4$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 32x(3 + 4x^2)^3$.

12) $y = (x + 1)^2(2x - 3)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2x - 4$.

3) $y = (x - 1)^2(x - 3)^3$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 44x^3 + 138x^2 - 180x + 81$.

14) $y = \sqrt{5x^3 + 8x^2 + x - 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{15x^2 + 16x + 1}{2\sqrt{5x^3 + 8x^2 + x - 1}}$.

15) $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$.

16) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 + 1}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1 - x^2)}{2\,(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}}$.

17) $y = x\sqrt{7x + 3}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{21x + 6}{2\sqrt{7x + 3}}$.

18) $y = x^2\sqrt{x^2 + 1}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^3 + 2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

19) $y = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,(x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^{\frac{3}{2}}}$.

20) $y = x^3\sqrt{x} + x^3\sqrt[3]{x} + x\sqrt[4]{x^3}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{7}{2}\,x^{\frac{5}{2}} + \dfrac{10}{3}\,x^{\frac{7}{3}} + \dfrac{7}{4}\,x^{\frac{3}{4}}$.

21) $y = \sqrt[3]{x^2\,(a - b\,x)}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2ax - 3bx^2}{3\sqrt[3]{(ax^2 - bx^3)^2}}$.

22) $y = (4 + 3x)\sqrt{5x - 2}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{45x + 8}{2\sqrt{5x - 2}}$.

23) $y = \dfrac{\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a\,(a + \sqrt{a^2 - x^2})}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Andeutung. Mache den Nenner rational.

24) $y = \sqrt{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}{4\sqrt{1 - x^2}\,.\,\sqrt{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}}$.

25) $y = a^{mx+n}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = ma^{mx+n}\, la.$

26) $y = a^{x^n}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}\, a^{x^n}\, la.$

27) $y = a^{n^x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = a^{n^x}\, n^x\, la\, ln.$

28) $y = a^{x^2+lx}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \left(2x + \frac{1}{x}\right) a^{x^2+lx}\, la.$

29) $y = \sqrt{a^x\, x^a}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{(a + x\, l\, a)\sqrt{a^x\, x^a}}{2x}.$

30) $y = e^{ax^3}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 3\, a e^{ax^3}\, x^2.$

31) $y = a^{a^{a^x}}\, e^{e^{e^x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = e^{e^{e^x}} (a^{a^{a^x}}\, e^{e^x}\, e^x + a^{a^{a^x}}\, a^{a^x}\, a^x\, l^3 a).$

32) $y = l\,(3x^2 - 5)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 - 5}.$

33) $y = (1 + x)\, l\,(1 + x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 1 + l\,(1 + x).$

34) $y = l\sqrt{4x^3 - 7}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{4x^3 - 7}.$

35) $y = l\sqrt{\frac{5x^2 + 3}{5x^2 - 3}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{30x}{9 - 25x^4}.$

$y = a^x\, la^x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = (1 + x\, la)\, a^x\, la.$

$y = la^{e^x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = e^x\, la.$

38) $y = x^n\, lx^m$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = (m + nlx^m)\, x^{n-1}$.

39) $y = (llx)^2$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2llx}{xlx}$.

40) $y = lllx$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xlxllxlllx}$.

41) $y = l\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x\,(x^2+4)}$.

42) $y = \sin\,(a + x^2)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 2x \cos\,(a + x^2)$.

43) $y = \cos\,(a + bx^3)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\,3bx^2 \sin\,(a + bx^3)$.

44) $y = \sin 2x - \cos 2x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 2\,(\sin 2x + \cos 2x)$.

45) $y = \sin^4 5x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 20 \sin^3 5x \cos 5x$.

46) $y = \sin\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} \cos\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

47) $y = \sin^2 x \cos^3 x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \sin x \cos^2 x\,(2 - 5\sin^2 x)$.

48) $y = \cos x\; l\cos x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\sin x\,(l\cos x + 1)$.

49) $y = l\sin\,(ax + b)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = a\cot\,(ax + b)$.

50) $y = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}\,\sin x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x+\sqrt{x+1}}\,\cos x + \frac{(1+2\sqrt{x+1})\, si}{4\sqrt{x+1}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

51) $y = \cos(x^3 - \sqrt[4]{x^7})$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\left(3x^2 - \frac{7}{4}\, x^{\frac{3}{4}}\right) \sin(x^3 - \sqrt[4]{x^7})$.

52) $y = \sin l(x^2 - a)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cos l(x^2 - a)}{x^2 - a}$.

53) $y = \frac{1}{12} \sin^4 x^3$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = x^2 \sin^3 x^3 \cos x^3$.

54) $y = a^{\sin^2 x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \sin 2x\, a^{\sin^2 x}\, la$.

55) $y = e^{\sin x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = e^{\sin x} \cos x$.

56) $y = a^{l \cos x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\, a^{l \cos x}\, tg\, x\, la$.

57) $y = tg \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{(1 - \sqrt{x})^2 \sqrt{x}}$.

58) $y = \sin a^{l\, tg\, x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sin 2x} \cos a^{l\, tg\, x}\, a^{l\, tg\, x}\, la$.

59) $y = tg^4(x^2 - a)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{8x\, tg^3(x^2 - a)}{\cos^2(x^2 - a)}$.

60) $y = (a - \sqrt{b})^{tg\, x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{(a - \sqrt{b})^{tg\, x}\, l\,(a - \sqrt{b})}{\cos^2 x}$.

61) $y = \cos(x\, tg\, x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\sin(x\, tg\, x)\left(tg x + \frac{x}{\cos^2 x}\right)$.

62) $y = l \frac{\cot x}{x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + \sin 2x}{x \sin 2x}$.

63) $y = tg\,\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{e^x + 1}{e^x - 1}}$.

64) $y = \cot\,(lx \,.\, \sin x^2)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x^2 + 2x^2 lx \cos x^2}{x \sin^2 (lx \,.\, \sin x^2)}$.

65) $y = arc\,\sin \frac{x^2 - a}{x^2 + a}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{a}}{x^2 + a}$.

66) $y = arc\,\sin \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1 - x^2)\sqrt{1 - 2x^2}}$.

67) $y = arc\,\sin \frac{\sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - 1}{2\,(1 + x)\sqrt{x\,(1 + x + x^2)}}$.

68) $y = arc\,\sin \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\,(1 + \sqrt{x})\sqrt{x\,(1 + 2\sqrt{x})}}$.

69) $y = arc\,\cos \sqrt{lx - x^3}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{3\,x^3 - 1}{2x\sqrt{(1 + x^3 - lx)\,(lx - x^3)}}$.

70) $y = arc\,\cos \sqrt{\frac{x}{x + 1}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\,(x + 1)\sqrt{x}}$.

71) $y = arc\,\cos \frac{x}{x^2 + 3x - 5}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 5}{(x^2 + 3x - 5)\sqrt{x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 30x + 25}}$.

72) $y = \frac{1}{12}\,arc\,tg\,\frac{x}{4}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\,(16 + x^2)}$.

73) $y = \sqrt{arc\ tg\, x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\,(1 + x^2)\,\sqrt{arc\ tg\, x}}$.

74) $y = arc\ tg\, \frac{x + lx}{x - lx}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - lx}{x^2 + l^2 x}$.

75) $y = arc\ tg\, \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x\,\sqrt{x^2 - 1}}$.

76) $y = arc\ tg\, \frac{1 + \sqrt{1 + x}}{1 - \sqrt{1 + x}}$.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\,(2 + x)\,\sqrt{1 + x}}$.

77) $y = arc\ tg\, \frac{2x}{1 - x^2}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}$.

78) $y = (1 + x^2)\; arc\ tg\, x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 1 + 2x\; arc\ tg\, x$.

79) $y = arc\ tg\, \frac{a \sin x}{b + c \cos x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{a\,(b \cos x + c)}{(b + c \cos x)^2 + a^2 \sin^2 x}$.

80) $y = arc\ tg\, \sqrt{\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 1}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 3x - 4}{2x\,(x + 2)\,\sqrt{(x^2 - 1)\;(x^3 + x^2 + 1)}}$.

81) $y = arc\ tg\, (tg\, x^2)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Andeut. Berücksichtige, dass $arc\ tg\,(tg\, x^2) = x^2$ ist, oder direct nach §. 27.

82) $y = arc\ tg\, (n\, tg\, x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{\cos^2 x + n^2 \sin^2 x}$.

83) $y = (1 + x^2)\,\sqrt{x}\,.\; arc\ tg\, x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}\; arc\ tg\, x + \sqrt{x}$.

84) $y = arc\ tg\ x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x-x^2}{(1-x+x^2+x^3)\sqrt{1-x^2}}$.

85) $y = a^x + l(\sin x) + arc\,tg\,a^{2x} + \sin^4 x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = a^x\,la + \cot x + \frac{2a^{2x}\,la}{1+a^{4x}} + 4\sin^3 x\,\cos x$.

86) $y = arc\,cot\,(1-ax^2)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\,ax}{2-2ax^2+a^2x^4}$.

87) $y = arc\,cot\,\sqrt{ax+b}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{[1+ax+b]\,2\sqrt{ax+b}}$.

88) $y = arc\,cot\,\sqrt{lx}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+lx)\,2x\sqrt{lx}}$.

89) $y = (x+1)^{x^2+1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = (x+1)^{x^2+1}\left[\frac{x^2+1}{x+1} + 2\,x\,l\,(x+1)\right]$.

Andeut. Durch Substitution in §. 29 (1) oder direct nach der Anmerk. zu §. 29, indem man setzt:

$ly = (x^2+1)\ l(x+1)$

$\frac{dly}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x^2+1)\ \frac{d}{dx}\,l(x+1) + l(x+1)\ \frac{d}{dx}(x^2+1)$.

90) $y = (x^2+1)^{e^x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)^{e^x}\,e^x}{x^2+1}\,[2x + (x^2+1)\ l(x^2+1)]$.

91) $y = x^{\sin x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + lx\ \cos x\right]$.

92) $y = [\sin\,(x^2+1)]^x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = [\sin(x^2+1)]^x\,[l\sin(x^2+1) + 2x^2\cot(x^2+1)]$.

93) $y = (1+\cos x)^{\sin x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = (1+\cos x)^{\sin x}\,[-1 + (1 + l(1+\cos x))\,\cos x$

94) $y = (tg\,x)^{lx}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = (tg\,x)^{lx}\left[\frac{1}{x}\,l\,tg\,x + \frac{2\,lx}{\sin\,2x}\right]$.

95) $y = (1 + x \sin x)^x$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = (1 + x \sin x)^{x-1} [x (\sin x + x \cos x) + (1 + x \sin x) l (1 + x \sin x)].$$

96) $y = (arc\, tg\, x)^{\cos x}$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = (arc\, tg\, x)^{\cos x} \left[\frac{\cos x}{(1 + x^2)\, arc\, tg\, x} - \sin x\, l\, arc\, tg\, x \right].$$

97) $y = (\sin x + lx)^{\frac{\cos x}{x}}$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = (\sin x + l x)^{\frac{\cos x}{x}} \left[\frac{\cos x\, (x \cos x + 1)}{x^2 (\sin x + lx)} - \frac{x \sin x + \cos x}{x^2} l (\sin x + l x) \right].$$

98) $y = e^{arc\, tg \frac{x}{x+2}}$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\, e^{arc\, tg \frac{x}{x+2}}.$$

99) $y = arc\, cot\, l\, (arc\, \sin x)$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = - \frac{1}{(1 + l^2\, arc \sin x)\, arc \sin x \sqrt{1 - x^2}}.$$

100) $y = arc\, cot \frac{x + \sin x}{1 + l x}$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\sin x}{x} - (1 + l x) \cos x - l x}{(1 + l x)^2 + (x + \sin x)^2}.$$

101) $y = \sin u,\ u = l^2 x$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = \frac{2\, l x\ .\ \cos l^2 x}{x}.$$

Andeut. Nach §. 8 (1) oder direct, indem man $y = \sin l^2 x$ setzt.

102) $y = \sqrt{u},\ u = \sin v,\ v = arc tg x$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos\, (arc\, tg\, x)}{2\, (1 + x^2) \sqrt{\sin\, (arc\, tg\ x)}}.$$

Andeut. §. 8 (2).

103) $y = \sin u,\ x = u^n$;

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos \sqrt[n]{x}}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Andeut. Nach §. 8 oder auch direct

§. 32. Differentialquotient von f(u, v).

1) Sind u und v zwei Functionen der unabhängig Veränderlichen x, ist ferner

$$y = f(u, v)$$

eine Function von u und v und bezeichnen u_1, v_1 die Werthe, welche u und v annehmen, wenn x in x_1 übergeht, so hat man

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u_1, v_1) - f(u, v)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(u_1, v_1) - f(u_1, v) + f(u_1, v) - f(u, v)}{x_1 - x}.$$

$$= \frac{f(u_1, v) - f(u, v)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{f(u_1, v_1) - f(u_1, v)}{v_1 - v} \cdot \frac{v_1 - v}{x_1 - x} \quad . . (1)$$

Nun drückt aber offenbar $f(u_1, v) - f(u, v)$ die Aenderung aus, welche $f(u, v)$ erleidet, wenn u in u_1 übergeht, dagegen v unverändert bleibt. Lässt man darum x_1 sich unbegrenzt dem Werthe x nähern, so stellt nach früherem $lim \frac{f(u_1, v) - f(u, v)}{u_1 - u}$ denjenigen Differentialquotienten von $y = f(u, v)$ vor, welchen man erhält, wenn man in dieser Function u als unabhängig Veränderliche, dagegen v als eine Constante betrachtet. Ebenso bezeichnet $f(u_1, v_1) - f(u_1, v)$ diejenige Aenderung, welche $f(u_1, v)$ erleidet, wenn man v in v_1 übergehen, dagegen u_1 unverändert lässt. Berücksichtigt man nun, dass mit $x_1 - x$ zugleich $u_1 - u$ unendlich klein wird, in diesem Falle aber u statt u_1 zu setzen ist, so ersieht man hieraus, dass $lim \frac{f(u_1, v_1) - f(u_1, v)}{v_1 - v}$ denjenigen Differentialquotienten der Function $y = f(u, v)$ ausdrückt, welchen man erhält, wenn man in $f(u, v)$ v als unabhängig Veränderliche, dagegen u als eine Constante ansieht.

Man nennt den Differentialquotienten einer Function zweier oder auch mehrer Veränderlichen, welcher so bestimmt wird, dass man von den Veränderlichen eine als Unabhängige, die anderen aber als Constante ansieht, den partiellen Differentialquotienten der betreffenden Function nach der als unabhängig Veränderliche angenommenen Variabeln und deutet denselben nach Jacobi dadurch an, dass man ∂ statt d schreibt.

Wir erhalten hiernach unter Berücksichtigung, dass

$$lim \frac{u_1 - u}{x_1 - x} = \frac{du}{dx} \text{ und } lim \frac{v_1 - v}{x_1 - x} = \frac{dv}{dx}$$

ist, aus obiger Gleichung (1) unmittelbar:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u, v)}{dx} = \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} \quad . . (2$$

Den Gesammtwerth von $\frac{dy}{dx}$ nennt man den **totalen Differentialquotienten** der Function $y = f(u, v)$.

2) Sind u, v, w drei Functionen von x und ist $y = f(u, v, w)$ eine Function derselben, so hat man:

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(u_1, v_1, w_1) - f(u, v, w)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(u_1,v_1,w_1) - f(u,v_1,w_1) + f(u,v_1,w_1) - f(u,v,w_1) + f(u,v,w_1) - f(u,v,w)}{x_1 - x}$$

$$= \frac{f(u_1,v_1,w_1) - f(u,v_1,w_1)}{u_1 - u} \cdot \frac{u_1 - u}{x_1 - x} + \frac{f(u,v_1,w_1) - f(u,v,w_1)}{v_1 - v} \cdot \frac{v_1 - v}{x_1 - x}$$

$$+ \frac{f(u, v, w_1) - f(u, v, w)}{w_1 - w} \cdot \frac{w_1 - w}{x_1 - x}$$

und hiernach durch analoge Schlussfolgerung wie oben, wenn man f statt $f(u, v, w)$ setzt:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

3) Ebenso folgt allgemein, wenn wir kurzhin durch f eine Function beliebig vieler von x abhängigen Veränderlichen $u, v, w \ldots$ bezeichnen,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Beispiele.

1) Es sei $y = \sin u \cos v$, wo u und v Functionen von x sind.

Da
$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial \sin u \cos v}{\partial u} = \cos u \cos v$$

und
$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \sin u \cos v}{\partial v} = - \sin u \sin v,$$

so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \cos v \frac{du}{dx} - \sin u \sin v \frac{dv}{dx}.$$

2) Man soll den Differentialquotienten von

$$y = a^x + l(\sin x) + \operatorname{arc} tg\, a^{2x} + \sin^4 x$$

nach Obigem bestimmen.

Setzt man zu diesem Ende

$$a^x = u, \; \sin x = v,$$
$$y = u + lv + \operatorname{arc} tg\, u^2 + v^4,$$

[so folgt]:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1 + \frac{2u}{1 + u^4}, \; \frac{du}{dx} = a^x la;$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{v} + 4v^3, \; \frac{dv}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(1 + \frac{2u}{1 + u^4}\right)\frac{du}{dx} + \left(\frac{1}{v} + 4v^3\right)\frac{dv}{dx}$$

$$= \left(1 + \frac{2a^x}{1+a^{4x}}\right) a^x\, la + \left(\frac{1}{\sin x} + 4 \sin^3 x\right) \cos x$$

$$= a^x\, la + \frac{2a^{2x}\, la}{1+a^{4x}} + \cot x + 4 \sin^3 x \cos x$$

wie wir schon §. 31, Aufg. 85 auf directem Wege gefunden haben.

Anmerk. Mittelst obigen Satzes lassen sich leicht die früher entwickelten Formeln auf anderem Wege finden.

Ist z. B. $y = uv$, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial uv}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial uv}{\partial v}\frac{dv}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \quad \text{(s. §. 16).}$$

Für $y = \frac{u}{v}$ erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \frac{u}{v}}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial \frac{u}{v}}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}\frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2}\frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} \quad \text{(s. §. 17).}$$

Der Studirende mag zur Uebung die noch übrigen einfachen Formeln auf diesem Wege herleiten.

§. 33. Aufgaben zur Uebung.

Folgende Functionen nach den vorstehenden Regeln zu differenziren:

1) $y = \sqrt{tg\, x} + \sin e^x + e^{2x} + e^{-x}\, tg\, x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\cos^2 x \sqrt{tg\, x}} + e^x \cos e^x + 2e^{2x} + \frac{1}{e^x \cos^2 x} - \frac{tg\, x}{e^x}$.

Andeut. Setze $tg\, x = u$; $e^x = v$.

2) $y = x \sin x + 3x^2 \sin^4 x + x\, l \sin x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \sin x + x \cos x + 6x \sin^4 x$
$+ 12x^2 \sin^3 x \cos x + l \sin x + x \cot x$.

Andeut. Setze $\sin x = u$.

3) $y = l^2 x + 2\sin^3 x + 5\, tg^4 x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\, lx}{x} + 6 \sin^2 x \cos x + \frac{20\, tg^3 x}{\cos^2 x}$.

Andeut. Setze $lx = u$, $\sin x = v$, $tg\, x = w$.

4) $y = a^x \sin x + \frac{\cos^2 x}{a^x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \left(a^x - \frac{2 \sin x}{a^x}\right) \cos x + \left(a^x \sin x - \frac{\cos^2 x}{a^x}\right) la$.

Andeut. Setze $a^x = u$, $\sin x = v$.

5) $y = lx \,.\, arc\,tg\,x + \frac{l^3 x}{(arc\,tg\,x)^2}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \left(arc\,tg x + \frac{3\,l^2 x}{(arc\,tg\,x)^2}\right)\frac{1}{x} + \left(lx - \frac{2\,l^3 x}{(arc\,tg\,x)^3}\right)\frac{1}{1+x^2}$.

§. 34. Homogene Functionen.

1) Eine Function $f(x, y, z, \ldots)$ heisst homogen vom $n$ten Grade oder von der $n$ten Ordnung, wenn dieselbe die Eigenschaft hat, dass

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots) = \alpha^n f(x, y, z, \ldots)$$

wo α irgend eine neue Veränderliche bezeichnet und $\alpha x, \alpha y, \ldots$ statt $x, y, z, \ldots$ gesetzt ist.

Ist z. B. $f(x, y, z) = ax^2y^3z - bxy^2z^3 + cx^3yz^2 + dx^2y^2z^2$ und man setzt $\alpha x, \alpha y, \alpha z$ statt x, y, z, so wird

$$\begin{aligned} f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) &= a\alpha^6x^2y^3z - b\alpha^6xy^2z^3 + c\alpha^6x^3yz^2 + d\alpha^6x^2y^2z^2 \\ &= \alpha^6(ax^2y^3z - bxy^2z^3 + cx^3yz^2 + dx^2y^2z^2) \\ &= \alpha^6 f(x, y, z). \end{aligned}$$

2) Ist $$f = x^m y^n,$$

so wird $$\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n; \; \frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$$

also $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (m+n)x^m y^n = (m+n)f.$$

Analog folgt, wenn

$$f = a_1 x^{m_1} y^{n_1} + a_2 x^{m_2} y^{n_2} + \ldots.$$

wo $$m_1 + n_1 = m_2 + n_2 = \ldots. = n$$

und n eine constante Zahl, die Function f also eine homogene ist, dass

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dieser Satz gilt natürlich auch für mehr als zwei Veränderliche und heisst gewöhnlich der Satz von den homogenen Functionen.

..B. $F = f(x, y, z, \ldots)$ eine Function $n$ter Ordnung, so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots = nf(x, y, z, \ldots) = nF \quad \ldots (2)$$

Ist $F = f \,.\, \varphi$, wo f eine homogene Function der $m$ten und φ ..iche der $n$ten, also F eine Function der $(m+n)$ten Ordnung ..hnet, so hat man nach §. 32:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y}$$

also $$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = f\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \varphi\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$= nf\varphi + mf\varphi = (m+n)f\varphi = (m+n)F.$$

4) Behalten wir die eben angeführten Bezeichnungen bei, so resultirt ferner aus $F = \frac{f}{\varphi}$ sofort

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\varphi\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\varphi^2};\quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\varphi\frac{\partial f}{dy} - f\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\varphi^2}$$

und hiernach $$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = (m-n)\frac{f}{\varphi} = (m-n)F.$$

5) Ist f eine homogene Function der $m$ten, also f^n eine solche der mnten Ordnung und $F = f^n$, so hat man:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = nf^{n-1}\frac{\partial f}{\partial x};\quad \frac{\partial F}{\partial y} = nf^{n-1}\frac{\partial f}{\partial y}$$

also $$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = nf^{n-1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = nf^{n-1}\,.\,mf = mnf^n = mnF.$$

B. Wiederholte Differentiation.

§. 35. Bedeutung des zweiten Differentialquotienten in der Mechanik.

Nach dem Beharrungsgesetze behält ein sich in Bewegung befindlicher Körper seine Geschwindigkeit v, sowohl der Richtung als Grösse nach so lange unverändert bei, als nicht eine störende Ursache, Kraft genannt, auf denselben einwirkt. Umgekehrt lässt sich aus der Geschwindigkeitsänderung auf das Vorhandensein einer Kraft schliessen und da der Quotient $\frac{v_1 - v}{x_1 - x}$ für den Fall, dass das Zeitintervall $x_1 - x$ unendlich klein ist, in die Beschleunigung p übergeht*), so folgt unmittelbar $p = \frac{dv}{dx}$

*) Denn ertheilt eine constante Kraft einem Körper in der Zeit T eine Geschw digkeitsänderung $= v$, so ist nach bekannten Gesetzen der Mechanik die entspreche Beschleunigung oder Verzögerung $= \frac{v}{T}$ und da man jede Kraft innerhalb eines une. lich kleinen Zeitintervalles als constant wirkend ansehen kann, so ist obige Annah gerechtfertigt.

oder nach §. 7, 12 $$p = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

d. h. die Beschleunigung wird ausgedrückt durch den zweiten Differentialquotienten des Weges in Bezug auf die Zeit.

Da nun nach bekannten mechanischen Sätzen die Grösse einer constanten Kraft P gleich dem Producte aus der Masse M des bewegten Körpers in die Beschleunigung ist, so folgt aus Vorstehendem:

$$P = Mp = M\frac{d^2y}{dx^2}$$

§. 36. Beispiele über wiederholte Differentiation.

Die Bestimmung der auf einanderfolgenden Differentialquotienten einer Function geschieht genau nach denselben Regeln, wie die Bestimmung des ersten.

Zur näheren Erläuterung lassen wir nachstehend einige Beispiele folgen.

1) $f(x) = x^n$

$f'(x) = nx^{n-1}$

$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$

$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

. . . .

$f^{(m)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)x^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!}x^{n-m}$

. . . .

$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1 = n!$

2) $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x - 8$

$f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 3$

$f''(x) = 12x^2 - 30x$

$f'''(x) = 24x - 30;\quad f^{IV}(x) = 24$

3) $f(x) = a^x;\quad f'(x) = a^x\, la$

$f''(x) = a^x\, l^2a \ldots f^{(n)}(x) = a^x\, l^na$

4) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + \frac{4\pi}{2}\right)$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Anmerk. Je nachdem n durch 4 dividirt 0, 1, 2 oder 3 als Rest lässt, ist $f^{(n)}(x)$ bezüglich $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$.

5) $f(x) = arc\,tg\,x = y$, also $tg\,y = x$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+tg^2 y} = cos^2 y$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2\,tg\,y}{(1+tg^2 y)^2} = -2\,sin\,y\,cos^3 y$$

$$= -sin\,2y\,cos^2 y = sin\left(2y + \frac{2\pi}{2}\right)cos^2 y$$

$$f'''(x) = -\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} = -2(1-3\,tg^2 y)\,cos^6 y =$$

$$-2(cos^2 y - 3\,sin^2 y)\,cos^4 y = -2(1-4\,sin^2 y)\,cos^4 y$$

$$= -2\,cos\,3y\,cos^3 y = 1\,.\,2\,sin\left(3y + \frac{3\pi}{2}\right)cos^3 y$$

$$f^{IV}(x) = 1\,.\,2\,.\,3\,sin\,4y\,cos^4 y = 1\,.\,2\,.\,3\,sin\left(4y + \frac{4\pi}{2}\right)cos^4 y$$

. . . .

Um die allgemeine Giltigkeit dieses Bildungsgesetzes nachzuweisen, nehmen wir an, dasselbe sei für n richtig und

$$f^{(n)}(x) = (n-1)!\,sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right)cos^n y$$

so folgt hieraus:

$$f^{(n+1)}(x) = (n-1)!\left[n\,cos\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right)cos^n y\,\frac{dy}{dx} - \right.$$

$$\left. n\,sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right)cos^{n-1} y\,sin\,y\,\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= n!\left[cos\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right)cos\,y - sin\left(ny + \frac{n\pi}{2}\right)sin\,y\right]cos^{n-1} y\,\frac{dy}{dx}$$

$$= n!\,cos\left((n+1)\,y + \frac{n\pi}{2}\right)cos^{n-1} y\,cos^2 y$$

$$= n!\,sin\left((n+1)\,y + \frac{(n+1)\,\pi}{2}\right)cos^{n+1} y.$$

Ist obiger Werth also für n giltig, so ist er es auch für $n+1$ und somit allgemein richtig.

§. 37. Aufgaben zur Uebung.

1) $f(x) = 5x^4$;

Aufl. $f'(x) = 20x^3$; $f''(x) = 60x^2$; $f'''(x) = 120x$; $f^{IV}(x) = 120$.

2) $f(x) = (a + x^2)^2$;

Aufl. $f'(x) = 4x(a + x^2)$; $f''(x) = 4(a + 3x^2)$;

$f'''(x) = 24x$; $f^{IV}(x) = 24$.

3) $f(x) = \sqrt{x}$;

Aufl. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$; $f'''(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}$

$f^{IV}(x) = -\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}$; ... $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1.3.5..(2n-[illegible]}{2^n x^{n-1}\sqrt{x}}$

4) $f(x) = \frac{1}{x+a} = (x+a)^{-1}$;

Aufl. $f'(x) = -(x+a)^{-2}$; $f''(x) = -1 \cdot -2\,(x+a)^{-3}$;
$f'''(x) = -1 \cdot -2 \cdot -3\,(x+a)^{-4}; .. f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\,(x+a)^{-n-1}$.

5) $f(x) = (6+5x)^4$

Aufl. $f'(x) = 20\,(6+5x)^3$; $f''(x) = 300\,(6+5x)^2$;
$f'''(x) = 3000\,(6+5x)$; $f^{IV}(x) = 15000$.

6) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$;

Aufl. $f'(x) = \frac{-2}{(1-x)^2}$; $f''(x) = \frac{2 \,.\, 2}{(1-x)^3}$; $f'''(x) = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 3}{(1-x)^4}$

$f^{IV}(x) = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}{(1-x)^5}$; .... $f^{(n)}(x) = \frac{2 \,.\, n!}{(1-x)^{n+1}}$.

7) $f(x) = lx$;

Aufl. $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f'''(x) = \frac{1 \,.\, 2}{x^3}$;

$f^{IV}(x) = -\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3}{x^4}$; .... $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

8) $f(x) = \cos x$;

Aufl. $f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$

$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$

. . . .

$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

9) $f(x) = l\,(a+bx)$;

Aufl. $f'(x) = \frac{b}{a+bx}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{(a+bx)^2}$; ....

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!\,b^n}{(a+bx)^n}$.

10) $f(x) = arc \sin x$.

Aufl. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

$f'''(x) = \frac{(1+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$; $f^{IV}(x) = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$;

$f^{V}(x) = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}$ ....

11) $f(x) = e^x$

Aufl. $f'(x) = f''(x) = \ldots f^{(n)}(x) = e^x$.

12) $f(x) = \sin 3x$

Aufl. $f'(x) = 3\cos 3x = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$f''(x) = -3^2 \sin 3x = 3^2 \sin\left(3x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -3^3 \cos 3x = 3^3 \sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = 3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

13) $f(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+2} = \frac{7-x}{x^2+x-2}$

Aufl. $f'(x) = \frac{x^2 - 14x - 5}{(x^2+x-2)^2}$; $f''(x) = \frac{-2x^3 + 42x^2 + 30x + 38}{(x^2+x-2)^3}$ ..

oder allgemein

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n . 2 . n!\, (x-1)^{-n-1} - (-1)^n . 3 . n!\, (x+2)^{-n-1}$$

$$= (-1)^n . n! \left[\frac{2}{(x-1)^{n+1}} - \frac{3}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

14) $f(x) = \frac{4}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{4x+1}{x^2+2x+1}$.

Aufl. $f'(x) = \frac{-4x^2 - 2x + 2}{(x^2+2x+1)^2} = -\frac{4x-2}{(x+1)^3}$

$$f''(x) = \frac{2(4x-5)}{(x+1)^4}; \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n . n!}{(x+1)^{n+2}} (4x - 3n + 1).$$

15) $f(x) = \sin^4 x$

Aufl. $f'(x) = 4\sin^3 x \cos x$

$$f''(x) = 4\sin^2 x\,(3 - 4\sin^2 x)$$

$$f'''(x) = 4\sin 2x(3 - 8\sin^2 x) = 4\sin 2x\,(4 - 8\sin^2 x - 1) =$$

$$4\sin 2x\,(4\cos 2x - 1) = 4\,(2\sin 4x - \sin 2x) \ldots$$

§. 38. Differentialquotienten des Productes uv.

Sind u und v Functionen von x und ist

$$y = uv$$

so hat man nach §. 16

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

und da im Allgemeinen $\frac{dv}{dx}$ und $\frac{du}{dx}$ wiederum Functionen von x sind,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dv}{dx}\frac{du}{dx} = u\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Ebenso

$$\frac{d^3y}{dx^3} = u\frac{d^3v}{dx^3} + 3\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + 3\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + v\frac{d^3u}{dx^3}$$

woraus wir allgemein schliessen, dass

$$\frac{d^ny}{dx^n} = u\frac{d^nv}{dx^n} + \binom{n}{1}\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}$$
$$+ \ldots + \binom{n}{1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\frac{dv}{dx} + \frac{d^nu}{dx^n}v \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

oder nach der kürzeren Bezeichnungsweise

$$y^{(n)} = uv^{(n)} + \binom{n}{1}u'v^{(n-1)} + \binom{n}{2}u''v^{(n-2)} + \ldots + \binom{n}{1}u^{(n-1)}v' + u^{(n)}v.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich leicht mittelst des Schlusses von n auf $n+1$ beweisen. Wir nehmen zu diesem Ende an, es gelte dieselbe für n.

Differenzirt man nun nochmals, so folgt:

$$y^{(n+1)} = uv^{(n+1)} + u'v^{(n)} + \binom{n}{1}u'v^{(n)} + \binom{n}{1}u''v^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{1}u^{(n-1)}v'' + \binom{n}{1}u^{(n)}v' + u^{(n+1)}v + u^{(n)}v'$$
$$= uv^{(n+1)} + \left(1 + \frac{n}{1}\right)u'v^{(n)} + \left(\frac{n}{1} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\right)u''v^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{n}{1} + 1\right)u^{(n)}v' + u^{(n+1)}v$$
$$= uv^{(n+1)} + \binom{n+1}{1}u'v^{(n)} + \binom{n+1}{2}u''v^{(n-1)} + \ldots$$
$$+ \binom{n+1}{1}u^{(n)}v' + u^{(n+1)}v.$$

Zu demselben Resultate gelangt man aber auch, wenn man in Glchg. (1) $n+1$ statt n setzt, woraus unmittelbar deren allgemeine [illegible]keit hervorgeht.

[illegible]tt der obigen Gleichungen kann man symbolisch schreiben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (u+v)^2,\ \frac{d^3y}{dx^3} = (u+v)^3,\ \ldots$$
$$\frac{d^ny}{dx^n} = (u+v)^n,$$

[illegible] man nun jeden der in den Entwickelungen auftretenden Expo-

nenten als Index des entsprechenden Differentialquotienten anzusehen und u und v statt u^0 und v^0 zu setzen hat.

Man findet ebenso, wenn

$$y = u\, v\, w$$

ist, dass der $n$te Differentialquotient davon in analoger Weise symbolisch ausgedrückt wird durch

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (u + v + w)^n.$$

Denn nach Vorstehendem ist symbolisch

$$\frac{d^n}{dx^n}(u\, v\, w) = \frac{d^n}{dx^n}(uv\, .\, w) = (uv + w)^n$$

Irgend ein Glied dieser Entwickelung sei nun $C\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(uv)\frac{d^\beta w}{dx^\beta}$, so ist dieses symbolisch ausgedrückt durch $C(u+v)^\alpha w^\beta$ und da die Entwickelung $\ldots + C(u+v)^\alpha w^\beta + \ldots$ offenbar nichts anderes ist als $(u+v+w)^n$, so ist auch symbolisch

$$\frac{d^n}{dx^n}(u\, v\, w) = (u + v + w)^n$$

Allgemein kann man symbolisch setzen:

$$\frac{d^n}{dx^n}(uvw\ldots) = (u + v + w + \ldots)^n.$$

§. 39. Anwendung dieser Gleichungen auf die Aufstellung von Recursionsformeln zur Bestimmung höherer Differentialquotienten.

1) Ist $y = \arcsin x$ und man soll die höheren Differentialquotienten bestimmen, so hat man zunächst:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

folglich $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = x\frac{dy}{dx}$$

und $$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[x\frac{dy}{dx}\right]\ldots(\alpha)$$

Setzt man nun in §. 38 (1)

$$u = 1 - x^2,\ \frac{du}{dx} = -2x,\ \frac{d^2u}{dx^2} = -2,\ \frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^4u}{dx^4} = \ldots = 0,$$

$$v = \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}\ \text{u. s. f.},$$

so erhält man:

$$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}\right] = (1-x^2)\frac{d^ny}{dx^n} - 2(n-2)\,x\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - (n-2)(n-3)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

und aus derselben Gleichung, wenn man $u = x$, $v = \frac{dy}{dx}$, $n - 2$ statt n setzt,

$$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[x\,\frac{dy}{dx}\right] = x\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (n-2)\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}.$$

Nach (α) ist demnach

$$(1 - x^2)\frac{d^n y}{dx^n} - 2\,(n-2)\,x\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - (n-2)(n-3)\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$
$$= x\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (n-2)\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

woraus folgt:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(2n-3)\,x}{1-x^2}\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{(n-2)^2}{1-x^2}\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

Mittelst dieser Formel kann man leicht irgend einen höheren Differentialquotienten aus den beiden nächst vorhergehenden bestimmen. Da nun der erste und zweite Differentialquotient bekannt sind, so sind darnach auch die darauf folgenden gegeben.

2) Es sei $y = arc\ tg\, x$, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,2x\,(1+x^2)^{-2},$$

also $\qquad (1+x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\,2x\,\frac{dy}{dx}$

und somit $\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[(1+x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2}\right] = -\,2\,\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[x\,\frac{dy}{dx}\right] \quad . \; . \; . \quad (\beta)$

Mittelst der Glchg. §. 38 (1) erhält man daher wie vorhin, wenn man einmal

$$u = 1 + x^2,\ v = \frac{d^2y}{dx^2}$$

und dann $\qquad u = x,\ v = \frac{dy}{dx}$

setzt, bezüglich

$$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[(1+x^2)\,\frac{d^2y}{dx^2}\right] = (1+x^2)\,\frac{d^n y}{dx^n} + 2\,(n-2)\,x\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} +$$
$$(n-2)\,(n-3)\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

$$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[x\,\frac{dy}{dx}\right] = x\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (n-2)\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$$

Es ist somit nach (β)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = -\,\frac{2\,(n-1)\,x}{1+x^2}\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{(n-1)\,(n-2)}{1+x^2}\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}.$$

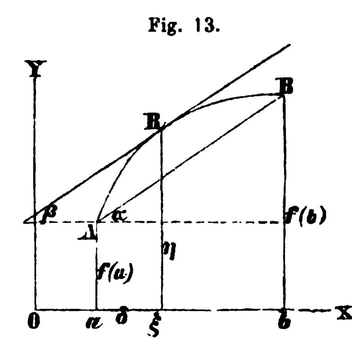
§. 40. Zusammenhang einer Function von einer Veränderlichen mit ihren Differentialquotienten.

1) Es sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer Curve, welche durch die zwei Punkte A und B (Fig. 13) geht, $f(x)$ eindeutig und stetig, $f'(x)$ aber einwerthig. Sind nun α und β die Winkel, welche die Sehne AB und irgend eine Tangente mit der Abscissenachse bilden, so liegt zwischen A u. B nach §. 9, 3. wenigstens ein Punkt R der Curve, für welchen $\alpha = \beta$, also $tg\,\alpha = tg\,\beta$ ist. Bezeichnet daher ξ die Abscisse dieses Punktes, so folgt

Fig. 13.



$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

oder da $\xi = a + \delta$, wenn $\delta < (b - a)$,

also für $0 < \theta < 1$, $\delta = \theta\,(b - a)$,

somit $\xi = a + \theta\,(b - a)$

gesetzt werden kann, auch

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'[a + \theta\,(b - a)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar:

$$f(b) = f(a) + (b - a)\, f'[a + \theta\,(b - a)] \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welche Gleichungen aber, wie schon bemerkt, voraussetzen, dass $f(x)$ innerhalb des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ stetig und $f'(x)$ einwerthig sei.

2) Der durch die Gl. (1) ausgedrückte Satz kann nun leicht verallgemeinert werden. Es seien zu diesem Ende f, φ stetige, f', φ', einwerthige Functionen von t, ausserdem aber sei φ' innerhalb des Intervalles t_0 bis t_1 stets positiv, soll aber an den Grenzen auch Null oder ∞ werden können, alsdann wird nach §. 7, 10. φ von $\varphi(t_0)$ bis $\varphi(t_1)$ stets wachsen. Betrachten wir nun allgemein die Curve $y = f($ $x = \varphi(t)$ (Fig. 14) und setzen $x_0 = \varphi($ $x_1 = \varphi(t_1)$, so wird x von x_0 bis x_1 wachse wenn t von t_0 bis t_1 zunimmt und jed Werth von t, welcher zwischen t_0 und t_1 liegt, einem Werthe von zwischen x_0 und x_1 entsprechen. Nun ist

Fig. 14.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{d\,f(t)}{d\,t}}{\frac{d\,\varphi\,(t)}{d\,t}}=\frac{f'\,(t)}{\varphi'\,(t)}$$

und die Tangente an die Curve ändert daher stetig ihre Richtung, wie solches in 1. voraus gesetzt ist. Wir erhalten somit, dem dortigen entsprechend, nach (1)

$$\frac{f(t_1)-f(t_0)}{\varphi(t_1)-\varphi(t_0)}=\frac{f'\,[t_0+\theta\,(t_1-t_0)]^{*})}{\varphi'\,[t_0+\theta\,(t_1-t_0)]},\ 0<\theta<1.$$

Die Bedingung, dass φ' innerhalb des Intervalles t_0 bis t_1 stets positiv sei, können wir aber nun fallen lassen. Denn ist φ' innerhalb dieses Intervalles stets negativ (den Fall des Null- oder Unendlichwerdens an den Grenzen jedoch nicht ausgeschlossen), so ist $-\varphi'$ stets positiv und somit $k-\varphi$, wo k eine beliebige Constante bezeichnet, stets wachsend. Schreibt man daher für die zwei Functionen f und $k-\varphi$, welche allen Bedingungen genügen, obigen Satz an, so hebt sich in den Resultaten die Constante k und der Satz bleibt richtig.

Es darf aber φ' innerhalb jener Grenzen nicht Null oder unendlich werden, weil sonst φ innerhalb x_0 und x_1 nicht nothwendig beständig wachsen oder beständig abnehmen würde, man also nicht mehr sagen könnte, dass zu einem x, welches zwischen x_0 und x_1 liegt, ein t gehören muss, das zwischen t_0 und t_1 liegt.

§. 41. Höhere Differentialquotienten der Function f(u,v).

1) Sind $f(u,v)$, sowie die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}$ stetige Functionen von u und v, so ist

$$\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u}=\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial u}}{\partial v}\ \text{oder}\ \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}=\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v},$$

wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}$ einwerthig ist.

enn deuten wir durch $\Delta_u\,f(u,v)$ und $\Delta_v\,f(u,v)$ an, dass sich in unction bezüglich nur u oder nur v ändert, so folgt:

Jenn die trig. Tangente des Winkels, welchen die Berührungslinie mit der ɛnachse bildet ist im Allgemeinen $\frac{f'\,(t)}{\varphi'\,(t)}$ und wenn man nun für t einen zwischen t_1 liegenden Werth $t_0+\Theta\,(t_1-t_0)$ einführt, so resultirt obiger Ausdruck.

$$\Delta_u f(u, v) = f(u + \Delta u, v) - f(u, v)$$
$$\Delta_v f(u, v) = f(u, v + \Delta v) - f(u, v)$$

also
$$\Delta_v [\Delta_u f(u, v)] = \Delta_v f(u + \Delta u, v) - \Delta_v f(u, v)$$
$$= f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)$$
$$- f(u + \Delta u, v) + f(u, v) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\Delta_u [\Delta_v f(u, v)] = \Delta_u f(u, v + \Delta v) - \Delta_u f(u, v)$$
$$= f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v)$$
$$- f(u, v + \Delta v) + f(u, v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\Delta_u \Delta_v f(u, v) = \Delta_v \Delta_u f(u, v) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \varphi; \ \frac{\partial f}{\partial v} = \psi; \ \frac{\partial \psi}{\partial u} = \psi_1; \ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \varphi_1$$

$$\Delta_u f(u, v) = f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = F(v) \quad . \quad . \quad (4)$$

so wird nach §. 40

$$\frac{F(v + \Delta v) - F(v)}{\Delta v} = \frac{\partial}{\partial v} F(v + \varepsilon \Delta v)$$

wo ε nicht von u abhängt und $0 < \varepsilon < 1$ ist;

also
$$F(v + \Delta v) - F(v) = \Delta v \frac{\partial}{\partial v} F(v + \varepsilon \Delta v)$$

oder nach (4)

$$\Delta_v F(v) = \Delta v \left[\frac{\partial}{\partial v} f(u + \Delta u, v + \varepsilon \Delta v) - \frac{\partial}{\partial v} f(u, v + \varepsilon \Delta v)\right]$$
$$= \Delta v \, [\psi(u + \Delta u, v + \varepsilon \Delta v) - \psi(u, v + \varepsilon \Delta v)]$$

oder da nach (1) und (4):

$$\Delta_v F(v) = \Delta_v \Delta_u f(u, v)$$

ferner
$$\frac{\psi(u + \Delta u, v + \varepsilon \Delta v) - \psi(u, v + \varepsilon \Delta v)}{\Delta u} = \psi_1(u + \theta \Delta u, v + \varepsilon \Delta v)$$

wo θ unabhängig von v und $0 < \theta < 1$ ist,

auch
$$\Delta_v \Delta_u f(u, v) = \Delta v \, \Delta u \, \psi_1(u + \theta \Delta u, v + \varepsilon \Delta v). \quad . \quad . \quad (5)$$

Analog ergibt sich, wenn man

$$\Delta_v f(u, v) = f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = F_1(u)$$

setzt,

$$F_1(u + \Delta u) - F_1(u) = \Delta u \frac{\partial}{\partial u} F_1(u + \delta \Delta u)$$

wo δ unabhängig von v und $0 < \delta < 1$ ist;
oder

$$\Delta_u F_1(u) = \Delta u \left[\frac{\partial}{\partial u} f(u + \delta \Delta u, v + \Delta v) - \frac{\partial}{\partial u} f(u + \delta \Delta u, v)\right]$$

$$= \Delta u \left[\varphi(u + \delta \Delta u, v + \Delta v) - \varphi(u + \delta \Delta u, v)\right]$$

oder

$$\Delta_u \Delta_v f(u, v) = \Delta u \Delta v \varphi_1(u + \delta \Delta u, v + \tau \Delta v) \quad . \quad . \quad (6)$$

wo

$$0 < \tau < 1.$$

Nach (3) ist daher wegen (5) und (6):

$$\psi_1(u + \theta \Delta u, v + \varepsilon \Delta v) = \varphi_1(u + \delta \Delta u, v + \tau \Delta v)$$

und wenn man hierin Δu und Δv unendlich klein werden lässt,

$$\psi_1(u, v) = \varphi_1(u, v)$$

oder

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial v} \text{ d. h. } \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}.$$

Anmerk. Die Richtigkeit dieses Satzes lässt sich auch geometrisch auf folgende Art nachweisen: Stellt $y = f(u, v)$ den Inhalt eines parallelepipedischen Körpers $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (Fig. 15) dar und bezeichnen u, v bezüglich die Abscisse OE und die Ordinate CE des Punktes C, AB und AD constante Grenzen, so ist der Inhalt von $ABCD\,D_1A_1B_1C_1 = f(u, v)$ und nach §. 13:

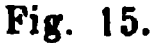
$$\frac{\partial f}{\partial u} = BCB_1C_1.$$

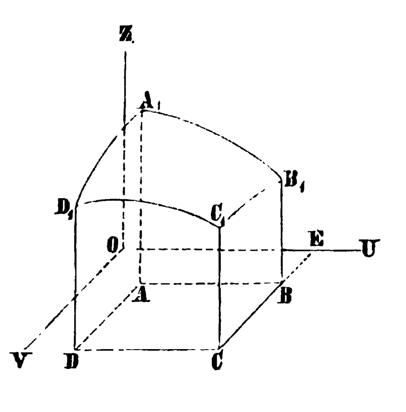
Da nun $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ der Differentialquotient der Fläche BCB_1C_1 nach v ist, so wird nach §. 11

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = CC_1.$$

Ebenso findet man $\frac{\partial f}{\partial v} = CDC_1D_1$ und

$$\frac{\partial f}{\partial v \partial u} = \frac{\partial\, CDC_1D_1}{\partial u} = CC_1.$$


Fig. 15.



Ist daher die Fläche $A_1B_1C_1D_1$ continuirlich, so ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}.$$

Um diesen Satz auch für eine beliebige Anzahl von Veränder-
n nachzuweisen, sei f eine Function von x, y, z, t, u, v, w, so kann
die Permutationen der Elemente $x, y, z, t, \ldots$ in einer solchen
nung anschreiben, dass jede folgende Complexion aus der nächst
ergehenden durch Vertauschung von nur zwei Elementen erhalten
Es seien nun u und v diese beiden Elemente, P, Q und R der

Complex der p vorangehenden, der q zwischenliegenden und der r nachfolgenden Elemente, so ist zu zeigen, dass

$$\frac{\partial^n f}{\partial (P)\, \partial u\, \partial (Q)\, \partial v\, \partial (R)} = \frac{\partial^n f}{\partial (P)\, \partial v\, \partial (Q)\, \partial u\, \partial (R)} \quad . \quad . \quad (1)$$

Dieses wird aber der Fall sein, wenn

$$\frac{\partial^{n-r} f}{\partial (P)\, \partial u\, \partial (Q)\, \partial v} = \frac{\partial^{n-r} f}{\partial (P)\, \partial v\, \partial (Q)\, \partial u}$$

oder für $\frac{\partial^p f}{\partial (P)} = \varphi$ gesetzt, wenn

$$\frac{\partial^{n-r-p} \varphi}{\partial u\, \partial (Q)\, \partial v} = \frac{\partial^{n-r-p} \varphi}{\partial v\, \partial (Q)\, \partial u}$$

oder da $n = p + q + r + 2$, wenn

$$\frac{\partial^{q+2} \varphi}{\partial u\, \partial (Q)\, \partial v} = \frac{\partial^{q+2} \varphi}{\partial v\, \partial (Q)\, \partial u} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für den Fall, dass Q nicht vorhanden, also $q = 0$ ist und u und v unmittelbar auf einander folgende Elemente sind, ist, wegen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v\, \partial u},$$

die Gleichung (2) und somit auch (1) richtig. Durch wiederholte Anwendung dieses speciellen Resultates auf jede der beiden Seiten der Gl. (2), ergibt sich

$$\frac{\partial^{q+2} \varphi}{\partial u\, \partial v\, \partial (Q)} = \frac{\partial^{q+2} \varphi}{\partial v\, \partial u\, \partial (Q)}$$

als Bedingung für die Richtigkeit der Gl. (1). Diese Beziehung besteht aber, da u und v unmittelbar auf einander folgende Elemente sind und (1) ist somit allgemein giltig.

3) Wir gehen nun zur Entwickelung der auf einanderfolgenden Differentialquotienten von $f(u, v)$ über, wo u und v Functionen von x sind.

Nach §. 32 (3) ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx}$$

und hiernach

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} \frac{d \frac{\partial f}{\partial u}}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{dv}{dx} \frac{d \frac{\partial f}{\partial v}}{dx}.$$

Da nun aber $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ im Allgemeinen wiederum Functionen von u und v sind, also

$$\frac{d\frac{\partial f}{\partial u}}{dx}=\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial u}}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial u}}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{dx}$$
$$\frac{d\frac{\partial f}{\partial v}}{dx}=\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial v}}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial\frac{\partial f}{\partial v}}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}$$

und nach Obigem $\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}$ ist, so wird

$$\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}\right)^2$$

wenn man das Quadrat des Binomiums symbolisch auffasst.

In ähnlicher Weise lassen sich die folgenden Differentialquotienten ermitteln. Die unmittelbare Bestimmung nach den früheren Regeln führt jedoch im Allgemeinen rascher zum Ziele.

4) Ist allgemein $f(u,v,w,\ldots)$ eine Function von $u,v,w,\ldots$ und sind $u,v,w,\ldots$ Functionen der unabhängig Veränderlichen x, so hat man nach §. 32, (5):

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx}+\ldots$$

und da $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v},\ldots$ wiederum Functionen von $u,v,\ldots$ sind,

$$\frac{d^2 f}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{d^2w}{dx^2}+\ldots$$
$$+\frac{du}{dx}\frac{d\frac{\partial f}{\partial u}}{dx}+\frac{dv}{dx}\frac{d\frac{\partial f}{\partial v}}{dx}+\frac{dw}{dx}\frac{d\frac{\partial f}{\partial w}}{dx}+\ldots$$
$$=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{d^2w}{dx^2}+\ldots$$
$$+\frac{du}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w}\frac{dw}{dx}+\ldots\right)$$
$$+\frac{dv}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial w}\frac{dw}{dx}+\ldots\right)+\ldots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 +$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \ldots + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} +$$
$$2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial w}\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} + \ldots$$

wofür man symbolisch schreiben kann:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{d^2w}{dx^2} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \ldots\right)^2.$$

5) Sind $u, v, w, \ldots$ linear, also von der Form $ax + b$, so verschwinden $\frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^2v}{dx^2}, \ldots$ und alle höheren Differentialquotienten von $u, v, \ldots$ Man erhält alsdann, da $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots$ constant werden, die einfachere Formel

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dx} + \ldots\right)^2$$

und allgemein

$$\frac{d^nf}{dx^n} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \ldots\right)^n.$$

Die Richtigkeit dieser symbolischen Formel lässt sich leicht auf folgende Art nachweisen:

Es sei

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = n$$

und

$$k\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^\beta\left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^\gamma \ldots \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha\left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta\left(\frac{dw}{dx}\right)^\gamma \ldots$$

ein Glied obiger Potenz, so ist dafür zu setzen:

$$k\,\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} f}{\partial u^\alpha\,\partial v^\beta\,\partial w^\gamma \ldots}\left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha\left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta\left(\frac{dw}{dx}\right)^\gamma \ldots$$

oder

$$k\,\frac{\partial^n f}{\partial u^\alpha\,\partial v^\beta\,\partial w^\gamma \ldots}\left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha\left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta\left(\frac{dw}{dx}\right)^\gamma \ldots$$

Der Differentialquotient dieses Ausdruckes nach x ist aber, da $\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}, \ldots$ constant sind:

$$k\left(\frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^{\alpha+1}\,\partial v^\beta \ldots}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^{n+1} f}{\partial u^\alpha\,\partial v^{\beta+1} \ldots}\frac{dv}{dx} + \ldots\right)\left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha\left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta \ldots$$

oder symbolisch

$$k \frac{\partial^n f}{\partial u^\alpha \partial v^\beta \dots} \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \dots\right) \left(\frac{du}{dx}\right)^\alpha \left(\frac{dv}{dx}\right)^\beta \dots$$

In der symbolischen Schreibweise wird demnach jedes Glied mit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \dots\right)$$

multiplicirt, somit auch der ganze Differentialquotient und daher

$$\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \dots\right)^{n+1}.$$

Dritter Abschnitt.

Differentiation unentwickelter Functionen.

A. Entwickelung des ersten Differentialquotienten.

§. 42. Differentialquotient unentwickelter Functionen zweier Veränderlichen.

1) Nach §. 2, 3. ist $f(x,y) = 0$ die allgemeine Form einer unentwickelten Function zwischen zwei Veränderlichen x und y, wo x die Unabhängige bezeichnen mag.

Um nun den Differentialquotienten der Function zu bestimmen, berücksichtige man zunächst, dass wenn

$$f(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

auch

$$f(x_1, y_1) = 0$$

ist, indem y_1 den Werth bezeichnet, welcher sich für y aus (1) ergibt, wenn man x in x_1 übergehen lässt.

Es ist somit auch

$$f(x_1, y_1) - f(x, y) = 0$$

oder

$$f(x_1, y_1) - f(x, y_1) + f(x, y_1) - f(x, y) = 0$$

daher:

$$\frac{f(x_1, y_1) - f(x, y_1)}{x_1 - x} + \frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y} \cdot \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = 0$$

folglich, wenn man zu den Grenzwerthen übergeht und beachtet, dass wenn $x_1 - x$ unendlich klein geworden ist, y statt y_1 gesetzt werden muss,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Beispiele:

1) $f(x,y) = ax - by + cxy = 0;$

Aufl. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = a + cy,$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -b + cx,$

$\frac{dy}{dx} = \frac{a+cy}{b-cx}.$

2) $f(x,y) = y^2 + 2Axy + Bx^2 + 2Cy + 2Dx + E = 0,$

Aufl. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2Ay + 2Bx + 2D,$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y + 2Ax + 2C,$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{Ay+Bx+D}{y+Ax+C}.$

Anmerk. Da man für jeden Werth von x aus vorstehender Gleichung zwei Werthe von y findet, so entsprechen auch jedem x zwei Differentialquotienten der Function. Um dieses näher zu erläutern, lösen wir obige Gleichung nach y auf und erhalten

$$y^2 + 2y(Ax + C) = -Bx^2 - 2Dx - E$$

$$y = -(Ax + C) \pm \sqrt{x^2(A^2 - B) + 2x(AC - D) + C^2 - E}$$

woraus folgt

$$\frac{dy}{dx} = -A \pm \frac{x(A^2 - B) + AC - D}{\sqrt{x^2(A^2 - B) + 2x(AC - D) + C^2 - E}}$$

$$= -A + \frac{x(A^2 - B) + AC - D}{y + Ax + C}$$

also $\frac{dy}{dx} = -\frac{Ay + Bx + D}{y + Ax + C}$, wie vorhin.

3) $f(x,y) = lxy - \frac{x}{y} = 0;$

Aufl. $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y},$

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2},$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}} = \frac{(x-y)\,y}{(x+y)\,x}.$$

§. 43. Differentialquotient unentwickelter Functionen von mehr als zwei Veränderlichen.

Sind zwischen drei Veränderlichen x, y, z die zwei Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad F(x, y, z) = 0$$

gegeben, so geht unmittelbar daraus hervor, dass y und z Functionen der Unabhängigen x sind. Denkt man sich nun die Werthe von y und z, in x ausgedrückt, in die beiden Gleichungen eingeführt, so erhält man zwei identische Gleichungen in x und es müssen daher auch die aufeinanderfolgenden Differentialquotienten dieser Gleichungen identisch Null sein. Man erhält somit nach §. 32 zur Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, wenn man der Kürze halber $f(x,y,z)$ und $F(x, y, z)$ durch f und F bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

und kann man nun hieraus die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ leicht entwickeln.

Man findet:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Sind allgemein $f = 0$, $F = 0$, $\varphi = 0$, .. n Gleichungen zwischen den $(n + 1)$ Variabeln x, y, z, u, .. also die n Variabeln y, z, u, .. Functionen von x, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \ldots = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \ldots = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und kann nun aus diesen n Gleichungen die n Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, ... ermitteln.

Beispiel.

Es sei $$f(x,y,z) = 2x - y - z = 0$$
und $$F(x,y,z) = x^2 - yz - 1 = 0.$$
Bildet man die Gleichungen (1), so folgt:

$$2 - \frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = 0$$

$$2x - z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} = 0$$

und hieraus
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-y)}{z-y},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2(x-z)}{y-z}.$$

§. 44. Aufgaben zur Uebung.

1) $5x^2 - 8xy^2 = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x - 4y^2}{8xy}$.

2) $x^4 - y^4 + axy = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + ay}{4y^3 - ax}$.

3) $y^3 - 6y^2x + 11yx^2 - 6x^3 = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{6y^2 - 22xy + 18x^2}{3y^2 - 12xy + 11x^2}$.

4) $x^3 + 4x^2y - 2bxy^2 + y^3 = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2by^2 - 8xy - 3x^2}{3y^2 - 4bxy + 4x^2}$.

5) $y^4 - x^4 - (a^2 + b^2)y^2 + (a^2 - b^2)x^2 + a^2b^2 = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x(2x^2 - a^2 + b^2)}{y(2y^2 - a^2 - b^2)}$.

6) $y \cos x + x \sin y + xy = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x - \sin y - y}{\cos x + x \cos y + x}$.

7) $e^x = (x+y)^2$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{2(x+y)} - 1$.

$l(x^2 + y^2) = \sin(x+y)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - (x^2 + y^2)\cos(x+y)}{(x^2+y^2)\cos(x+y) - 2y}$.

$x^2 + y^2 - xy \sin(x+y) = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y[\sin(x+y) + x\cos(x+y)] - 2x}{x[\sin(x+y) + y\cos(x+y)] - 2y}$.

10) $xy + \sin(x - y)\, a^{x+y} + b = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + [\cos(x - y) + \sin(x - y)\, la]\, a^{x+y}}{x - [\cos(x - y) - \sin(x - y)\, la]\, a^{x+y}}$.

11) $\sqrt{a^{2x} - xlx} = y + a^x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2a^x\, y\, la + lx + 1}{2(y + a^x)}$.

12) $xe^y + ye^x = x^n$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1} - e^y - ye^x}{xe^y + e^x}$.

13) $xy + arc\, tg\, xy = a$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

14) $\sin xy - lxy + xy = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

15) $\frac{\sin x}{\cos y} + \frac{\cos x}{\sin y} = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 1$.

16) $a^x - e^{x+2y} = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{a^x\, la - e^{x+2y}}{2e^{x+2y}} = \frac{a^x\, la - a^x}{2a^x} = \frac{la - 1}{2}$.

17) $x^{\sin y} + \sin^x y = C$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{\sin y - 1} \sin y + \sin^x y\, l \sin y}{x^{\sin y}\, lx \cos y + x \sin^{x-1} y \cos y}$.

18) Die beiden Differentialquotienten von y in der Gleichung

$$y^2 - xy - 2x^2 - 2y - 5x - 3 = 0$$

zu bestimmen.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -1$ und $\frac{dy}{dx} = 2$.

Andeut. Statt der Gleichung kann man schreiben:
$(y - 2x - 3)(y + x + 1) = 0$.

19) $4x^3 - 3x + \sin 3y = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 4x^2}{\cos 3y}$.

20) $y^2 - 1 + 2y \cot 2x = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{(y + \cot 2x)\sin^2 2x}$.

21) $tg x + tg y + tg x tg y - 1 = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -1$.

Andeut. Man findet zunächst $\frac{dy}{dx} = -\frac{cos^2 y}{cos^2 x} \frac{1 + tg y}{1 + tg x}$.
Nun ist aber $(1 + tg x)(1 + tg y) = 2$, also auch

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{cos^2 y}{2 cos^2 x}(1 + tg y)^2 = -\frac{1}{2 cos^2 x}(cos y + sin y)^2$$

$$= -\frac{1 + sin 2y}{2 cos^2 x}$$ oder da $tg(x + y) = 1$, $x + y = 45^0$,
also $2y = 90 - 2x$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + cos 2x}{2 cos^2 x} = -1.$$

22) $y + z - lx = 0$; $y^2 + z^2 - 2a^x = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{z - xa^x la}{x(z - y)}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{xa^x la - y}{x(z - y)}$.

23) $y^2 + z^2 = sin x$; $yz = l(1 + x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+x) y cos x - 2z}{2(1+x)(y^2 - z^2)}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{2y - (1+x) z cos x}{2(1+x)(y^2 - z^2)}$.

24) $y + z = cos x$; $sin y + sin z = 1 + x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + sin x cos z}{cos y - cos z}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1 + sin x cos y}{cos z - cos y}$.

25) $y^2 + z^2 - 17x^2 = 17$; $x + 3y - z = 13$.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{17x - z}{y + 3z} = 1$; $\frac{dz}{dx} = \frac{51x + y}{3z + y} = 4$.

B. Wiederholte Differentiation.

§. 45. Wiederholte Differentiation unentwickelter Functionen von zwei Veränderlichen.

Für
$$f(x, y) = 0$$
folgt nach §. 42:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

... nun $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ wiederum Functionen von x und y sind, so
e ... an aus (1):

$$\dots{}_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

o

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad \dots (2)$$

u ... eraus

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

in welchen Ausdruck man nun noch den Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus (1) einzuführen hat.

Zur Bestimmung von $\frac{d^3y}{dx^3}$ hat man nach (2):

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} +$$
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{dy}{dx}\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} +$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

oder

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 +$$
$$3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

woraus $\frac{d^3y}{dx^3}$ gefunden werden kann.

Beispiel.

Es sei
$$f(x, y) = x\cos y + y\sin x = 0,$$
man soll $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ bestimmen.

Auflösung. Man erhält zunächst

$$\cos y + y\cos x + (\sin x - x\sin y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und hieraus

$$-\sin y\frac{dy}{dx} - y\sin x + \cos x\frac{dy}{dx} + (\sin x - x\sin y)\frac{d^2y}{dx^2} +$$
$$\left(\cos x - \sin y - x\cos y\frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

oder

$$(\sin x - x\sin y)\frac{d^2y}{dx^2} - x\cos y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(\cos x - \sin y)\frac{dy}{dx} - y\sin x = 0. \quad (2)$$

Aus (1) folgt nun

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\cos x + \cos y}{x\sin y - \sin x}$$

und durch Einführung dieses Werthes in (2) ergibt sich $\frac{d^2y}{dx^2}$.

§. 46. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

Erscheint in einem Ausdrucke y als Function von x und es soll statt x eine neue Veränderliche t eingeführt werden, so führt dieses auf die Aufgabe, welche unter dem Namen die Vertauschung der unabhängig Veränderlichen bekannt ist.

Analog lassen sich für zwei oder mehr unabhängig Veränderliche andere mit jenen in gewissen Beziehungen stehende einführen.

Das bei der Lösung dieser Aufgabe zu befolgende Verfahren ergibt sich leicht aus der Behandlung nachstehender

Beispiele.

1) Es sei

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

worin y als Function von x erscheint, man soll diesen Ausdruck so umändern, dass x als Function von y auftritt.

Auflösung. Setzt man nach §. 8 (4) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ und berücksichtigt, dass $\frac{dx}{dy}$ eine Function von y, also

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}$$

ist, so folgt:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}} = -\frac{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3\left[\frac{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

$$\varrho = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

..an soll den in Aufg. 1 gegebenen Ausdruck so umformen, dass x .. Functionen von t erscheinen.

Auflösung. Da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'}$$

wo also y' und x' die Differentialquotienten von y und x nach t bezeichnen, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d\,\frac{y'}{x'}}{dx} = \frac{\frac{d\,\frac{y'}{x'}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$$

also
$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{y'^2}{x'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$$

oder
$$\varrho = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}$$

3) In der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + ay = 0$ ist y eine Function von x. Man soll nun statt x die neue Variable t durch die Gleichung $x = \sin t$ einführen.

Auflösung. Da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\cos t}$$

so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\cos t}\right)}{\cos t} = \frac{\cos t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \sin t\,\frac{dy}{dt}}{\cos^3 t}$$

und die verlangte Gleichung heisst daher:

$$\cos t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \sin t\,\frac{dy}{dt} + ay\cos^3 t = 0.$$

4) Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\,tg\,x\,\frac{dy}{dx} = 0$$

sei gegeben, man soll dieselbe so umformen, dass y als Function von t scheint, wenn $x = arc\,tg\,t$, also $t = tg\,x$ ist.

Auflösung. Da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{1}{1+t^2}} = (1+t^2)\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{(1+t^2)\frac{d^2y}{dt^2} + 2t\frac{dy}{dt}}{\frac{1}{1+t^2}}.$$

$$= (1+t^2)^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2t(1+t^2)\frac{dy}{dt}$$

so folgt: $(1+t^2)^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2t(1+t^2)\frac{dy}{dt} - 2t(1+t^2)\frac{dy}{dt} = 0$

oder

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

5) Es sei

$$\varrho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

man soll ϱ in r und φ ausdrücken, wenn die Abhängigkeit zwischen x, y und r, φ durch die Gleichungen

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi$$

gegeben ist.

Auflösung. Da x, y und r Functionen von φ sind, so hat man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r\cos\varphi + \sin\varphi\frac{dr}{d\varphi}}{-r\sin\varphi + \cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{d\frac{dy}{dx}}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{r^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{\left(-r\sin\varphi + \cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}\right)^3}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}{\left(-r\sin\varphi + \cos\varphi\frac{dr}{d\varphi}\right)^2};$$

u t

$$\varrho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}.$$

6) Den in der vorhergehenden Aufgabe vorgelegten Ausdruck mittelst der Beziehungen

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r; \quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$$

so umzuformen, dass s als unabhängig Veränderliche erscheint.

Auflösung. x, y und r sind Functionen von s und man erhält daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{y'}{x'}; \; 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x'^2 + y'^2}{x'^2} = \frac{1}{x'^2}; \; \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{x'^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} = \frac{\frac{d\frac{y'}{x'}}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\frac{x'y'' - y'x''}{x'^2}}{x'} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3}$$

also

$$\varrho = \frac{1}{x'y'' - x''y'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Um den Werth von $\frac{1}{x'y'' - x''y'}$ zu bestimmen, entwickle man aus

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } x'^2 + y'^2 = 1 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

zunächst $\quad xx' + yy' = rr' \ldots (\alpha)$

und $\quad x'x'' + y'y'' = 0 \ldots (\beta)$,

so ergibt sich durch abermalige Differentiation der Gl. (α)

$$xx'' + yy'' = rr'' + r'^2 - 1 \ldots (\gamma).$$

Multiplicirt man zuerst (β) mit x, (γ) mit x', dann (β) mit y, (γ) mit y' und subtrahirt jedesmal die gefundenen Gleichungen, so erhält man

$$y''(x'y - xy') = x'(rr'' + r'^2 - 1)$$
$$x''(x'y - xy') = -y'(rr'' + r'^2 - 1)$$

und hieraus, wenn man die erste Gleichung mit x' die zweite mit y' multiplicirt,

$$(x'y'' - x''y')(x'y - xy') = rr'' + r'^2 - 1$$

oder

$$\frac{1}{x'y'' - x''y'} = \frac{x'y - xy'}{rr'' + r'^2 - 1}.$$

Aus (2) ergibt sich aber durch Multiplication:

$$(xx' + yy')^2 + (x'y - xy')^2 = r^2$$

oder nach (α) $\quad (x'y - xy')^2 = r^2(1 - r'^2)$,

also ist auch

$$\frac{1}{x'y'' - x''y'} = \frac{r\sqrt{1 - r'^2}}{rr'' + r'^2 - 1}$$

und (1) geht hiernach über in:

$$\varrho = \frac{r\sqrt{1 - r'^2}}{rr'' + r'^2 - 1} = \frac{r\sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2}}{r\frac{d^2r}{ds^2} + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - 1}.$$

7) Die Gleichung $$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$
wo z eine Function der unabhängig Veränderlichen x und y ist, in eine andere umzuwandeln, in welcher r und φ als unabhängig Veränderliche, z als Abhängige erscheinen, wenn man weiss, dass
$$x = r \cos\varphi; \quad y = r \sin\varphi.$$

Auflösung. Da z eine Function von r und φ, φ eine solche von x und y ist, so hat man
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$$
oder da $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r},$$
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi = \frac{y}{r},$$
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \cos\varphi \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \sin\varphi \frac{\partial z}{\partial r} \end{aligned}\right\} \dots (\alpha)$$
also $$x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = r\cos\varphi \left(\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \sin\varphi \frac{\partial z}{\partial r}\right) +$$
$$r \sin\varphi \left(\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \cos\varphi \frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{\partial z}{\partial \varphi}$$
folglich ist $$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$
die umgewandelte Gleichung.

8) In die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ statt der unabhängig Veränderlichen x und y die r und φ einzuführen, wenn gegeben ist
$$x = r \cos\varphi; \quad y = r \sin\varphi.$$

Auflösung, Berücksichtigt man, dass im Allgemeinen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ von x und y abhängig und diese Functionen von r und φ sind, so folgt nach Aufg. 7 (α)
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial x}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\partial z}{\partial y}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$$
0 $$\ldots{}_2 = \cos\varphi \left[\frac{\sin\varphi}{r^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial r} + \cos\varphi \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\right] +$$
$$\ldots\varphi \left[\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \sin\varphi \frac{\partial z}{\partial r} - \cos\varphi \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial r}\right]$$
$$\frac{\ldots in 2\varphi}{\ldots}\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\sin 2\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial r} + \cos^2\varphi \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \sin\varphi\left[\sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\,\partial r} - \frac{\cos\varphi}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right] +$$
$$\frac{\cos\varphi}{r}\left[\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial r} + \sin\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\,\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial\varphi} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$= \sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\varphi}{r}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi\,\partial r} - \frac{\sin 2\varphi}{r^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi} + \frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$

und es ist somit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

§. 47. Aufgaben zur Uebung.

1) Es sei $$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x^2} = 0\,,\ x = e^t,$$

man soll eine Gleichung zwischen y und der neuen Variabeln t aufstellen.

Auflösung. $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + a = 0.$

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t}$, entwickle nun $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc.

2) Die Gleichung $\frac{b}{a}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \frac{dy}{dx} = 0$ mittelst der Gleichungen $x = ar\cos\varphi$; $y = br\sin\varphi$ in eine andere zwischen r und φ zu verwandeln.

Auflösung. $$r^2 + \frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi} + r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi} = 0.$$

Andeut. x, y, r sind Functionen von φ; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$ etc.

3) Man soll die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(1+x)}{(1-x)^3}$$

vermittelst der Gleichung $x = \frac{t-1}{t+1}$ in eine andere nach der unabhängig Veränderlichen t umwandeln.

Auflösung. $\frac{dy}{dt} = t.$

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{2}{(t+1)^2}}, \quad 1 + x = \frac{2t}{1+t}$ etc.

4) Es seien y und z Functionen der unabhängig Veränderlichen x. Man soll einen Ausdruck, welcher x, y, z und Differentialquotienten von y und z nach x enthält, so umformen, dass statt jener Veränderlichen die neuen ξ, η, ζ erscheinen, wo ξ die Unabhängige bezeichnet, wenn gegeben ist:

$$x = \eta\zeta; \; y = \xi\zeta; \; z = \xi\eta.$$

Wie heissen $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ und $\frac{d^2z}{dx^2}$?

Auflösung. $\frac{dy}{dx} = \frac{\xi\zeta' + \zeta}{\eta\zeta' + \zeta\eta'}; \; \frac{dz}{dx} = \frac{\xi\eta' + \eta}{\eta\zeta' + \zeta\eta'};$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\zeta\zeta''(\xi\eta' - \eta) + 2\zeta'^2(\eta - \xi\eta') - \zeta\eta''(\xi\zeta' + \zeta)}{(\eta\zeta' + \zeta\eta')^3}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\eta\eta''(\xi\zeta' - \zeta) - \eta\zeta''(\eta + \xi\eta') + 2\eta'^2(\zeta - \xi\zeta')}{(\eta\zeta' + \zeta\eta')^3}$$

Andeut. x, y und z sind Functionen von ξ.

5) Aufg. 4 für den Fall zu lösen, dass $x = \xi^2; \; y = \eta^2; \; z = \zeta^2$ ist.

Auflösung. $\frac{dy}{dx} = \frac{\eta\eta'}{\xi}; \; \frac{dz}{dx} = \frac{\zeta\zeta'}{\xi};$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\xi(\eta\eta'' + \eta'^2) - \eta\eta'}{2\xi^3}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\xi(\zeta\zeta'' + \zeta'^2) - \zeta\zeta'}{2\xi^3}$$

6) Den Ausdruck $\sqrt{z}\,\frac{dy}{dx} - \sqrt{y}\,\frac{dz}{dx} = 0$

auf die in der vorhergehenden Aufgabe angegebene Weise umzuformen.

Auflösung. $\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{d\zeta}{d\xi} = 0.$

Es sei u eine Function von x, y, z; man soll

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$$

ucken durch $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial u}{\partial \zeta}$, wenn gegeben ist:

$$x = \eta + \zeta; \; y = \xi + \zeta; \; z = \xi + \eta.$$

Auflösung. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right); \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\, \partial \xi} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \zeta} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\, \partial \zeta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\, \partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{1}{4}\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \zeta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \zeta} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\, d\zeta}\right)$$

Andeut. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ aber $\xi = \frac{-x+y+z}{2}$,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{2} \text{ etc.}$$

8) Vorhergehende Aufgabe für den Fall zu lösen, dass

$$x = \eta\zeta; \; y = \xi\zeta; \quad z = \xi\eta.$$

Auflösung. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\xi}{\eta\zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\eta}{\xi\zeta}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\zeta}{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) \text{ etc.}$$

9) Man soll die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{1}{x}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\frac{d^2y}{dx^2} + a = 0$$

mittelst $x = a \sin t$

in eine nach der unabhängig Veränderlichen t umwandeln.

Auflösung. $\frac{d^2y}{dt^2} = a\,tg\,t.$

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{a \cos t}$ etc.

10) Die Gleichung $\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} = k$ durch $x = e^t$ in eine nach t umzuändern.

Auflösung. $\frac{d^2y}{dt^2} = ke^{2t}.$

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t}$ etc.

11) In der Gleichung $ay + bx\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ die Veränderliche x durch t zu ersetzen, wenn man weiss, dass $t = lx$ ist.

Auflösung. $ay + (b-1)\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$

Andeut. $x = e^t$; $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}{e^{2t}}$.

12) Die Gleichung $y + x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ nach t umzuformen, wenn $x^2 = 9t$ ist.

Auflösung. $y + 4t\frac{dy}{dt} + 4t^2\frac{d^2y}{dt^2} = 0.$

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{t}}{3}\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t}{9}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{9}\frac{dy}{dt}$.

13) Die Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$, in welcher x und y von einander unabhängig sind, so umzuformen, dass diese Veränderlichen durch r ersetzt erscheinen, wenn gegeben ist:

$$x^2 + y^2 = r^2; \quad z = f(r).$$

Auflösung. $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0.$

Andeut.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{x^2}{r^3}\frac{\partial z}{\partial r} \text{ etc.}$$

14) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ so umzuformen, dass r als unabhängig ıerliche erscheint, wenn

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2; \quad u = f(r).$$

uflösung. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$

ndeut. Verfahre wie vorhin.

15) In dem Ausdrucke $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$ die unabhängig Veränderlichen x und y durch zwei andere φ und ψ und die als abhängig Veränderliche anzusehende z durch r zu ersetzen, wenn gegeben ist:

$$x = r\cos\varphi\cos\psi;\quad y = r\cos\varphi\sin\psi;\quad z = r\sin\varphi.$$

Auflösung.
$$\frac{\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2 + r^2\right]\cos^2\varphi}{\left(\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial\varphi} - r\sin\varphi\right)^2\cos^2\varphi}.$$

Andeut. $\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi};\quad \frac{\partial z}{\partial\psi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\psi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\psi}$

Entwickelt man nun

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \cos\varphi\cos\psi\frac{\partial r}{\partial\varphi} - r\sin\varphi\cos\psi$$

und ebenso $\frac{\partial x}{\partial\psi};\ \frac{\partial y}{\partial\varphi};\ \frac{\partial y}{\partial\psi};\ \frac{\partial z}{\partial\varphi};\ \frac{\partial z}{\partial\psi}$ und führt die betreffenden Werthe in vorstehende Gleichungen ein, so findet man daraus $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ etc.

16) Man soll die Gleichung

$$u = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

wo x und y Functionen von z sind, so umformen, dass u in ϱ, φ, z ausgedrückt erscheint, wenn gegeben ist

$$x = \varrho\cos\varphi;\quad y = \varrho\sin\varphi.$$

Aufl. $$u = \sqrt{1 + \varrho^2\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2 + \left(\frac{d\varrho}{dz}\right)^2}$$

Andeut. Da x, y, ϱ und φ Functionen von z sind, so hat man

$$\frac{dy}{dz} = \varrho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dz} + \sin\varphi\frac{d\varrho}{dz}$$

$$\frac{dx}{dz} = -\varrho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dz} + \cos\varphi\frac{d\varrho}{dz} \text{ etc.}$$

17) In der Gleichung

$$(x + y - z)\left(\frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}\right) + \frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx} - x - y + z = 0$$

seien y und z Functionen von x; man soll mittelst der Beziehungen

$$x = \eta + \zeta;\quad y = \xi + \zeta;\quad z = \xi + \eta,$$

wo ξ die unabhängig Veränderliche bedeute, die neuen Veränderlichen ξ, η, ζ einführen.

Auflösung. $4\zeta + \frac{d\eta}{d\xi} - \frac{d\zeta}{d\xi} = 0.$

Andeut. Vermöge der drei gegebenen Gleichungen sind ξ, η, ζ Functionen von x, y, z also x eine Function von ξ und somit y und z Functionen von ξ. Man hat daher

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{d\zeta}{d\xi}; \quad \frac{dy}{d\xi} = 1 + \frac{d\zeta}{d\xi}; \quad \frac{dz}{d\xi} = 1 + \frac{d\eta}{d\xi}$$

Bestimme nun $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ etc.

18) In dem Ausdrucke

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

wo u eine Function von x, y, z ist, diese Veränderlichen durch drei neue r, φ, ψ zu ersetzen, wenn gegeben ist

$$x = r\cos\varphi\cos\psi; \quad y = r\sin\varphi\cos\psi; \quad z = r\sin\psi.$$

Auflösung. $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\cos^2\psi}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{tg\psi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\psi}.$

Vierter Abschnitt.

Functionen complexer Ausdrücke.

§. 48. Bedeutung complexer Ausdrücke.

1) Bezeichnen u und v reelle Functionen der Variabeln x, i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ und man setzt

$$u = r\cos\psi\,,\; v = r\sin\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

also

$$r = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wo r und ψ reelle Functionen von x sind, r absolut genommen wird und $0 < \psi < 2\pi$ ist, so folgt:

$$u + iv = r\,(\cos\psi + i\sin\psi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Diese Gleichung gibt uns ein Mittel an die Hand, einen complexen Ausdruck trigonometrisch darzustellen.

Man nennt r den Modulus, ψ die Amplitude oder das Argument der complexen Grösse $u + iv$.

Allgemeiner könnte man auch, wenn k irgend eine ganze Zahl bedeutet, setzen:

$$u + iv = r\,[\cos\,(\psi + 2k\pi) + i\sin\,(\psi + 2k\pi)]$$

Wir werden jedoch, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, nur den für $k = 0$ hieraus resultirenden Hauptwerth *) unseren Betrachtungen zu Grunde legen.

2) Um nun zunächst die Bedeutung einer Potenz mit reeller Basis, aber complexem Exponenten kennen zu lernen, definiren wir, in Uebereinstimmung mit §. 5, Beisp. 1:

$$e^{u+iv} = \lim\left(1 + \frac{u + iv}{n}\right)^n$$

für ein reelles aber unendlich grosswerdendes n. Zur Bestimmung dieser Grenze setzen wir

$$\left(1+\frac{u+iv}{n}\right)^n=\left(1+\frac{u}{n}+\frac{iv}{n}\right)^n=\left(1+\frac{u}{n}\right)^n\left(1+\frac{\frac{iv}{n}}{1+\frac{u}{n}}\right)^n=$$

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n\left(1+i\,\frac{v}{n+u}\right)^n=\left(1+\frac{u}{n}\right)^n(\cos\psi+i\sin\psi)^n=$$

$$\left(1+\frac{u}{n}\right)^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)\,^{*})$$

wo also $\cos\psi=1\,,\ \sin\psi=\frac{v}{n+u}.$

Da hiernach aber ψ mit unendlich wachsendem n sich der Null nähert, man also beim Grenzübergange

$$\psi=\frac{v}{n+u}\,,\ n\psi=\frac{nv}{n+u}=\frac{v}{1+\frac{u}{n}}$$

und für $n=\infty\,,\ n\psi=v$ setzen muss, so folgt nach §. 5, Beisp. 1 (2):

$$\lim\left(1+\frac{u+iv}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{u}{n}\right)^n\lim\,(\cos n\psi+i\sin n\psi)$$

oder

$$e^{u+iv}=e^u\,(\cos v+i\sin v)\,^{**})\quad\ldots\ldots\quad(4)$$

Für einen reellen Exponenten t ist bekanntlich $a^t=e^{t\,la}$. Behält man nun diese Definition auch für einen complexen Exponenten bei, so folgt:

$$a^{u+iv}=e^{(u+iv)\,la}$$

oder nach (4)

$$a^{u+iv}=e^{u\,la}\,[\cos\,(v\,la)+i\sin\,(v\,la)]\quad\ldots\ldots\quad(5)$$

oder da $e^{la}=a,$

ist, auch:

$$a^{u+iv}=a^u\,[\cos\,(v\,la)+i\sin\,(v\,la)]\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

Für $u=0$ folgt aus (4)

$$e^{iv}=\cos v+i\sin v\quad\ldots\ldots\quad(7)$$

$$e^{-iv}=\cos v-i\sin v\quad\ldots\ldots\quad(8)$$

3) Mittelst der Gl. (6) lässt sich nun leicht nachweisen, dass alle früher für die Rechnung der Potenzen mit reellen Exponenten entwickelten Regeln auch Giltigkeit haben, wenn die Exponenten complex sind.

---

*) Vergl. A. A. I. §. 116*a* Zus. 3.

**) Denn es ist $\lim\cos n\psi=\cos(\lim n\psi)$, $\lim\sin n\psi=\sin(\lim n\psi)$ und allgemein $\lim f(x)=f(\lim x)$, wenn x mit wachsendem oder abnehmendem n sich einer Grenze nähert. Um dies nachzuweisen, setze man $x=\xi+\varepsilon$, wo ε sich der Null nähert, so ist $\lim x=\xi$, und nach §. 40 (2)

$$f(x)=f(\xi+\varepsilon)=f(\xi)+\varepsilon f'[\xi+\Theta\varepsilon]$$
$$0<\Theta<1.$$

Für ein endliches f' hat man daher

$$\lim f(x)=f(\xi)=f(\lim x).$$

So ist

$$a^{u+iv}\, a^{u_1+iv_1} = a^{u+u_1}[\cos(vla) + i\sin(vla)][\cos(v_1 la) + i\sin(v_1 la)]$$
$$= a^{u+u_1}[\cos(v+v_1)la + i\sin(v+v_1)la]$$
$$= a^{u+u_1+i(v+v_1)} = a^{(u+iv)+(u_1+iv_1)}$$
$$\frac{a^{u+iv}}{a_{u_1+iv_1}} = a^{u-u_1}\frac{\cos(vla) + i\sin(vla)}{\cos(v_1 la) + i\sin(v_1 la)}$$
$$= a^{u-u_1}[\cos(v-v_1)la + i\sin(v-v_1)la]$$
$$= a^{u-u_1+i(v-v_1)} = a^{(u+iv)-(u_1+iv_1)}$$
$$(a^{u+iv})^m = a^{mu}[\cos(vla) + i\sin(vla)]^m$$
$$= a^{mu}[\cos(mvla) + i\sin(mvla)]$$
$$= a^{mu+imv} = a^{m(u+iv)}.$$

4) Um den Werth von einem Logarithmus einer complexen Zahl zu untersuchen, setzen wir

$$log^{(a)}(u+iv) = U + iV \quad \dots\dots \quad (9)$$

wo U und V reell sind, so ist

$$a^{U+iV} = u + iv$$

also nach (6): $a^U[\cos(Vla) + i\sin(Vla)] = u + iv$

und hiernach $a^U\cos(Vla) = u$; $a^U\sin(Vla) = v$.

woraus folgt $a^U = \sqrt{u^2+v^2}$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, da für ein reelles U auch a^U positiv ausfällt.

Man hat daher

$$Ula = \frac{1}{2}l(u^2+v^2),\; U = \frac{1}{2la}l(u^2+v^2)$$

$$\cos(Vla) = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}};\; \sin(Vla) = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Bezeichnet nun ψ den kleinsten positiven Winkel, welcher diesen beiden Gleichungen genügt, setzen wir also

$$\cos\psi = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}};\quad \sin\psi = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}},$$

so ist $Vla = \psi + 2k\pi$, wo k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, und man hat nach (9):

$$log^{(a)}(u+iv) = \frac{1}{2la}l(u^2+v^2) + i\frac{\psi+2k\pi}{la} \quad . \; . \quad (1$$

$$l(u+iv) = \tfrac{1}{2}l(u^2+v^2) + i(\psi+2k\pi) \quad . \; . \quad (11)$$

*) In dieser Formel (11) bedeutet also $l(u^2+v^2)$ den Logarithmus, wie er in [d]en Tafel gefunden wird, während $l(u+iv)$ der allgemeine Ausdruck für den Logarithm[us] einer complexen Zahl ist.

für $u = 1$, $v = 0$, $\cos\psi = 1$, $\sin\psi = 0$, also $\psi = 0$, erhält man hieraus:

$$l1 = i.2k\pi$$

und für $u = -1$, $v = 0$, $\cos\psi = -1$, $\sin\psi = 0$, also $\psi = \pi$:

$$l(-1) = i(\pi + 2k\pi) = i(2k+1)\pi.$$

Aus (10) und (11) ergibt sich, dass der Log. einer complexen Zahl vieldeutig ist. Wir werden jedoch in der Folge nur denjenigen der Werthe darunter verstehen, der erhalten wird, wenn man $k = 0$ setzt. Es ist alsdann nach (11):

$$l(u + iv) = \tfrac{1}{2} l(u^2 + v^2) + i\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

oder wenn man der complexen Zahl die Form $r(\cos\psi + i\sin\psi)$ gibt,

$$l[r(\cos\psi + i\sin\psi)] = lr + i\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wodurch der Logarithmus einer complexen Zahl definirt ist.

Es wäre nun zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen die früher vorgetragenen Regeln über die Rechnung mittelst Logarithmen auch für obige Form Giltigkeit haben.

Setzt man

$$z = r(\cos\psi + i\sin\psi) \ ; \ z_1 = r_1(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)$$

wo $0 < \frac{\psi}{\psi_1} < 360^0$, so folgt:

$$lz = lr + i\psi; \ lz_1 = lr_1 + i\psi_1$$

also

$$lz + lz_1 = l(rr_1) + i(\psi + \psi_1).$$

Nun ist aber

$$zz_1 = r(\cos\psi + i\sin\psi) \,.\, r_1(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1) =$$
$$rr_1[\cos(\psi + \psi_1 - 2k\pi) + i\sin(\psi + \psi_1 - 2k\pi)]$$

also $l(zz_1) = l(rr_1) + i(\psi + \psi_1 - 2k\pi) = lz + lz_1 - i\,.\,2k\pi$,
wo k so zu bestimmen ist, dass $0 < \psi + \psi_1 - 2k\pi < 2\pi$.

Die Regel für den Log. eines Productes gilt somit auch hier, wenn man nur den Coefficienten von i durch Subtraction von $2k\pi$ zwischen die Grenzen 0 und 2π bringt.

Da ferner

$$\frac{z}{z_1} = \frac{r}{r_1}[\cos(\psi - \psi_1 + 2k\pi) + i\sin(\psi - \psi_1 + 2k\pi)]$$

wo k so zu bestimmen ist, dass

$$0 < \psi - \psi_1 + 2k\pi < 2\pi,$$

s i:

$$l\frac{z}{z_1} = l\frac{r}{r_1} + i(\psi - \psi_1 + 2k\pi)$$
$$= lz - lz_1 + 2ik\pi,$$

v ..s hervorgeht, dass unter der vorhin gemachten Voraussetzung s die früher für den Log. eines Bruches gegebene Regel giltig ist.

Weiter hat man:

$$z^n = r^n [\cos(n\psi - 2k\pi) + i \sin(n\psi - 2k\pi)]$$

also $lz^n = lr^n + i(n\psi - 2k\pi)$

$$= nlr + i(n\psi - 2k\pi) = nlz - i.2k\pi$$

und $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\psi}{n} + i\sin\frac{\psi}{n}\right)$,

somit $$l\sqrt[n]{z} = \frac{lr}{n} + i\frac{\psi}{n} = \frac{lz}{n}.$$

Auch die für das Potenziren und Radiciren bekannten Regeln bleiben also bestehen, wenn man bei der ersten Operation den Coefficienten von i zwischen die Grenzen 0 und 2π bringt. Beim Radiciren ist dieses schon der Fall.

5) Nach (7) und (8) ist

$$e^{iv} = \cos v + i\sin v \ ; \ e^{-iv} = \cos v - i\sin v$$

woraus folgt:

$$\cos v = \frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2} \ ; \ \sin v = \frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i} \quad \ldots \quad (14)$$

Diesen für ein reelles v geltenden Relationen legen wir nun allgemeine Giltigkeit bei und erhalten dadurch die Definition für *cos* und *sin* complexer Bogen, und somit nachstehende Gleichungen:

$$\cos(u + iv) = \frac{e^{i(u+iv)} + e^{-i(u+iv)}}{2} = \frac{e^{-v+iu} + e^{v-iu}}{2} \quad . \quad (14a)$$

$$= \tfrac{1}{2}[e^{-v}(\cos u + i\sin u) + e^{v}(\cos u - i\sin u)]$$

$$= \cos u \frac{e^v + e^{-v}}{2} - i\sin u \frac{e^v - e^{-v}}{2} \quad \ldots \quad (15)$$

Ebenso: $\sin(u + iv) = \sin u \dfrac{e^v + e^{-v}}{2} + i\cos u \dfrac{e^v - e^{-v}}{2} \quad \ldots \quad (16)$

für $u = 0$ ergeben sich hieraus die Beziehungen:

$$\cos(iv) = \frac{e^v + e^{-v}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\sin(iv) = i\frac{e^v - e^{-v}}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Es lässt sich nun wieder leicht zeigen, dass alle in der ebenen Trigonometrie zwischen den goniometrischen Functionen reeller Bogen entwickelten Relationen auch hier giltig bleiben.

So folgt z. B. aus den Gleichungen (15) — (18)

$$\cos(u + iv) = \cos u \cos(iv) - \sin u \sin(iv)$$

$$\sin(u + iv) = \sin u \cos(iv) + \cos u \sin(iv)$$

$$\cos^2(u + iv) + \sin^2(u + iv) = \left(\frac{e^v + e^{-v}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)^2 =$$

$$tg(u + iv) = \frac{\sin(u + iv)}{\cos(u + iv)} = \frac{2\sin 2u + i(e^{2v} - e^{-2v})}{e^{2v} + e^{-2v} + 2\cos 2u} \text{ u. s. w.}$$

woraus wir zugleich ersehen, dass sich jede goniometrische Function eines complexen Bogens stets auf die Form $U + iV$ bringen lässt.

6) Wir betrachten nun noch die cyclometrischen Functionen complexer Zahlen.

Es sei $$arc\,sin\,(u + iv) = U + iV \quad \ldots\ldots \quad (19)$$
wo U und V reell, also
$$sin\,(U + iV) = u + iv$$
oder nach (16)
$$sin\,U\,\frac{e^V + e^{-V}}{2} + i\,cos\,U\,\frac{e^V - e^{-V}}{2} = u + iv \quad . \quad (20)$$
so ist:
$$sin\,U\,\frac{e^V + e^{-V}}{2} = u;\ cos\,U\,\frac{e^V - e^{-V}}{2} = v.$$

Setzt man zur Abkürzung:
$$sin\,U = Q,\ cos\,U = P$$
so wird
$$e^V + e^{-V} = 2\,\frac{u}{Q} \ldots (21) \quad e^V - e^{-V} = 2\,\frac{v}{P} \quad \ldots \quad (22)$$
also $$e^V = \frac{u}{Q} + \frac{v}{P} \ldots\ldots (23) \quad e^{-V} = \frac{u}{Q} - \frac{v}{P} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Zur Bestimmung von P und Q hat man daher die zwei Gleichungen:
$$P^2 + Q^2 = 1 \ldots (25) \quad \frac{u^2}{Q^2} - \frac{v^2}{P^2} = 1 \quad \ldots\ldots \quad (26)$$
woraus sich ergibt:
$$P^2 = -\tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 - 1) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4v^2}$$
$$Q^2 = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + 1) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4v^2}.$$

Eine einfache Betrachtung lehrt, dass von den Doppelzeichen der ersten Gleichung das obere genommen werden muss, damit P^2 positiv ausfällt und dass also auch in der zweiten Gleichung nur das obere Zeichen gilt. Durch beide Gleichungen sind also die Absolutwerthe von P^2 und Q^2 unzweideutig bestimmt und es ist
$$P = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - u^2 - v^2 + \sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4v^2}}$$
$$Q = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + u^2 + v^2 - \sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4v^2}}$$
al $$\frac{u}{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + u^2 + v^2 + \sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 - 4u^2}}$$
$$\frac{v}{P} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u^2 + v^2 - 1 + \sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4v^2}}$$

entsteht nun die Frage, ob P und Q bezüglich ihrer Vorzeichen g ..llkürlich combinirt werden dürfen.

Gl. (21) lehrt, dass $\frac{u}{Q}$ stets positiv sein muss, indem $e^V + e^{-V}$ für ein reelles V immer positiv ausfällt, woraus hervorgeht, dass $Q = \sin U$ mit u stets dasselbe Zeichen hat, also Q immer unzweideutig bestimmt ist.

Dann sind aber, da nach (26) $\left[\frac{u}{Q}\right] > \left[\frac{v}{P}\right]$, die beiden Ausdrücke

$$\frac{u}{Q} + \frac{v}{P} \text{ und } \frac{u}{Q} - \frac{v}{P},$$

P mag positiv oder negativ genommen werden, immer positiv und man kann daher ein reelles V bestimmen, so dass (23) und wegen $\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P}\right)\left(\frac{u}{Q} - \frac{v}{P}\right) = 1$ auch (24) erfüllt ist, woraus dann (21) und (22) hervorgehen.

Diesen zwei Gleichungen wird somit genügt, sobald P ein beliebiges, u und Q aber einerlei Zeichen haben.

Die Aenderung des Zeichens von $P = \cos U$ führt V in $-V$ über. Wir wollen durch P' den positiven Werth von P bezeichnen.

Unter der Voraussetzung nun, dass Q mit u einerlei Zeichen hat, nehme man $\cos U = P'$; alsdann ist durch diese und die Gleichung $\sin U = Q$ ein kleinster Bogen $U = \arcsin Q$ bestimmt, so dass allgemein

$$U = 2k\pi + \arcsin Q$$

gesetzt werden kann und da nach (23)

$$V = l\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P'}\right)$$

so folgt nach (19)

$$\arcsin (u + iv) = 2k\pi + \arcsin Q + il\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P'}\right) \quad . \quad . \quad (27)$$

Nimmt man $\cos U = -P'$, dann bestimmen die Gleichungen

$$\sin U = Q \;\; ; \;\; \cos U = -P'$$

oder

$$\sin (\pi - U) = Q \;\; ; \;\; \cos (\pi - U) = P'$$

einen kleinsten Bogen $\pi - U = \arcsin Q$, so dass $U = \pi - \arcsin Q$ oder allgemein

$$U = 2k\pi + \pi - \arcsin Q$$

gesetzt werden kann und da nach (23) in diesem Falle

$$V = l\left(\frac{u}{Q} - \frac{v}{P'}\right) = -l\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P'}\right)^{*)}$$

---

*) Denn nach (26) ist $\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P'}\right)\left(\frac{u}{Q} - \frac{v}{P'}\right) = 1.$

so folgt nach (19)

$$arc\ sin\ (u + iv) = 2k\pi + \pi - arc\ sin\ Q - il\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P'}\right)$$

$$= (2k + 1)\pi - \left[arc\ sin\ Q + il\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P'}\right)\right] \quad . \quad (28)$$

Es ist daher, wenn man (27) und (28) in eine Formel zusammenzieht:

$$arc\ sin\ (u + iv) = n\pi + (-1)^n \left[arc\ sin\ Q + il\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P'}\right)\right] \quad . \quad . \quad (29)$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Anmerk. Diese Formel ist ganz analog der für reelle *arcsin*. Denn bezeichnet α den kleinsten Bogen dessen $sin = x$ ist, so hat man

$$arc\ sin\ x = \alpha + 2k\pi \text{ oder } = \pi - \alpha + 2k\pi = (2k + 1)\pi - \alpha$$

also allgemein $\quad arc\ sin\ x = n\pi + (-1)^n \alpha.$

Für $u = 0$ findet man, da $P' = 1$, $Q = 0$, $\frac{u}{Q} = \sqrt{1 + v^2}$ wird, aus (29):

$$arc\ sin\ iv = n\pi + (-1)^n\ il\ (v + \sqrt{1 + v^2}).$$

Für $v = 0$ und $[u] < 1$ ist

$$P' = \sqrt{1 - u^2},\ Q = u,\ \frac{u}{Q} = 1,\ \frac{v}{P'} = 0$$

also $\quad arc\ sin\ u = n\pi + (-1)^n\ arc\ sin\ u.$

Dagegen ist für $v = 0$, $[u] > 1$, also

$P' = 0$, $Q = \pm 1$, $\frac{u}{Q} = [u]$, $\frac{v}{P'} = \pm\sqrt{u^2 - 1}$ (einerlei Zeichen mit v):

$$arc\ sin\ u = (2k + 1)\frac{\pi}{2} \pm il\ [[u] + \sqrt{u^2 - 1}]$$

wenn man $\pm(-1)^n + 2n = 2k + 1$ setzt.

7) Es sei $\quad arc\ cos\ (u + iv) = U + iV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$

also $\quad cos\ (U + iV) = u + iv$

und nach (15)

$$cos\ U\frac{e^V + e^{-V}}{2} - i\ sin\ U\frac{e^V - e^{-V}}{2} = u + iv$$

oder $\quad sin\left(\frac{\pi}{2} + U\right)\frac{e^V + e^{-V}}{2} + i\ cos\left(\frac{\pi}{2} + U\right)\frac{e^V - e^{-V}}{2} = u + iv,$

wenn man $\frac{\pi}{2} + U = U'$ setzt,

$$sin\ U'\frac{e^V + e^{-V}}{2} + i\ cos\ U'\frac{e^V - e^{-V}}{2} = u + iv$$

$$sin\ (U' + iV) = u + iv$$

$$U' + iV = arc\ sin\ (u + iv).$$

Als allgemeinste Auflösung dieser Gleichung fanden wir aber

$$U' = n\pi + (-1)^n \, arc \sin Q$$

$$V = (-1)^n \, l\left(\frac{u}{Q} + \frac{v}{P'}\right) = (-1)^{n+1} \, l\left(\frac{u}{Q} - \frac{v}{P'}\right)$$

und es ist daher

$$U = n\pi + (-1)^n \, arc \sin Q - \frac{\pi}{2}$$

oder da $$arc \sin Q + arc \cos Q = \frac{\pi}{2}$$ ist,

$$U = n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} - arc \cos Q\right) - \frac{\pi}{2}$$

$$= (-1)^{n+1} \, arc \cos Q + \pi \left(n + \frac{(-1)^n - 1}{2}\right)$$

Berücksichtigt man nun, dass für ein gerades oder ungerades n der Ausdruck $\frac{(-1)^n - 1}{2}$ bezüglich 0 oder -1 wird, also $n + \frac{(-1)^n - 1}{2}$ stets eine gerade Zahl $2k$ ist, so kann man auch schreiben:

$$U = 2k\pi + (-1)^{n+1} \, arc \cos Q$$

und es ist daher nach (30)

$$arc \cos (u + iv) = 2k\pi + (-1)^{n+1} \, arc \cos Q + (-1)^{n+1} \, il \left(\frac{u}{Q} - \frac{v}{P'}\right)$$

$$= 2k\pi + (-1)^{n+1} \left[arc \cos Q + il \left(\frac{u}{Q} - \frac{v}{P'}\right)\right]$$

wofür man auch setzen kann:

$$arc \cos (u + iv) = 2k\pi \pm \left[arc \cos Q + il \left(\frac{u}{Q} - \frac{v}{P'}\right)\right] . \tag{31}$$

Anmerk. Bezeichnet α den kleinsten Bogen, dessen reeller *cosinus* $= x$ ist, so hat man $arc \cos x = 2k\pi + \alpha$ oder $= 2k\pi - \alpha$, also auch

$$arc \cos x = 2k\pi \pm \alpha.$$

Diese Gleichung stimmt wieder der Form nach mit (31) überein.

Für $u = 0$ wird $P' = 1$, $Q = 0$, $\frac{u}{Q} = \sqrt{1 + v^2}$,

also $$arc \cos iv = (2k + 1) \frac{\pi}{2} - (-1)^k \, il \, (v + \sqrt{1 + v^2}),$$

wenn man $2k + 1$ statt der ungeraden Zahl $4k \pm 1$ setzt.

Ist $v = 0$ und $[u] > 1$, also $P' = 0$,

$Q = \pm 1$, $\frac{u}{Q} = [u]$, $\frac{v}{P'} = \pm \sqrt{u^2 - 1}$, (einerlei Zeichen mit v),

so wird $$arc \cos u = 2k\pi \pm il \, [[u] + \sqrt{u^2 - 1}],$$

wenn u positiv, also $Q = +1$, dagegen

$$arc\,cos\,u = 2k\pi \pm [\pi + il\,[[u] \pm \sqrt{u^2 - 1}]$$
$$= (2k+1)\pi \pm il\,[[u] + \sqrt{u^2 - 1}]$$

wenn u negativ, also $arc\,cos\,Q = \pi$ ist.

Für $v = 0$ und $[u] < 1$ folgt

$$P' = \sqrt{1 - u^2},\ Q = u,\ \frac{u}{Q} = 1,\ \frac{v}{P'} = 0,$$

also
$$arc\,cos\,u = 2k\pi \pm arc\,cos\,u.$$

8) Gehen wir nun zur Untersuchung der Bedeutung von

$arc\,tg\,(u + iv)$ über.

Setzt man

$$arc\,tg\,(u + iv) = U + iV$$

also
$$tg\,(U + iV) = u + iv$$

so folgt:

$$\frac{sin\,U\,(e^V + e^{-V}) + i\,cos\,U\,(e^V - e^{-V})}{cos\,U\,(e^V + e^{-V}) - i\,sin\,U\,(e^V - e^{-V})} = u + iv \quad . \quad (32)$$

oder wenn man Zähler und Nenner durch $cos\,U\,(e^V + e^{-V})$ dividirt und

$$\frac{e^V - e^{-V}}{e^V + e^{-V}} = \frac{e^{2V} - 1}{e^{2V} + 1} = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

setzt.

$$\frac{tg\,U + iR}{1 - iR\,tg\,U} = u + iv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

oder
$$tg\,U + iR = u + vR\,tg\,U + i\,(v - uR\,tg\,U)$$

Es ist daher
$$tg\,U = u + vR\,tg\,U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

und
$$R = v - uR\,tg\,U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

oder
$$tg\,U - u = vR\,tg\,U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

und
$$R\,(1 + u\,tg\,U) = v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Durch Multiplication dieser beiden Gleichungen erhält man

$$(tg\,U - u)\,(1 + u\,tg\,U) = v^2 tg\,U$$

oder
$$\frac{2\,tg\,U}{1 - tg^2 U} = tg\,2\,U = \frac{2u}{1 - u^2 - v^2}$$

also
$$U = k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{2u}{1 - u^2 - v^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

wo k einstweilen eine beliebige positive oder negative ganze Zahl be- [illegible] Setzen wir kurzhin

$$\frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{2u}{1 - u^2 - v^2} = \alpha,$$

[illegible] man
$$U = k\frac{\pi}{2} + \alpha,$$

$$tg\,U = tg\left(k\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40$$

Je nachdem man hierin k gerade oder ungerade annimmt, wird $tg\,U = tg\,\alpha$ oder

$$tg\,U = tg\left(k\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(k\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(k\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\frac{\sin k\frac{\pi}{2}\cos\alpha}{\sin k\frac{\pi}{2}\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

und es entsprechen somit den verschiedenen Werthen von k nur zwei Werthe von $tg\,U$, wie sich solches auch schon daraus erkennen lässt, dass $tg\,U$ die Wurzel einer quadratischen Gleichung ist.

Setzt man nun das eine Mal $U = \alpha$, das andere Mal $U = \pm\frac{\pi}{2} + \alpha$, wo das Zeichen von $\frac{\pi}{2}$ so gewählt wird, dass U zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ fällt, so ist im ersten Falle $tg\,U = tg\,\alpha$, im zweiten $tg\,U = -\frac{1}{tg\,\alpha}$. Beide Resultate haben verschiedene Vorzeichen und man kann darum den Werth von U so wählen, dass $tg\,U$ mit u einerlei Zeichen erhält.

Nimmt man $U = \alpha$ und hat $tg\,\alpha$ mit u dasselbe Zeichen, so ist die Sache für sich klar. Hat aber $tg\,\alpha$ mit u entgegengesetztes Zeichen, so ist $-\frac{1}{tg\,\alpha}$ oder $tg\left(\pm\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ mit u von einerlei Zeichen.

Man setze also

$$U = \varepsilon\frac{\pi}{2} + \alpha + k\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40a)$$

wo $\varepsilon = 0, +1$ oder -1 und so bestimmt ist, dass $\alpha + \frac{\varepsilon\pi}{2}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ fällt, und $tg\left(\alpha + \varepsilon\frac{\pi}{2}\right)$ also auch $tg\,U$ mit u einerlei Zeichen hat.

Aus (35) und (36) resultirt:

$$R^2 - \frac{1 + u^2 + v^2}{v} R + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

woraus hervorgeht, dass die zwei Werthe von R, im Falle sie reell sind, dasselbe Zeichen wie v haben und reciprok sein müssen. Diese beiden Werthe sind:

$$R = \frac{1 + u^2 + v^2 \pm \sqrt{(1 + u^2 + v^2)^2 - 4v^2}}{2v}$$

Da statt des Radicanden auch

$$(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4\,(u^2 + v^2) - 4v^2 = (u^2 + v^2 - 1)^2 + 4\,u^2$$

gesetzt werden kann, so sind beide Werthe reell und nur dann einander

gleich, wenn gleichzeitig $u = 0$ und $v = \pm 1$ ist. Da $R_1 R_2 = 1$, so ist der Absolutwerth des einen grösser, der des anderen kleiner als 1, und entspricht R_1 dem positiven Zeichen des Wurzelausdruckes, so ist wegen des stets positiven Zählers von R offenbar $[R_1] > [R_2]$, daher $[R_1] > 1$ und $[R_2] < 1$. Von den beiden Werthen R_1 und R_2 ist jedoch nur R_2 zulässig. Denn schreiben wir statt (41):

$$v(R^2 + 1) - (1 + u^2 + v^2) R = 0$$

oder

$$2v(2R^2 + 2) - (1 + u^2 + v^2) 4R = 0$$

oder $2v[(R+1)^2 + (R-1)^2] - [(R+1)^2 - (R-1)^2](1 + u^2 + v^2) = 0$

oder $(R-1)^2(2v + u^2 + v^2 + 1) - (R+1)^2(u^2 + v^2 + 1 - 2v) = 0$

oder

$$\left(\frac{R+1}{R-1}\right)^2 = \frac{u^2 + (v+1)^2}{u^2 + (v-1)^2} \quad \ldots \ldots \quad (42)$$

und berücksichtigen, dass nach (33)

$$e^{2V} - 1 = R(e^{2V} + 1)$$

also

$$e^{2V} = \frac{R+1}{-R+1} = \frac{(R+1)^2}{-R^2+1}$$

und V reell, also e^{2V} positiv ist, so ergibt sich hieraus sofort, dass $R^2 < 1$ sein muss, also nur R_2 in Betracht gezogen werden kann.

Wir haben somit

$$2V = l\frac{R_2+1}{-R_2+1}, \quad V = \frac{1}{2} l \frac{R_2+1}{-R_2+1},$$

oder nach (42)

$$V = \frac{1}{4} l \frac{u^2 + (v+1)^2}{u^2 + (v-1)^2} \text{*)}$$

Da für R nur ein Werth zulässig ist, so resultirt aus (35) und (36), dass auch $tg\,U$ nur einen Werth haben kann.

Aus (36) ergibt sich dafür unzweideutig:

$$tg\,U = \frac{v - R_2}{u R_2} = \frac{v}{u}\frac{1}{R_2} - \frac{1}{u}$$

und da

$$R_1 = \frac{1}{R_2},$$

$$tg\,U = \frac{v}{u} R_1 - \frac{1}{u} = \frac{1}{2u}\left[-1 + u^2 + v^2 + \sqrt{(-1 + u^2 + v^2)^2 + 4u^2}\right]$$

Es hat daher $tg\,U$ mit u stets einerlei Vorzeichen**), wie früher schon angenommen wurde und es ist somit

---

*) Da $\frac{R_2+1}{-R_2+1}$ positiv, so ist diese Umformung offenbar gestattet.

**) Für $u^2 + v^2 > 1$ ergibt sich dieses unmittelbar; ist $u^2 + v^2 < 1$ und man sc[illegible]

$$tg\,U = \frac{1}{2u}\left[-(1 - u^2 - v^2) + \sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4u^2}\right],$$

$$U = arc\,tg\,\frac{u^2 + v^2 - 1 + \sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4u^2}}{2u} + k\pi$$

also

$$arc\,tg\,(u + iv) = k\pi + arc\,tg\,\frac{u^2 + v^2 - 1 + \sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4u^2}}{2u}$$

$$+ \frac{i}{4}\,l\,\frac{u^2 + (v + 1)^2}{u^2 + (v - 1)^2} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Berücksichtigt man (40*a*), so erhält man als allgemeinsten Werth von

$$U = \varepsilon\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{2u}{1 - u^2 - v^2} + k\pi$$

und hiernach

$$arc\,tg\,(u + iv) = \varepsilon\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{2u}{1 - u^2 - v^2} + k\pi +$$

$$+ \frac{i}{4}\,l\,\frac{u^2 + (v + 1)^2}{u^2 + (v - 1)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

wo also $\varepsilon = 0, +1$ oder -1 und so bestimmt ist, dass $\varphi = \varepsilon\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{2u}{1 - u^2 - v^2}$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ fällt, ferner $tg\,\varphi$ also auch $tg\,U$ dasselbe Zeichen wie u hat und k eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Anmerk. Diese Formel ist wiederum analog der für reelle *arc tg*. Ist α der kleinste Bogen, dessen *tg* den Werth x hat, so folgt allgemein $arc\,tg\,x = k\pi + \alpha$. Für $u = 0$ folgt aus (42), je nachdem $v^2 < 1$ oder $v^2 > 1$ ist:

$$arc\,tg\,iv = k\pi + \frac{i}{4}\,l\left(\frac{v + 1}{v - 1}\right)^{2\,*)} = k\pi + \frac{i}{2}\,l\left[\frac{v + 1}{v - 1}\right]$$

oder $$arc\,tg\,iv = (2k + 1)\,\frac{\pi}{2} + \frac{i}{2}\,l\left[\frac{v + 1}{v - 1}\right].$$

Ist $v = 0$, so resultirt:

$$arc\,tg\,u = k\pi + arc\,tg\,u.$$

9) Um endlich noch die Bedeutung von $arc\,cot\,(u + iv)$ zu ermitteln, setzen wir

$$arc\,cot\,(u + iv) = U + iV$$

also $$cot\,(U + iV) = u + iv\quad.$$

---

so folgt, da $1 - u^2 - v^2$ positiv ist, dass der Absolutwerth

$$[\sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4u^2}] > 1 - u^2 - v^2$$

also $\sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4u^2} - (1 - u^2 - v^2)$ positiv und somit wiederum U mit u dasselbe Zeichen hat.

*) Denn setzt man

$$\frac{u^2 + v^2 - 1 + \sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4u^2}}{2u} = \frac{2u}{-(u^2 + v^2 - 1) + \sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + u^2}}$$

indem man nämlich Zähler und Nenner mit $\sqrt{(u^2 + v^2 - 1)^2 + 4u^2} - (u^2 + v^2 - 1)$ multiplicirt, so geht dieser Ausdruck für $u = 0$ und $v^2 < 1$ in Null über.

oder $$tg\,(U + iV) = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} = u_1 + iv_1$$

somit $$U + iV = arc\,tg\,(u_1 + iv_1).$$

Nach (42) ist alsdann

$$arc tg\,(u_1 + iv_1) = k\pi + arc\,tg \frac{u_1^2 + v_1^2 - 1 + \sqrt{(u_1^2 + v_1^2 - 1)^2 + 4u_1^2}}{2u_1}$$
$$+ \frac{i}{4}\, l\, \frac{u_1^2 + (v_1 + 1)^2}{u_1^2 + (v_1 - 1)^2}$$

und wenn man wieder

$$u_1 = \frac{u}{u^2 + v^2}\;;\; v_1 = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

setzt und reducirt

$$arc\,tg\,(u_1 + iv_1) = arc\,cot\,(u + iv) = k\pi$$
$$+ arc\,tg\, \frac{1 - u^2 - v^2 + \sqrt{(1 - u^2 - v^2)^2 + 4u^2}}{2u}$$
$$+ \frac{i}{4}\, l\, \frac{u^2 + (v - 1)^2}{u^2 + (v + 1)^2} \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

Geht man von der Gleichung (43) aus, so folgt:

$$arc\,tg\,(u_1 + iv_1) = \delta\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\, arc\,tg\, \frac{2u_1}{1 - u_1^2 - v_1^2} + k\pi$$
$$+ \frac{i}{4}\, l\, \frac{u_1^2 + (v_1 + 1)^2}{u_1^2 + (v_1 - 1)^2}$$

wo δ so zu bestimmen ist, dass

$$\gamma = \delta\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\, arc\,tg\, \frac{2u_1}{1 - u_1^2 - v_1^2}$$

zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ fällt und $tg\gamma$ dasselbe Zeichen mit $u_1 = \frac{u}{u^2 + v^2}$ also mit u hat.

Hiernach wird

$$arc\,cot\,(u + iv) = \delta\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\, arc\,tg\, \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1} + k\pi$$
$$+ \frac{i}{4}\, l\, \frac{u^2 + (v - 1)^2}{u^2 + (v + 1)^2} \quad \ldots \ldots \quad (45)$$

in (43) $\varepsilon = 0$, so hat $tg\,\alpha$ dasselbe Zeichen wie u. Alsdann aber in (45) $\delta = \pm 1$ sein, denn da nun $tg\left(\delta\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \pm\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{1}{tg\,\alpha}$ wird, so hat $tg\left(\delta\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ mit u einerlei Zeichen.

dagegen in (43) $\varepsilon = \pm 1$, so hat $tg\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)$ dasselbe Zeichen

wie u, oder dieses dasselbe Zeichen wie $-\frac{1}{tg\,\alpha}$, also $tg\,\alpha$ das entgegengesetzte Zeichen von u und es muss dann in (45) $\delta = 0$ sein, weil nun $tg\left(\delta\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -tg\,\alpha$ ist, also dasselbe Zeichen wie u hat.

In den beiden Formeln (43) und (45) ist somit $\delta = 0$ zu setzen, wenn $\varepsilon = \pm 1$ und $\delta = \pm 1$, wenn $\varepsilon = 0$ ist.

Durch Addition resultirt aus (43) und (45):

$$arc\,tg\,(u + iv) + arc\,cot\,(u + iv) = (\varepsilon + \delta)\frac{\pi}{2} + k_1\pi$$
$$= (2k_2 + 1)\frac{\pi}{2}$$

weil $\varepsilon + \delta = \pm 1$ ist.

Anmerk. Der Formel (44) entspricht für reelle cot die bekannte Relation $arc\,cot\,x = k\pi + \alpha$.

§. 49. Differentialquotienten complexer Ausdrücke.

1) Jeder complexe Ausdruck $f(x, i)$ lässt sich auf die Form bringen

$$f(x, i) = \varphi(x) + i\psi(x).$$

Bilden wir den Differentialquotienten ganz analog wie bei reellen Functionen, so wird, wenn Δx die Aenderung von x bezeichnet,

$$\frac{\Delta f(x, i)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, i) - f(x, i)}{\Delta x}$$
$$= \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} + i\frac{\psi(x + \Delta x) - \psi(x)}{\Delta x}$$

also durch den Uebergang zur Grenze,

$$\frac{df(x, i)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + i\frac{d\psi(x)}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wodurch der Differentialquotient definirt ist.

2) Um zunächst den Differentialquotienten von $y = (a + bi)(u + iv)$ zu untersuchen, wenn a und b Constante, dagegen u und v reelle Functionen von x bezeichnen, entwickeln wir das Product und erhalten

$$y = au - bv + i(av + bu).$$

Nach (1) wird alsdann

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} - b\frac{dv}{dx} + i\left(a\frac{dv}{dx} + b\frac{du}{dx}\right)$$
$$= (a + bi)\left(\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right) = (a + bi)\frac{d}{dx}(u + iv).$$

Wir sehen also, dass auch hier der constante Factor vor das Differentialzeichen tritt.

3) Sind $f, f_1, f_2, \ldots$ Functionen von x und i und ist

$$f = u + iv;\ f_1 = u_1 + iv_1;\ f_2 = u_2 + iv_2;\ \ldots$$

so folgt

$$f + f_1 + f_2 + \ldots = u + u_1 + u_2 + \ldots + i(v + v_1 + v_2 + \ldots)$$

also

$$\frac{d}{dx}(f + f_1 + f_2 + \ldots) = \frac{du}{dx} + \frac{du_1}{dx} + \ldots + i\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_1}{dx} + \ldots\right)$$

$$= \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} + \frac{du_1}{dx} + i\frac{dv_1}{dx} + \ldots$$

$$= \frac{d}{dx}(u + iv) + \frac{d}{dx}(u_1 + iv_1) + \ldots = \frac{df}{dx} + \frac{df_1}{dx} + \ldots$$

was mit §. 15 übereinstimmt.

4) Aus 2 und 3 folgt unmittelbar, wenn $f, f_1, f_2, \ldots$ die obige Bedeutung beibehalten und $a, a_1, a_2 \ldots b, b_1, b_2, \ldots$ Constante bezeichnen:

$$\frac{d}{dx}\left[(a + bi)f + (a_1 + b_1 i)f_1 + (a_2 + b_2 i)f_2 + \ldots\right] =$$

$$(a + bi)\frac{df}{dx} + (a_1 + b_1 i)\frac{df_1}{dx} + (a_2 + b_2 i)\frac{df_2}{dx} + \ldots$$

5) Ist $f = u + iv$; $\varphi = u_1 + iv_1$

so folgt $f \cdot \varphi = (u + iv)(u_1 + iv_1) = uu_1 - vv_1 + i(uv_1 + vu_1)$

und hieraus

$$\frac{d(f \cdot \varphi)}{dx} = u\frac{du_1}{dx} - v\frac{dv_1}{dx} + i\left(u\frac{dv_1}{dx} + v\frac{du_1}{dx}\right)$$

$$+ u_1\frac{du}{dx} - v_1\frac{dv}{dx} + i\left(v_1\frac{du}{dx} + u_1\frac{dv}{dx}\right)$$

$$= (u + iv)\left(\frac{du_1}{dx} + i\frac{dv_1}{dx}\right) + (u_1 + iv_1)\left(\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right)$$

oder
$$\frac{d(f \cdot \varphi)}{dx} = f\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\frac{df}{dx}$$

oder
$$(f\varphi)' = f\varphi' + \varphi f'$$

also auch
$$\frac{(f\varphi)'}{f\varphi} = \frac{f'}{f} + \frac{\varphi'}{\varphi}$$

in Uebereinstimmung mit §. 16.

6) Behalten f und φ die obige Bedeutung bei, so wird

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{u + iv}{u_1 + iv_1} = U + iV = \psi$$

al[illegible]
$$f = \varphi \cdot \psi;\ \frac{df}{dx} = \varphi\frac{d\psi}{dx} + \psi\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} - \psi\frac{d\varphi}{dx} = \varphi\frac{d\psi}{dx}$$

und hiernach

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\frac{df}{dx} - \psi\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi} = \frac{\varphi\frac{df}{dx} - \varphi\psi\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi^2}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\frac{df}{dx} - f\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi^2}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{\left(\frac{f}{\varphi}\right)'}{\frac{f}{\varphi}} = \frac{f'}{f} - \frac{\varphi'}{\varphi}$$

und worin wir die bekannte Regel für den Differentialquotienten eines Bruches erkennen (§. 17).

7) Bezeichnet ψ eine reelle Function von x, so ist

$$\frac{d}{dx}(\cos\psi + i\sin\psi) = -\sin\psi\frac{d\psi}{dx} + i\cos\psi\frac{d\psi}{dx}$$

$$= (\cos\psi + i\sin\psi)\, i\,\frac{d\psi}{dx}$$

also

$$\frac{\frac{d}{dx}(\cos\psi + i\sin\psi)}{\cos\psi + i\sin\psi} = i\,\frac{d\psi}{dx};$$

ferner wird, wenn auch r eine reelle Function von x und

$$f = u + iv = r(\cos\psi + i\sin\psi)$$

nach (5)

$$\frac{f'}{f} = \frac{r'}{r} + i\psi'.$$

Nennen wir nun wieder in Uebereinstimmung mit dem früheren $\frac{f'}{f}$ den logarithmischen Differentialquotienten einer complexen Function, so erhalten wir also folgenden allgemeinen Satz:

Der logarithmische Differentialquotient einer complexen Function ist gleich dem logarithmischen Differentialquotienten des Moduls mehr dem Producte aus dem Differentialquotienten der Amplitude und der complexen Einheit.

Anmerk. Ist $\varphi = u_1 + iv_1 = r_1(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)$
also $f\cdot\varphi = rr_1[\cos(\psi + \psi_1) + i\sin(\psi + \psi_1)]$
so ergeben sich die Sätze 5 und 6 leicht auf folgende Weise:

Da $\frac{f'}{f} = \frac{r'}{r} + i\psi'$; $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{r_1'}{r_1} + i\psi_1'$

also $\frac{f'}{f} + \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{(rr_1)'}{rr_1} + i(\psi + \psi_1)'$

und auch $$\frac{(f\varphi)'}{f\varphi} = \frac{(rr_1)'}{rr_1} + i\,(\psi + \psi_1)'$$
ist, so folgt:
$$\frac{(f\varphi)'}{f\varphi} = \frac{f'}{f} + \frac{\varphi'}{\varphi}\ ;\ (f\varphi)' = \varphi f' + f\varphi'$$
oder
$$\frac{d\,(f\varphi)}{dx} = \varphi\,\frac{df}{dx} + f\,\frac{d\varphi}{dx}$$
Für mehr als zwei Functionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ folgt
$$\frac{(f_1 f_2 \ldots f_n)'}{f_1 f_2 \ldots f_n} = \frac{f_1'}{f_1} + \frac{f_2'}{f_2} + \ldots + \frac{f_n'}{f_n} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$
Ferner hat man
$$\frac{f}{\varphi} = \frac{r}{r_1}\,[\cos\,(\psi - \psi_1) + i \sin\,(\psi - \psi_1)]$$
also
$$\frac{\left(\frac{f}{\varphi}\right)'}{\frac{f}{\varphi}} = \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)'}{\frac{r}{r_1}} + i\,(\psi - \psi_1)'$$
oder, da auch
$$\frac{f'}{f} - \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{r_1 r' - r r_1'}{rr_1} + i\,(\psi' - \psi_1') = \frac{\left(\frac{r}{r_1}\right)'}{\frac{r}{r_1}} + i\,(\psi - \psi_1)',$$
$$\frac{\left(\frac{f}{\varphi}\right)'}{\frac{f}{\varphi}} = \frac{f'}{f} - \frac{\varphi'}{\varphi}$$
also
$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)' = \frac{\varphi f' - f\varphi'}{\varphi^2}$$
oder
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{\varphi}\right) = \frac{\varphi\,\frac{df}{dx} - f\,\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi^2}.$$

8) Setzt man in der Gl. (α) $f_1 = f_2 = f_3 = \ldots = f_n = f$, so erhält man unmittelbar
$$\frac{(f^n)'}{f^n} = n\,\frac{f'}{f}$$
und hieraus $$(f^n)' = nf^{n-1}\,f'$$
oder $$\frac{df^n}{dx} = nf^{n-1}\,\frac{df}{dx}$$
was mit §. 18 übereinstimmt.

Um nun zu zeigen, dass diese Regel auch hier für gebrochene und negative Exponenten Giltigkeit hat, sei
$$f = u + iv = r\,(\cos\psi + i \sin\psi)$$
$$= r\,[\cos\,(\psi + 2k\pi) + i \sin\,(\psi + 2k\pi)]$$
w[illegible] ganze Zahl bezeichnet, so ist
$$f^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\,\left[\cos\frac{m}{n}\,(\psi + 2k\pi) + i \sin\frac{m}{n}\,(\psi + 2k\pi)\right]$$
od[illegible]n man den Bruch $\frac{m}{n} = \mu$ setzt,

$$f^\mu = r^\mu \left[\cos \mu (\psi + 2k\pi) + i \sin \mu (\psi + 2k\pi)\right]$$

aus welcher Gleichung sich die n Werthe von f^μ ergeben, wenn man darin der Reihe nach $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n-1)$ setzt. Für $k = 0$ erhält man den sogenannten Hauptwerth

$$f^\mu = r^\mu (\cos \mu\psi + i \sin \mu\psi)$$

den wir auch allein berücksichtigen wollen.

Nach Obigem ist nun

$$\frac{(f^\mu)'}{f^\mu} = \mu \frac{r'}{r} + i\, \mu\psi' = \mu \left(\frac{r'}{r} + i\psi'\right)$$

und
$$\frac{f'}{f} = \frac{r'}{r} + i\psi'$$

folglich
$$\frac{(f^\mu)'}{f^\mu} = \mu \frac{f'}{f}\,;\ (f^\mu)' = \mu\, f^{\mu-1} f'$$

oder
$$\frac{df^\mu}{dx} = \mu f^{\mu-1} \frac{df}{dx}.$$

Versteht man analog dem früheren unter $f^{-\mu}$ den Bruch $\frac{1}{f^\mu}$, so hat man für negative Exponenten:

$$\frac{(f^{-\mu})'}{f^{-\mu}} = \frac{\left(\frac{1}{f^\mu}\right)'}{\frac{1}{f^\mu}} = -\mu \frac{f'}{f}$$

und hieraus
$$(f^{-\mu})' = -\mu f^{-\mu-1} f'$$

oder
$$\frac{df^{-\mu})}{dx} = -\mu f^{-\mu-1} \frac{df}{dx}$$

Die in §. 18 für den Differentialquotienten einer Potenz entwickelten Regeln gelten somit für jeden Exponenten auch bei complexen Functionen.

9) Um den Differentialquotienten einer Exponentialgrösse mit complexen Variabeln zu ermitteln, berücksichtige man, dass nach §. 48 (6) zu setzen ist

$$a^{u+iv} = a^u \left[\cos (vla) + i \sin (vla)\right].$$

Man hat alsdann nach 5:

$$\frac{(a^{u+iv})'}{a^{u+iv}} = \frac{(a^u)'}{a^u} + i\,(vla)'$$

$$= la \,.\, u' + i\, la \,.\, v' = (u' + iv')\, la$$

oder
$$(a^{u+iv})' = a^{u+iv} (u' + iv')\, la$$

oder
$$\frac{d}{dx}\, a^{u+iv} = a^{u+iv}\, la \frac{d}{dx} (u + iv)$$

also dieselbe Regel wie in §. 19.

Hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{d}{dx} e^{u+iv} = e^{u+iv} \frac{d}{dx}(u+iv)$$

10) Zur Bestimmung des Differentialquotienten eines complexen Logarithmus setzen wir

$$log^{(a)}(u+iv) = U + iV$$

so wird

$$a^{U+iV} = u + iv$$

oder wenn man beiderseits den logarithmischen Differentialquotienten nimmt,

$$(U' + iV')\, la = \frac{u' + iv'}{u + iv}$$

also
$$U' + iV' = \frac{1}{la} \frac{u' + iv'}{u + iv} = (log^{(a)}(u+iv))'$$

in Uebereinstimmung mit §. 20.

11) Um den Differentialquotienten der goniometrischen Functionen complexer Bogen zu bestimmen, setze man nach §. 48 (14a)

$$2\cos(u+iv) = e^{-v+iu} + e^{v-iu}$$
$$2i\sin(u+iv) = e^{-v+iu} - e^{v-iu}$$

so wird

$$2\frac{d}{dx}\cos(u+iv) = e^{-v+iu}\frac{d}{dx}(-v+iu) + e^{v-iu}\frac{d}{dx}(v-iu).$$
$$= 2i^2\sin(u+iv)\frac{d}{dx}(u+iv)$$
$$2i\frac{d}{dx}\sin(u+iv) = 2i\cos(u+iv)\frac{d}{dx}(u+iv)$$

also
$$\frac{d}{dx}\cos(u+iv) = -\sin(u+iv)\frac{d}{dx}(u+iv)$$
$$\frac{d}{dx}\sin(u+iv) = \cos(u+iv)\frac{d}{dx}(u+iv).$$

Hiernach findet man:

$$\frac{d}{dx} tg(u+iv) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(u+iv)}{\cos(u+iv)} = \frac{\frac{d}{dx}(u+iv)}{\cos^2(u+iv)}$$

$$\frac{d}{dx}\cot(u+iv) = \frac{d}{dx}\frac{1}{tg(u+iv)} = -\frac{\frac{d}{dx}(u+iv)}{\sin^2(u+iv)}$$

Sämmtliche Formeln stimmen mit den betreffenden für reelle Bogen überein.

12) Setzt man zur Bestimmung des Differentialquotienten von $arc\ sin\ (u + iv)$ nach §. 48, 6.

$$arc\ sin\ (u + iv) = U + iV\ ;\ sin\ (U + iV) = u + iv$$

so folgt:

$$cos\ (U + iV) \frac{d}{dx} (U + iV) = \frac{d}{dx} (u + iv)$$

also $\frac{d}{dx} (U + iV) = \frac{\frac{d}{dx} (u + iv)}{cos\ (U+iV)} = \frac{\frac{d}{dx} (u + iv)}{\sqrt{1 - sin^2 (U + iV)}}$;

daher ergibt sich:

$$\frac{d}{dx}\ arc\ sin\ (u + iv) = \frac{\frac{d}{dx} (u + iv)}{\sqrt{1 - (u + iv)^2}}.$$

13) Setzt man

$$arc\ cos\ (u + iv) = U + iV$$

also

$$cos\ (U + iV) = u + iv$$

$$-\ sin\ (U + iV) \frac{d}{dx} (U+iV) = \frac{d}{dx} (u + iv)$$

so folgt:

$$\frac{d}{dx} (U + iV) = -\frac{\frac{d}{dx} (u + iv)}{sin\ (U+iV)}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\ arc\ cos\ (u + iv) = -\frac{\frac{d}{dx} (u + iv)}{\sqrt{1 - (u + iv)^2}}.$$

14) Wird ferner $arctg\ (u + iv) = U + iV$

also

$$tg\ (U + iV) = u + iv$$

$$\frac{\frac{d}{dx} (U + iV)}{cos^2 (U + iV)} = \frac{d}{dx} (u + iv)$$

oder

$$\frac{d}{dx} (U + iV) = cos^2 (U + iV) \frac{d}{dx} (u + iv)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx} (u + iv)}{1 + tg^2 (U + iV)}$$

gesetzt, so folgt:

$$\frac{d}{dx}\ arc\ tg\ (u + iv) = \frac{\frac{d}{dx} (u + iv)}{1 + (u + iv)^2}.$$

15) Zur Bestimmung von $\frac{d}{dx} arc\,cot\,(u+iv)$

setze $$arc\,cot\,(u+iv) = U + iV$$

also $cot\,(U+iV) = u + iv;\ -\frac{\frac{d}{dx}(U+iV)}{sin^2(U+iV)} = \frac{d}{dx}(u+iv)$

so folgt:

$$\frac{d}{dx} arc\,cot\,(u+iv) = -sin^2(U+iV)\frac{d}{dx}(u+iv) = -\frac{\frac{d}{dx}(u+iv)}{1+cot^2(U+iV)}$$

oder $$\frac{d}{dx} arc\,cot\,(u+iv) = -\frac{\frac{d}{dx}(u+iv)}{1+(u+iv)^2}.$$

Somit stimmen auch die Regeln der Differentiation cyclometrischer Functionen mit complexen Variabeln mit den früher für solche Functionen mit reellen Variabeln aufgefundenen genau überein.

Durch Einführung complexer Ausdrücke lässt sich in vielen Fällen die Bestimmung der höheren Differentialquotienten wesentlich vereinfachen. Dies zeigen nachstehende

Beispiele.

1) Um den $n$ten Differentialquotienten von $y = arc\,tg\,x$ zu bestimmen, setzen wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

so folgt hieraus:

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{1}{2i}\left[\frac{d^n(x-i)^{-1}}{dx^n} - \frac{d^n(x+i)^{-1}}{dx^n}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(-1)^n\, n!\,(x-i)^{-n-1} - (-1)^n n!\,(x+i)^{-n-1}\right]$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{2i}\left[(x-i)^{-n-1} - (x+i)^{-n-1}\right].$$

Soll der $n$te Differentialquotient von $\frac{x+3}{x^2+2x+5}$ bestimmt wer-
so setze man

$$\frac{x+3}{+2x+5} = \frac{1+i}{2}(x+1+2i)^{-1} + \frac{1-i}{2}(x+1-2i)^{-1}$$

dann folgt:

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{x+3}{x^2+2x+5} = (-1)^n \frac{n!}{2}\left[(1+i)(x+1+2i)^{-n-1} + (1-i)(x+1-2i)^{-n-1}\right].$$

3) Zur Bestimmung des $n$ten Differentialquotienten von $\frac{x^2+4x}{x^3-x^2+4x-4}$ setze man

$$\frac{x^2+4x}{x^3-x^2+4x-4} = \frac{1}{x-1} + \frac{i}{x+2i} - \frac{i}{x-2i}$$

so folgt:

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^2+4x}{x^3-x^2+4x-4} = (-1)^n n!\left[(x-1)^{-n-1} + i(x+2i)^{-n-1} - i(x-2i)^{-n-1}\right].$$

Fünfter Abschnitt.

Entwickelung der Functionen in Reihen.

§. 50. Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe für Functionen von einer Veränderlichen.

1) Sind $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ stetige Functionen von t, deren Differentialquotienten $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ nach t aber einwerthig innerhalb der Grenzen 0 und t, diese Grenzen mit inbegriffen*), und nehmen wir an, es könne $\psi'(t)$ wohl an den Grenzen, nicht aber innerhalb derselben 0 oder ∞ werden, so ist nach §. 40. (2)

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{\psi(t) - \psi(0)} = \frac{\varphi'(t_1)}{\psi'(t_1)} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

wo

$$0 < t_1 < t.$$

Genügen φ und ψ ausserdem der Bedingung

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0$$

so ergibt sich aus (1):

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi'(t_1)}{\psi'(t_1)} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Setzen wir, um dieses Resultat zu vereinfachen,

$$\psi(t) = \frac{d^m t^n}{dt^m} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)\,t^{n-m}$$

wo $n > m$ eine positive ganze Zahl bedeutet, also der Exponent $n - m$ nicht Null ist, und für $m = 0 : \psi(t) = t^n$, so sind bezüglich der Function $\psi(t)$ die obigen Bedingungen erfüllt. Die G[...]it der Gleichung (2) setzt daher bei dieser Annahme n[...]h voraus, dass $\varphi(t)$ stetig, $\varphi'(t)$ einwerthig von $t = 0$ bi[...] $= t$ und $\varphi(0) = 0$ sei. Ist nun $\psi'(t_1)$ abhängig von t_1

---

*) [D]ass φ und ψ auch noch andere, von t unabhängige Grössen x, y u. s. w. en[...] [k]önnen, ist klar.

so folgt unter der Berücksichtigung, dass $\psi'(t_1)$ allen nothwendigen Bedingungen genügt, durch Anwendung der Gl. (2) auf den Bruch $\frac{\varphi'(t_1)}{\psi'(t_1)}$ unmittelbar:

$$\frac{\varphi'(t_1)}{\psi'(t_1)} = \frac{\varphi''(t_2)}{\psi''(t_2)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wenn innerhalb der Grenzen 0 und t*) die Function $\varphi'(t_1)$ stetig, $\varphi''(t_1)$ aber einwerthig, $\varphi'(0) = 0$ und $0 < t_2 < t_1$ ist.

Aus (2) und (3) fliesst:

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(t_2)}{\psi''(t_2)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

wo also φ und φ' stetig**), φ'' einwerthig innerhalb der Grenzen 0 bis t, $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ ist.

Ist nun wieder $\psi''(t_2)$ abhängig von t_2 und man bringt abermals den Satz (2) in Anwendung, so resultirt:

$$\frac{\varphi''(t_2)}{\psi''(t_2)} = \frac{\varphi'''(t_3)}{\psi'''(t_3)} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

wo $0 < t_3 < t_2$, φ'' stetig, φ''' einwerthig innerhalb der Grenzen 0 bis t und $\varphi''(0) = 0$ ist.

Aus (4) und (5) erhält man:

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi'''(t_3)}{\psi'''(t_3)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

wenn $\varphi, \varphi', \varphi''$ stetig, φ''' einwerthig bleibt innerhalb der Grenzen 0 bis t und $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ ist.

Analog findet man allgemein:

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi^{(\mu)}(t_\mu)}{\psi^{(\mu)}(t_\mu)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wenn $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(\mu-1)}$ stetig, $\varphi^{(\mu)}$ einwerthig bleibt innerhalb der Grenzen 0 bis t und $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(\mu-1)}(0) = 0$ ist.

Berücksichtigt man nun, dass $\psi^{(n)}(t_n) = n!$ ist, so geht (7) für $\mu = n$ und $\psi(t) = t^n$ über in:

$$\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi^{(n)}(t_n)}{n!} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

wo nun $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(n-1)}$ stetig, $\varphi^{(n)}$ einwerthig innerhalb 0 bis t bleibt und $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$ ist.

Es sei nun

$$\varphi(t) = f(x+t) - f(x) - tf'(x)$$
$$\psi(t) = t^2, \text{ also } n = 2,$$

*) Die Grenzen sind eigentlich in diesem Falle 0 und t_1; wir wählen aber [der] Einfachheit wegen die weiter gehenden 0 und t, welche im Folgenden sich als n[oth]wendig erweisen.

**) Dies schliesst die Einwerthigkeit von φ' innerhalb 0 bis t in sich.

so wird $\varphi'(t) = f'(x+t) - f'(x)$; $\varphi''(t) = f''(x+t)$
und die genannten Bedingungen für φ sind erfüllt, sobald innerhalb der Grenzen x bis $x+t$ die Functionen f, f' stetig bleiben, dagegen f'' einwerthig ist*). Unter dieser Voraussetzung hat man nach (8)

$$\frac{f(x+t) - f(x) - tf'(x)}{t^2} = \frac{f''(x+t_2)}{2!}.$$

also
$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) + \frac{t^2}{1.2} f''(x+t_2).$$

Setzen wir nun

$$\varphi(t) = f(x+t) - f(x) - tf'(x) - \frac{t^2}{1.2} f''(x)$$

also
$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= f'(x+t) - f'(x) - tf''(x) \\ \varphi''(t) &= f''(x+t) - f''(x) \\ \varphi'''(t) &= f'''(x+t) \\ \psi(t) &= t^3;\; n = 3 \end{aligned}$$

so sind die an φ gestellten Bedingungen erfüllt, wenn innerhalb der Grenzen x bis $x+t$ die Functionen f, f', f'' stetig bleiben, f''' aber einwerthig ist. Man hat alsdann nach (8)

$$\frac{f(x+t) - f(x) - tf'(x) - \frac{t^2}{1.2} f''(x)}{t^3} = \frac{f'''(x+t_3)}{3!}$$

und hiernach

$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) + \frac{t^2}{1.2} f''(x) + \frac{t^3}{1.2.3} f'''(x+t_3).$$

Allgemein wird man somit erhalten:

$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) + \frac{t^2}{1.2} f''(x) + \frac{t^3}{1.2.3} f'''(x)$$
$$+ \ldots + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta t) \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo
$$0 < \theta < 1.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ist nach ihrer Herleitung an die Bedingungen geknüpft, dass innerhalb der Grenzen x bis $x+t$ die Fu[illegible]tionen $f, f', f'', \ldots f^{(n)}$ stetig seien, dagegen $f^{(n+1)}$ einwerthig bl[illegible]e. Es ist klar, dass $x+\theta t$ niemals dem Werthe, für welchen $f^{[illegible]}$[illegible]$x)$ etwa unendlich wird, gleich werden kann, weil sonst die v[illegible]ende Gleichung einen Widerspruch in sich fassen würde.

---

*) [illegible]iese Bedingungen müssen natürlich hier durchaus innerhalb der gesteckten Grenzen u[illegible]t etwa innerhalb engerer Grenzen erfüllt sein.

Sind alle Differentialquotienten von $f(x)$ stetig und ist $\lim \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta t)$ Null für $n=\infty$, so erhält man:

$$f(x+t)=f(x)+\frac{t}{1}f'(x)+\frac{t^2}{1.2}f''(x)+\frac{t^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots(9a)$$

Anmerk. Die Reihe (9a), welche nach ihrem Begründer die Taylor'sche Reihe genannt wird, gibt die Entwickelung von $f(x+t)$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreitende und convergirende Reihe, wenn obige Bedingungen erfüllt sind. Die Grösse $\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta t)$ wird gewöhnlich das Restglied der Taylor'schen Reihe genannt.

2) Um dem Restgliede noch eine andere Form zu geben, gehen wir von dem Satze (2) des §. 40 aus und schreiben

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}=\frac{\varphi'[a+\theta(b-a)]}{\psi'[a+\theta(b-a)]} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wo φ, ψ Functionen von t und φ', ψ' die Differentialquotienten derselben nach t bezeichnen und die Bedingungen erfüllt sein müssen, dass φ und ψ innerhalb der Grenzen $t=a$ bis $t=b$ stetig, φ' und ψ' aber einwerthig seien.*)

Während wir in obiger Entwickelung der Reihe (9) $\psi(t)$ einer Potenz von t gleich setzten, wollen wir nun annehmen, es sei

$$\psi(t)=b^{n+1}-(b-t)^{n+1}$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Alsdann wird

$$\psi'(t)=(n+1)(b-t)^n$$

und die an die Function ψ gestellten Bedingungen sind hiernach erfüllt. Man hat daher:

$$\psi(b)=b^{n+1}\,;\ \psi(a)=b^{n+1}-(b-a)^{n+1}$$
$$\psi(b)-\psi(a)=(b-a)^{n+1}$$
$$\psi'[a+\theta(b-a)]=(n+1)[b-a-\theta(b-a)]^n$$
$$=(n+1)(b-a)^n(1-\theta)^n$$

also nach (10):

$$\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'[a+\theta(b-a)]\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)(b-a)^n(1-\theta)^n}$$
$$=\varphi'[a+\theta(b-a)]\frac{b-a}{(n+1)(1-\theta)^n} \quad . \quad (11)$$

Aus dieser Relation lassen sich wichtige Resultate ableiten, w[illegible]n man für φ eine Function von t in Form einer Reihe setzt und d[illegible]e letztere so wählt, dass φ' sich auf ein Glied reducirt.

*) ψ' darf bekanntlich an den Grenzen 0 oder ∞ werden, nicht aber innerhalb [illegible]r-selben. Weil nun ψ' einwerthig ist und innerhalb der Grenzen nicht ∞ wird, [illegible]st diese Function innerhalb der Grenzen stetig und kann somit ihr Zeichen in di[illegible]m Intervalle nicht ändern, weil sie sonst Null würde.

Setzen wir, um eine solche Reihe zu finden,

$$\varphi = \alpha + m\beta + m^2\gamma + m^3\delta + \ldots + m^{p-1}\sigma + m^p\tau$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \sigma, \tau, m$ Functionen von t sind, so folgt

$$\begin{aligned}\varphi' = \alpha' &+ m\beta' + m^2\gamma' + m^3\delta' + \ldots + m^{p-1}\sigma' + m^p\tau' \\ &m'\beta + 2m\gamma m' + 3m^2\delta m' + 4m^3\varepsilon m' + \ldots + pm^{p-1}m'\tau.\end{aligned}$$

Wenn wir nun die bisher beliebig angenommenen Functionen so bestimmen, dass

$$\alpha' + m'\beta = 0\,;\ \beta' + 2\gamma m' = 0\,;\ \gamma' + 3\delta m' = 0\,;\ \ldots\ \sigma' + p\tau m' = 0$$

so wird

$$\beta = -\frac{\alpha'}{m'}\,;\ \gamma = -\frac{\beta'}{2m'} = \frac{1}{1.2}\,\frac{\left(\frac{\alpha'}{m'}\right)'}{m'}$$

$$\delta = -\frac{\gamma'}{3m'} = -\frac{1}{1.2.3}\,\frac{\left(\frac{\left(\frac{\alpha'}{m'}\right)'}{m'}\right)'}{m'}, \ldots$$

und

$$\varphi' = m^p\tau'.$$

Wählen wir nun der Einfachheit halber

$$m = b - t\,;\ m' = -1$$

so ist $\beta = \alpha'\,;\ \gamma = -\dfrac{\beta'}{2m'} = \dfrac{\alpha''}{2}\,;\ \delta = \dfrac{\alpha'''}{1.2.3}\,;\ldots$

folglich

$$\varphi = \alpha + (b-t)\,\alpha' + (b-t)^2\,\frac{\alpha''}{2} + (b-t)^3\,\frac{\alpha'''}{1.2.3} + \ldots + (b-t)^p\,\frac{\alpha^{(p)}}{p!}$$

$$\varphi' = (b-t)^p\,\frac{\alpha^{(p+1)}}{p!}.$$

Damit nun φ und φ' den obigen Bedingungen genügen, müssen innerhalb der Grenzen a bis b die Functionen $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots \alpha^{(p)}$ stetig und $\alpha^{(p+1)}$ einwerthig sein.

Es sei nun $\alpha = f(t)$, also

$$(t) + (b-t)\,f'(t) + \frac{(b-t)^2}{1.2}\,f''(t) + \ldots + \frac{(b-t)^p}{p!}\,f^{(p)}(t)$$

$$\frac{(b-t)^p}{p!}\,f^{(p+1)}(t)$$

gt

$$= f(b)$$

$$= f(a) + (b-a)\,f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2}\,f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^p}{p!}\,f^{(p)}(a)$$

$$\varphi'[a+\Theta(b-a)] = \frac{[b-a-\Theta(b-a)]^p}{p!} f^{(p+1)}[a+\Theta(b-a)]$$
$$= \frac{(b-a)^p}{p!}(1-\Theta)^p f^{(p+1)}[a+\Theta(b-a)]$$

und somit nach (11)

$$f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) - \frac{(b-a)^2}{1\,.\,2}f''(a) - \ldots - \frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)$$
$$= \frac{(b-a)^{p+1}}{p!\,(n+1)}(1-\Theta)^{p-n} f^{(p+1)}[a+\Theta(b-a)] \quad . \quad . \quad (12)$$

oder wenn man hierin $p = n$ setzt,

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\,.\,2}f''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[a+\Theta(b-a)]\,. \quad (13)$$

Für $n = 0$ folgt aus (12):

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1\,.\,2}f''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a) + \frac{(b-a)^{p+1}}{p!}(1-\Theta)^p f^{(p+1)}[a+\Theta(b-a)]\,. (14)$$

Setzt man nun in (13) und (14) $a = x$; $b = x + h$ und ausserdem in (14) n statt des ganz willkürlichen Exponenten p, so folgt bezüglich:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\Theta h) \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\Theta)^n f^{(n+1)}(x+\Theta h) \quad . \quad (16)$$

Wir erkennen in (15) und (16) wiederum die oben schon in (9) erhaltene Reihe, nur erscheint in (16) das Restglied unter einer anderen Form.

3) Nähert sich das Restglied, welches wir in der Folge durch R_n bezeichnen, mit wachsendem n der Null und sind alle Differenti[al-]quotienten innerhalb der bezeichneten Grenzen stetig, so ist die Rei[he] nach §. 6. 3. convergent und man kann alsdann setzen:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \ldots \textit{ in inf.} \quad . \quad . \quad (1$$

Man darf aber nicht umgekehrt schliessen, dass wenn die Rei[he] (17) convergirt, nothwendig auch die rechte Seite dieser Gleichung d

linken gleich sei, da dieser Schluss nur dann richtig ist, wenn

$$lim\, R_n = 0.$$

Denn aus (15) oder (16) folgt unmittelbar

$$f(x+h) - R_n = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \,.\, 2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

und hieraus, wenn man zur Grenze übergeht,

$$f(x+h) - lim\, R_n = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \ldots .$$

Da nun die rechte Seite dieser Gleichung nach der Voraussetzung convergirt, so muss $lim\, R_n$ einen endlichen Werth haben.

Ist somit $lim\, R_n$ nicht Null, sondern etwa α, so wird

$$f(x+h) - \alpha = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \,.\, 2} f''(x) + \ldots$$

4) Obgleich sich der Werth des Restgliedes wegen der Unbestimmtheit des echten Bruches θ nicht genau ermitteln lässt, so kann man doch immer zwei Grenzen angeben, innerhalb welcher derselbe liegen muss.

Bezeichnen K und G den kleinsten und grössten Werth, welchen $f^{(n+1)}(x)$ innerhalb der Grenzen x bis $x+h$ annehmen kann, so liegt der Werth des Restgliedes offenbar zwischen $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} K$ und $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} G$ und man ist hiernach im Stande den Fehler abzuschätzen, welcher begangen wird, wenn man in der Taylor'schen Reihe von irgend einem Gliede an die nachfolgenden vernachlässigt.

5) Bricht man die Taylor'sche Reihe (17) mit einem Gliede ab, welches nicht Null ist, so kann für ein hinreichend kleines h der Absolutwerth dieses Gliedes grösser gemacht werden als der Absolutwerth des Restes der Reihe.

Denn schliesst man dieselbe das eine Mal mit dem $n$ten, das andere Mal mit dem $(n+1)$ten Gliede ab, setzt also kurzhin

$$f(x+h) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n$$

und $$f(x+h) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + R_{n+1}$$

so ist $$R_n = u_{n+1} + R_{n+1}$$

also $$\frac{R_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{R_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}$$

da $$u_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)\,;\; R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

$$\frac{R_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h) - f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)}$$

Da nun $f^{(n+1)}(x)$ stetig, so kann für ein hinreichend kleines h der ...er also auch $\left[\frac{R_{n+1}}{u_{n+1}}\right]$ beliebig klein gemacht werden, wenn u_{n+1}

nicht Null ist, woraus unmittelbar hervorgeht, dass dann der Absolutwerth von u_{n+1} grösser wird, als das Restglied. Denn wäre für ein noch so kleines h, $[R_{n+1}] \geqq [u_{n+1}]$, so müsste $\left[\frac{R_{n+1}}{u_{n+1}}\right] \geqq 1$ sein, was mit dem eben Mitgetheilten im Widerspruche stünde.

6) Wenn für jeden zwischen x und $x + h$ liegenden Werth der Veränderlichen für ein beliebiges n, $n = \infty$ nicht ausgeschlossen, $f^{(n)}(x)$ stetig, also endlich bleibt, so hat die Taylor'sche Reihe Giltigkeit.*)

Denn setzen wir

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h) = \frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(x + \theta h)$$

und bezeichnet z die grösste ganze Zahl, welche in $[h]$ steckt, so ist noch $\frac{[h]}{z} > 1$, während $\frac{[h]}{z+1}$, $\frac{[h]}{z+2}$, ... alle kleiner als 1 sind. Die Anzahl der Quotienten, welche grösser als 1 sind, beträgt hiernach z, während die der kleineren gleich $n + 1 - z$ ist.

Setzen wir nun den Absolutwerth

$$\left[\frac{h}{1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3} \cdots \frac{h}{z} f^{(n+1)}(x + \theta h)\right] = Q$$

so ist Q endlich und

$$R_n = \frac{h}{z+1} \cdot \frac{h}{z+2} \cdots \frac{h}{n+1} Q$$

und da $\frac{h}{z+1}$ der grösste dieser Brüche ist, jedenfalls

$$[R_n] < \left(\frac{h}{z+1}\right)^{n+1-z} Q$$

Für ein unendlich wachsendes n nähert sich daher R_n der Null, weil $\frac{h}{z+1} < 1$ und es ist somit $\lim R_n = 0$.

Anmerk. Dieses Kriterium für die Giltigkeit der Taylor'schen Reihe lässt sich in den wenigsten Fällen anwenden, denn es kann sehr wohl $f^{(n)}(x)$ für $n = \infty$ unendlich werden, ohne dass dieses die Giltigkeit beeinträchtigt.

7) Setzt man in der Taylor'schen Reihe (15) und (16) $x = 0$ und darnach x statt h, so geht dieselbe bezüglich über in

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \cdots$$
$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \quad . \quad . \quad ($$

*) Wir haben nämlich bei der Herleitung nur vorausgesetzt, dass $f^{(n)}(x)$ e... werthig sei.

oder in

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \ldots$$
$$+ \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{n!}(1 - \theta)^n f^{(n+1)}(\theta x) \quad . \quad . \quad (18)$$

Anmerk. Diese Reihe (17) oder (18), welche zuerst Stirling aufgestellt hat und nach ihm benannt werden sollte, heisst gewöhnlich die **Maclaurin'sche Reihe.** Dieselbe setzt voraus, dass innerhalb der Grenzen 0 bis x die Functionen $f, f', f'', \ldots f^{(n)}$ stetig sind, $f^{(n+1)}(x)$ einwerthig bleibt.

Ist $\lim R_n = 0$ für ein unendlich wachsendes n, so hat man

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \ldots \textit{in inf.} \quad . \quad (18)$$

8) Bleibt $f^{(n)}(x)$ für jeden zwischen 0 und x liegenden Werth von x und ein beliebiges $n, n = \infty$ nicht ausgeschlossen, stetig, also x endlich, so ist $\lim R_n = 0$ und die Maclaurin'sche Reihe giltig.

Anmerk. Von diesem Kriterium für die Giltigkeit der Maclaurin'schen Reihe gilt dasselbe, was von dem entsprechenden Kriterium für die Taylor'sche Reihe gesagt wurde.

Beispiele.

Man soll den Ausdruck $(a + b)^m$, wo $[a] > [b]$, entwickeln.

Aufl. Derselbe ist für ein ganzes m eindeutig, für ein gebrochenes m aber vieldeutig. Für ein positives $(a + b)$ wird einer der Werthe von $(a + b)^m$ reell und positiv, es ist derjenige, den wir im Folgenden ausschliesslich betrachten.

Nun ist $(a + b)^m = a^m \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = a^m (1 + x)^m$, wenn man $\frac{b}{a} = x$ setzt, wo $[x] < 1$ wird. Es genügt daher den Ausdruck $f(x) = (1 + x)^m$ unter der Voraussetzung $-1 < x < +1$ zu entwickeln.

Man findet $f^{(n)} x = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)(1+x)^{m-n}$. Weil x zwischen -1 und $+1$ liegt, also $1 + x$ nicht Null werden kann, so ist $f^{(n)} x$ stetig zwischen 0 und x und

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)$$

Man darf daher die Maclaurin'sche Reihe mit Restglied anwenden und erhält nach (17)

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$
$$\frac{\ldots -1) \ldots (m-n+1)}{\ldots 2 \cdot 3 \ldots n} x^n + \frac{m(m-1) \ldots (m-n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} (1 + \theta x)^{m-n-1} x^{n+1}.$$

[illegible] den Fall, dass $\lim R_n = 0$ ist, hat man hiernach

$$\ldots = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots$$

[illegible] eicht nach §. 6. 8. zu zeigen convergirt die Reihe rechter Hand [illegible]ger Annahme $-1 < x < +1$.

Anmerk. 1) Für ein ganzes positives m schliesst diese Reihe, wenn $n = m$ geworden und wir erkennen alsdann in ihr den geschlossenen binomischen Satz (A. A. II. §. 15 u. f.).

Um nun noch zu zeigen, unter welchen Bedingungen $\lim R_n = 0$ ist,*) setzen wir zunächst $0 < x < 1$ voraus und zur Abkürzung:

$$R_n = \frac{mx}{1} \cdot \frac{(m-1)\,x}{2} \cdot \cdot \frac{(m-n)\,x}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n-m+1}} = P \frac{1}{(1+\theta x)^{n-m+1}}$$

so hat das Product P die Null zur Grenze, da sich die Factoren mit wachsendem n der Grenze $-x$, welches als echter Bruch vorausgesetzt wurde, nähern und die Anzahl derjenigen Factoren, deren Absolutwerth > 1, endlich ist.**) Das Product dieser Factoren ist somit ebenfalls endlich. Mit wachsendem n wächst die Anzahl der Factoren deren Absolutwerth kleiner als α ist, wo $x < \alpha < 1$, ins Unendliche. Für ein positives m ist dieses der Fall, sobald $n > m$***) und für ein negatives m, wenn $n > \frac{[m]\,x - \alpha}{\alpha - x}$†)

Der zweite Factor von R_n oder $\frac{1}{(1+\theta x)^{n-m+1}}$ kann sich für $\lim \theta = 0$ der Grenze 1 nähern, andernfalls bleibt derselbe immer kleiner als 1. Somit ist jedenfalls in vorliegendem Falle $\lim R_n = 0$.

Ganz analog findet man mittelst der zweiten Form des Restgliedes, wie solches in (18) auftritt, dass auch für ein negatives x und $[x] < 1$ $\lim R_n = 0$ ist. Obige Formel gilt somit allgemein, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt.

2) Es sei
$$f(x) = lx$$
also
$$f'(x) = \frac{1}{x}\,; f''(x) = -\frac{1}{x^2}\,; f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}\,;$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}\,; \ldots f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}\,;$$
$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$
so wird nach §. 50 (5)

---

*) $f^n x$ wird für $n = \infty$ selbst unendlich gross und es ist daher das Kriterium 8 nicht anwendbar.

**) Denn ist m positiv, so wird $\frac{-m+n}{n+1}\,x < 1$, sobald $n > m$ ist und wenn m negativ z. B. $= -m_1$ ist, so hat man $\frac{(m_1+n)\,x}{n+1} < 1$, wenn $m_1 x + nx < n + 1$. Ist $m_1 x \overline{\overline{<}}\, 1$, so ist diese Bedingung für jedes n erfüllt, und ist $m_1 x > 1$, wenn $n > \frac{m_1 x - 1}{1 - x}$.

***) Denn aus $\frac{n-m}{n+1} < 1$ und $x < \alpha$ folgt durch Multiplication $\frac{n-m}{n+1}\,x$ [illegible]

†) Aus $\frac{(m'+n)\,x}{n+1} < \alpha$ resultirt $m_1 x + nx < \alpha n + \alpha$. Ist $m_1 x < \alpha$, so ist [illegible]se Ungleichheit für jedes n erfüllt und wenn $m_1 x > \alpha$, sobald $n > \frac{m_1 x - \alpha}{\alpha - x}$.

$$f(x+h) = l(x+h) = lx + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{h^n}{nx^n} + (-1)^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)(x+\theta h)^{n+1}}$$

oder wenn man $x = 1$ und $h = x$ setzt,

$$l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} +$$
$$(-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

Um zu untersuchen, ob das Restglied dieser Reihe mit wachsendem n sich der Null nähert*), schreiben wir

$$R_n = (-1)^n \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

so ersehen wir, dass die beiden Factoren $\frac{1}{n+1}$ und $\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$ (der letztere weil $0 < x < 1$) die Null zur Grenze haben, also $\lim R_n = 0$ ist. Für ein negatives x lehrt die zweite Form des Restgliedes (16), dass ebenfalls $\lim R_n = 0$.

Obige Reihe für $l(1+x)$ gilt somit immer, wenn $x^2 < 1$ ist.

Anmerk. Für $x = 1$ convergirt die Reihe noch, nicht aber für $x = -1$.

Nimmt man in obiger Reihe x negativ, so folgt

$$l(1-x) = -\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots\right)$$

oder
$$l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

und es ist somit

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right) \text{ für } [x] < 1$$

oder, wenn man $\frac{1+x}{1-x} = z$, also $x = \frac{z-1}{z+1}$ setzt.

$$lz = 2\left\{\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \dots\right\},\ z = 0 \text{ bis } \infty.$$

Um eine rascher convergirende Reihe zu bekommen, setzen wir

$$z = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x},\ lz = l(x+1) - lx.$$

Es resultirt alsdann

$$l(x+1) = l(x) + 2\left\{\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2x+1}\right)^3 + \dots\right\},\ x = 0 \text{ bis } \infty.$$

'och rascher convergirt die zur Berechnung von Logarithmen dienende welche erhalten wird, wenn man in obiger Reihe $z = \frac{x^2}{x^2-1}$, also

$$lz = 2lx - l(x+1) - l(x-1)$$

$f^n x$ wird für $n = \infty$ selbst unendlich und daher das Kriterium 6 nicht an-

setzt. Man bekommt alsdann

$$l(x+1) = 2lx - l(x-1) - 2\left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \ldots\right]$$

Von $x = 14$ an kann man auf 7 Stellen genau setzen:

$$l(x+1) = 2lx - l(x-1) - \frac{2}{2x^2-1}.$$

3) Ist $f(x) = e^x$, so folgt $f'(x) = f''(x) = \ldots = f^n(x) = e^x$, es sind daher alle Differentialquotienten stetig und $f^{(n)}x$ bleibt für $n = \infty$ endlich. Nach dem Kriterium 8, gilt daher die Maclaurin'sche Reihe für jeden Werth von x und man erhält

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots$$

Da $a^x = e^{x\,la}$, so erhält man hieraus die ebenfalls für alle Werthe von x giltige Reihe

$$a^x = 1 + \frac{x\,la}{1} + \frac{(xla)^2}{1\,.\,2} + \frac{(x\,la)^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

Für $x = 1$ erhält man hieraus

$$a = 1 + la + \frac{l^2a}{1\,.\,2} + \frac{l^3a}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots$$

und wenn man e statt a setzt und berücksichtigt, dass $le = 1$ ist,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots = 2{,}718281828459\ \ldots$$

d. i. die Basis des natürlichen Logarithmensystemes (vergl. §. 6. Beisp. 8).

4) Es sei $f(x) = \sin x$,

also $f'(x) = \cos x;\ f''(x) = -\sin x;$

$$f'''(x) = -\cos x\,;\ f^{IV}(x) = \sin x\,;\ \ldots\ f^{(n)}x = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Da diese Differentialquotienten für jeden Werth von x stetig bleiben und $f^{(n)}(x)$ für $n = \infty$ endlich bleibt, so ist $\sin x$ in eine convergirende Reihe entwickelbar für jeden Werth von x.

Für $x = 0$ erhält man:

$$f(0) = 0\,;\ f'(0) = 1\,;\ f''(0) = 0\,;\ f'''(0) = -1\,;$$
$$f^{IV}(0) = 0\,;\ f^{V}(0) = 1;\ \ldots$$

und nach (18)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

5) Es sei $f(x) = \cos x$

also $f'(x) = -\sin x\,;\ f''(x) = -\cos x\,;\ f'''(x) = \sin x;\ \ldots$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Da sämmtliche Differentialquotienten stetig sind, und $f^{(n)}(x)$ für $n = \infty$ endlich bleibt, so kann nach 8) $\cos x$ in eine convergirende Reihe verwandelt werden. Man erhält

$$f(0) = 1\,;\ f'(0) = 0\,;\ f''(0) = -1\,;\ f'''(0) = 0$$

und nach (18)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots.$$

6) Es sei

$$f(x) = arc\, sin x,$$

also $\quad f'(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\,;\, f''(x) = x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$f'(0) = 1\,;\, f''(0) = 0$ und somit nach der in §. 39. 1. gefundenen Formel

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)\,x}{1-x^2} f^{(n-1)}(x) + \frac{(n-2)^2}{1-x^2} f^{(n-2)}(x);$$

$f'''(0) = 1^2; f^{IV}(0) = 0; f^{V}(0) = 1^2.3^2; f^{VI}(0) = 0; f^{VII}(0) = 1^2.3^2.5^2;$
$f^{(2n)}(0) = 0\,;\, f^{(2n+1)}(0) = 1^2\,.\,3^2\,.\,5^2 \ldots (2n-1)^2.$

Nach (18) ist daher

$$arc\, sin x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + 3^2\frac{x^5}{5!} + 3^2\,.\,5^2\,\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7} + \ldots$$

$$+ \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2n-3)}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots (2n-2)}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6 \ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

und da (§. 6)

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n-1)^2 x^2}{2n(2n+1)} = \left\{1 - \frac{6 - \frac{1}{n}}{4n+2}\right\} x^2,$$

so convergirt diese Reihe, wenn $x^2 \leq 1$ ist. Auch lässt sich zeigen, dass für diesen Fall $lim\, R_n = 0$ wird.

7) Es sei

$$f(x) = arc\, tg\, x,$$

also $$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,;\, f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2};$$

$f(0) = 0\,;\, f'(0) = 1\,;\, f''(0) = 0$ und somit nach der in §. 39, 2. gefundenen Gleichung

$$f^{(n)}(x) = -\frac{2(n-1)\,x}{1+x^2} f^{(n-1)}(x) - \frac{(n-1)(n-2)}{1+x^2} f^{(n-2)}(x);$$

$f'''(0) = -2!\,;\, f^{IV}(0) = 0\,;\, f^{V}(0) = 4!\,;\, f^{VI}(0) = 0;$
$f^{VII}(0) = -6! \ldots f^{(2m)}(0) = 0\,;\, f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!$

so folgt nach (18):

$$arc tg\, x = x - 2!\frac{x^3}{3!} + 4!\frac{x^5}{5!} - 6!\frac{x^7}{7!} + \ldots$$

$$= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{m+1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} +$$

$$(-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + R_n.$$

Reihe convergirt, wenn x zwischen -1 und $+1$ liegt, (die G - mitgerechnet). Wir können auch leicht zeigen, dass $lim\, R_n = 0$ ist.

Wie sich nämlich durch den Schluss von n auf $n+1$ zeigen lässt, ist

$$\frac{d^n arc\,tg\,x}{dx^n} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n\,arc\,tg\,\frac{1}{x}\right)^{*)}$$

für $x = 0$ verwandelt sich dieser Ausdruck in

$$(-1)^{n-1}(n-1)!\,\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Je nachdem nun n gerade oder ungerade ist, resultirt hieraus Null oder $(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!$

Das Restglied ist daher

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^n \frac{n!\,x^{n+1}}{(n+1)!\,(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1)\,arc\,tg\,\frac{1}{\theta x}\right]$$

$$= (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta^2 x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1)\,arc\,tg\,\frac{1}{\theta x}\right]$$

$$= (-1)^n \left(\frac{x^2}{1+\theta^2 x^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sin\left[(n+1)\,arc\,tg\,\frac{1}{\theta x}\right]}{n+1}.$$

Ist $x^2 < 1$ also $\frac{x^2}{1+\theta^2 x^2}$ ein echter Bruch, so wird daher $\lim R_n = 0$. Für $x = 1$ erhalten wir aus obiger Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots.$$

woraus π gefunden werden kann.

---

*) Denn es ist hiernach

$$\frac{d^{n+1} arc\,tg\,x}{dx^{n+1}} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^n} \left[-n(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1} \cos\left(n\,arc\,tg\,\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left. - nx(1+x^2)^{\frac{n}{2}-1} \sin\left(n\,arc\,tg\,\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= -(-1)^{n-1} \frac{n(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n+2}{2}}} \left[\cos\left(n\,arc\,tg\,\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(n\,arc\,tg\,\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \left[\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cos\left(n\,arc\,tg\,\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \sin\left(n\,arc\,tg\,\frac{1}{x}\right)\right]$$

oder wenn man $arc\,tg\,\frac{1}{x} = y$, $tg\,y = \frac{1}{x}$, $cot\,y = x$, $\sin y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ setzt,

$$\frac{d^{n+1} arc\,tg\,x}{dx^{n+1}} = (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} [\sin y \cos ny + \cos y \sin ny]$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1)\,arc\,tg\,\frac{1}{x}\right].$$

Anmerk. Um andere Relationen zur Berechnung von π zu erhalten, setze man z. B. $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$, also $tg\,2\alpha = \frac{4}{3}$ und da $2\alpha > \frac{\pi}{4}$, $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$, $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{4}$, $tg\,\beta = \frac{\frac{4}{3} - 1}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{1}{7}$, so wird $\frac{\pi}{4} = 2\,arc\,tg\,\frac{1}{2} - arc\,tg\,\frac{1}{7}$. Nimmt man $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$, $tg\,2\alpha = \frac{3}{4}$, $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4} - 2\alpha$, $tg\,\beta = \frac{1}{7}$, so folgt $\frac{\pi}{4} = 2\,arc\,tg\,\frac{1}{3} + arc\,tg\,\frac{1}{7}$ u. s. w.

8) Man soll $f(x) = \frac{1}{2}\,l\,(1 + x^2 + 2x\cos\alpha)$ in eine Reihe verwandeln.

Auflösung. Man findet

$$f'(x) = \frac{x + \cos\alpha}{1 + x^2 + 2x\cos\alpha} = \frac{x + \cos\alpha}{(1 + x\cos\alpha)^2 + (x\sin\alpha)^2}$$

$$= \frac{x + \cos\alpha}{[1 + x(\cos\alpha + i\sin\alpha)]\,[1 + x(\cos\alpha - i\sin\alpha)]}$$

oder, wenn man diesen Bruch nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten*) in zwei Brüche zerlegt, also

$$= \frac{A}{1 + x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} + \frac{B}{1 + x(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$$

setzt,

$$f'(x) = A\,[1 + x(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^{-1} + B\,[1 + x(\cos\alpha - i\sin\alpha)]^{-1}$$

Hierauf folgt:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,A[1 + x(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^{-n}[\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha]$$
$$+ (-1)^{n-1}(n-1)!\,B\,[1 + x(\cos\alpha - i\sin\alpha)]^{-n}[\cos(n-1)\alpha - i\sin(n-1)\alpha]$$

Also wird

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\{A\,[\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha] + B\,[\cos(n-1)\alpha - i\sin(n-1)\alpha]\}$$

oder da $A + B = \cos\alpha$

und $A(\cos\alpha - i\sin\alpha) + B(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 1$

oder $\cos^2\alpha + (B - A)\,i\sin\alpha = 1$

oder $B - A = \frac{\sin\alpha}{i} = -i\sin\alpha$,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[\cos(n-1)\alpha\cos\alpha - \sin(n-1)\alpha\sin\alpha]$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\,\cos n\alpha,$$

und somit $f(0) = 0$; $f'(0) = \cos\alpha$; $f''(0) = -\cos 2\alpha$; $f'''(0) = 2!\cos 3\alpha$; $f^{IV}(0) = -3!\cos 4\alpha$; ...

folglich nach 18.

$$:) = x\cos\alpha - \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha + \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha - \frac{x^4}{4}\cos 4\alpha + \ldots$$

$$f(x) = arc\,tg\,\frac{x\sin\alpha}{1 + x\cos\alpha}$$

in e .eihe darzustellen.

---

*) II. §. 18.

Auflösung. Setzt man

$$f'(x) = \frac{\sin\alpha}{1 + 2x\cos\alpha + x^2}$$

$$= \frac{A}{1 + x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} + \frac{B}{1 + x(\cos\alpha - i\sin\alpha)}$$

also $\qquad A + B = \sin\alpha\,;\; A - B = -\,i\cos\alpha$

so folgt wie vorhin

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!A[1 + x(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^{-n}[\cos(n-1)\alpha + i\sin(n-1)\alpha]$$
$$+ (-1)^{n-1}(n-1)!\,B[1 + x(\cos\alpha - i\sin\alpha)]^{-n}[\cos(n-1)\alpha - i\sin(n-1)\alpha]$$

und hieraus

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[(A+B)\cos(n-1)\alpha + i(A-B)\sin(n-1)\alpha]$$
$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\,\sin n\alpha$$

Es ist daher

$$f(0) = 0\,;\; f'(0) = \sin\alpha;\; f''(0) = -\sin 2\alpha \text{ etc.}$$

und somit

$$f(x) = x\sin\alpha - \frac{x^2}{2}\sin 2\alpha + \frac{x^3}{3}\sin 3\alpha - \ldots$$

10) Man soll $\qquad f(x) = \frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{2x\cos\alpha}{1 - x^2}$

durch eine Reihe ausdrücken.

Auflösung. Setzt man

$$f'(x) = \frac{(1 + x^2)\cos\alpha}{(1 - x^2)^2 + 4x^2\cos^2\alpha} = \frac{(1 + x^2)\cos\alpha}{x^4 + 2x^2\cos 2\alpha + 1}$$

$$= \frac{(1 + x^2)\cos\alpha}{(1 + x^2\cos 2\alpha)^2 + (x^2\sin 2\alpha)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)\cos\alpha}{[1 + x^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)]\,[1 + x^2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)]}$$

$$= \cos\alpha\left[\frac{A}{1 + x^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)} + \frac{B}{1 + x^2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)}\right]$$

also $\qquad A + B = 1$

$$A(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha) + B(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha) = 1$$

oder $\qquad i\sin 2\alpha\,(B - A) = 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

oder $\qquad A - B = i\,tg\,\alpha$

folglich

$$A = \frac{1}{2\cos\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha);\; B = \frac{1}{2\cos\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

und nun $\qquad \frac{1}{1 + x^2(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)} = \frac{\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha\text{*)}}{\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha + x^2}$

$$= \frac{\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha}{(\cos\alpha - i\sin\alpha)^2 + x^2} = \frac{\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha}{(x + i\cos\alpha + \sin\alpha)(x - i\cos\alpha - \quad)}$$

$$= (\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)\left[\frac{A_1}{x + \sin\alpha + i\cos\alpha} + \frac{B_1}{x - \sin\alpha - i\cos}\right.$$

folglich $\qquad A_1 + B_1 = 0$

$$-A_1(\sin\alpha + i\cos\alpha) + B_1(\sin\alpha + i\cos\alpha) = 1$$

---

*) Indem man nämlich Zähler und Nenner mit $\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha$ multiplicirt

oder $B_1 - A_1 = \frac{1}{\sin\alpha + i\cos\alpha} = \sin\alpha - i\cos\alpha = -i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

also $A_1 = \frac{i}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; $B_1 = -\frac{i}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

so wird

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha)^2 \left[\frac{A_1}{x + \sin\alpha + i\cos\alpha} + \frac{B_1}{x - \sin\alpha - i\cos\alpha}\right] + \tfrac{1}{2}\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 + x^2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)}$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\alpha - i\sin\alpha)\frac{i}{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)\left[\frac{1}{x + \sin\alpha + i\cos\alpha} - \frac{1}{x - \sin\alpha - i\cos\alpha}\right] + \tfrac{1}{2}\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 + x^2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)}$$

$$= \frac{i}{4}\left(\frac{1}{x + \sin\alpha + i\cos\alpha} - \frac{1}{x - \sin\alpha - i\cos\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 + x^2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)}$$

Setzt man ferner

$$\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 + x^2(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha\,^{*)}}{x^2 + (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2}$$

$$= \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{(x - \sin\alpha + i\cos\alpha)(x + \sin\alpha - i\cos\alpha)}$$

$$= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{x - \sin\alpha + i\cos\alpha} - \frac{1}{x + \sin\alpha - i\cos\alpha}\right]$$

so ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{i}{4}\left[\frac{1}{x + \sin\alpha + i\cos\alpha} - \frac{1}{x - \sin\alpha - i\cos\alpha} + \frac{1}{x - \sin\alpha + i\cos\alpha} - \frac{1}{x + \sin\alpha - i\cos\alpha}\right]$$

$$= \frac{i}{4}\left[\frac{1}{x + i(\cos\alpha - i\sin\alpha)} - \frac{1}{x - i(\cos\alpha + i\sin\alpha)} + \frac{1}{x + i(\cos\alpha + i\sin\alpha)} - \frac{1}{x - i(\cos\alpha + i\sin\alpha)}\right]$$

Hieraus findet man

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{i}{4}\{[x + i(\cos\alpha - i\sin\alpha)]^{-n} - [x - i(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^{-n} + [x + i(\cos\alpha + i\sin\alpha)]^{-n} - [x - i(\cos\alpha - i\sin\alpha]^{-n}\}$$

also $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{i^{-(n-1)}}{4}(2\cos n\alpha - 2(-1)^n\cos n\alpha)$

$$= (n-1)!\,\frac{i^{n-1}}{2}[1 - (-1)^n]\cos n\alpha$$

$$= (n-1)!\,\frac{i^{n-1}}{2}(1 - i^{2n})\cos n\alpha$$

---

*) Indem man Zähler und Nenner mit $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$ multiplicirt.

oder wenn man

$$i^{n-1}(1-i^{2n}) = i^{n-1} - i^{3n-1} = \frac{1}{i^{n-1}}(i^{2n-2} - i^{4n-2}) = \frac{1}{i^{n-1}}[(-1)^{n-1}+1]$$

setzt,

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}(n-1)!\,\frac{1}{i^{n-1}}[(-1)^{n-1}+1]\cos n\alpha.$$

Man hat daher

$$f(0) = 0\,;\, f'(0) = \cos\alpha\,;\, f''(0) = 0\,;\, f'''(0) = -2!\cos 3\alpha\,;\,\ldots$$

und somit

$$f(x) = x\cos\alpha - \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha + \frac{x^5}{5}\cos 5\alpha - \ldots$$

11) $f(x) = \frac{1}{4}\, l\, \frac{1+x^2+2x\sin\alpha}{1+x^2-2x\sin\alpha}$ in einer Reihe darzustellen.

Auflösung. Man findet

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+\sin\alpha}{1+x^2+2x\sin\alpha} - \frac{x-\sin\alpha}{1+x^2-2x\sin\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x+\sin\alpha}{(x+\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha} - \frac{x-\sin\alpha}{(x-\sin\alpha)^2+\cos^2\alpha}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x+\sin\alpha+i\cos\alpha} + \frac{1}{x+\sin\alpha-i\cos\alpha} - \frac{1}{x-\sin\alpha+i\cos\alpha} - \frac{1}{x-\sin\alpha-i\cos\alpha}\right].$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x+i(\cos\alpha-i\sin\alpha)} + \frac{1}{x-i(\cos\alpha+i\sin\alpha)} - \frac{1}{x+i(\cos\alpha+i\sin\alpha)} - \frac{1}{x-i(\cos\alpha-i\sin\alpha)}\right]$$

und hiernach

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\frac{1}{4}\Big\{[x+i(\cos\alpha-i\sin\alpha)]^{-n} + [x-i(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^{-n} - [x+i(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^{-n} - [x-i(\cos\alpha-i\sin\alpha)]^{-n}\Big\}$$

also $$f^{(n)}(0) = (n-1)!\,\frac{i^{n-1}}{2}[1+(-1)^{n-1}]\sin n\alpha$$

somit $f(0) = 0\,;\, f'(0) = \sin\alpha\,;\, f''(0) = 0\,;\, f'''(0) = -2!\sin 3\alpha\,;\,\ldots$

und $$f(x) = x\sin\alpha - \frac{x^3}{3}\sin 3\alpha + \frac{x^5}{5}\sin 5\alpha - \ldots$$

§. 51. Aufgaben zur Uebung.

1) In der Function $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$ lässt man x um h nehmen, man soll nach der Taylor'schen Reihe die Aenderu bestimmen, welche die Function dadurch erleidet.

Aufl. $f(x+h) - f(x) = 3hx^2 - 6hx + 3h^2x - 3h^2 + h^3$

2) $\sin(x+a)$ und $\cos(x+a)$ in Reihen zu verwandeln.

Aufl. $\sin(x+a) = \sin x + a\cos x - \frac{a^2}{2!}\sin x - \frac{a^3}{3!}\cos x \ldots$

$$\cos(x+a) = \cos x - a\sin x - \frac{a^2}{2!}\cos x + \frac{a^3}{3!}\sin x + \ldots$$

Anmerk. Entspricht der Bogen a einem Winkel von 1 Min., so ist $a = 0{,}0002909$ und man kann alsdann auf 7 Stellen genau

$$\sin(x+1') = \sin x + 0{,}0002909\cos x$$
$$\cos(x+1') = \cos x - 0{,}0002909\sin x$$

setzen.

3) $f(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha)$ in eine Reihe zu entwickeln.

Aufl. $f(x) = 1 + x\cos\alpha + \frac{x^2}{2!}\cos 2\alpha + \frac{x^3}{3!}\cos 3\alpha + \ldots$

Andeut. Da
$f'(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(\alpha + x\sin\alpha), \ldots f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(n\alpha + x\sin\alpha)$
so wird
$f(0) = 1;\ f'(0) = \cos\alpha;\ f''(0) = \cos 2\alpha;\ \ldots f^{(n)}(0) = \cos(n\alpha)$ u. s. w.
Man findet für $R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\Theta x\cos\alpha}\cos[(n+1)\alpha + \Theta x\sin\alpha]$ und da für jedes endliche x und ein wachsendes n der Ausdruck $e^{\Theta x\cos\alpha}\cos[(n+1)\alpha+\Theta x\sin\alpha]$ endlich bleibt und $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ sich der Null nähert, so ist $\lim R_n = 0$.

4) $f(x) = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$ in eine Reihe zu verwandeln.

Aufl. $f(x) = x\sin\alpha + \frac{x^2}{2!}\sin 2\alpha + \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin n\alpha + \ldots$

Andeut. $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\sin(n\alpha + x\sin\alpha)$ etc.

5) Man soll $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x\sin\alpha} + e^{-x\sin\alpha})\sin(x\cos\alpha)$ in einer Reihe darstellen.

Aufl. $f(x) = x\cos\alpha - \frac{x^3}{3!}\cos 3\alpha + \frac{x^5}{5!}\cos 5\alpha - \frac{x^7}{7!}\cos 7\alpha + \ldots$

Andeut. $f'(x) = \frac{1}{2}[e^{x\sin\alpha}\cos(\alpha - x\cos\alpha) + e^{-x\sin\alpha}\cos(\alpha + x\cos\alpha)]$
$f''(x) = \frac{1}{2}[e^{x\sin\alpha}\sin(2\alpha - x\cos\alpha) - e^{-x\sin\alpha}\sin(2\alpha + x\cos\alpha)]$
$f'''(x) = -\frac{1}{2}[e^{x\sin\alpha}\cos(3\alpha - x\cos\alpha) + e^{-x\sin\alpha}\cos(3\alpha + x\cos\alpha)]$
$f^{IV}(x) = -\frac{1}{2}[e^{x\sin\alpha}\sin(4\alpha - x\cos\alpha) - e^{-x\sin\alpha}\sin(4\alpha + x\cos\alpha)]$
u. s. w. Setze nun $x = 0$ u. s. w.

6) $f(x) = \frac{1}{2}(e^{x\sin\alpha} - e^{-x\sin\alpha})\cos(x\cos\alpha)$

$$= x\cos\alpha + \frac{x^3}{3!}\cos 3\alpha + \frac{x^5}{5!}\cos 5\alpha + \frac{x^7}{7!}\cos 7\alpha + \ldots$$

$f(x) = \frac{1}{2}(e^{x\sin\alpha} + e^{-x\sin\alpha})\cos(x\cos\alpha)$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!}\cos 2\alpha + \frac{x^4}{4!}\cos 4\alpha - \frac{x^6}{6!}\cos 6\alpha + \ldots$$

$f(x) = \frac{1}{2}(e^{x\sin\alpha} - e^{-x\sin\alpha})\sin(x\sin\alpha)$

$$= \frac{x^2}{2!}\sin 2\alpha - \frac{x^4}{4!}\sin 4\alpha + \frac{x^6}{6!}\sin 6\alpha - \ldots$$

§. 52. Die Taylor'sche und Maclaurin'sche Reihe für Functionen mehrer unabhängig Veränderlichen.

1) Bezeichnet $f(x, y, z, \ldots)$ eine Function der unabhängig Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ so setze man, um $f(x+h, y+k, z+l, \ldots)$ nach Potenzen und Producten von $h, k, l, \ldots$ zu entwickeln, zunächst

$$h = \alpha h_1 \; ; \; k = \alpha k_1 \; ; \; l = \alpha l_1 \; ; \ldots$$

Sieht man nun $f(x + \alpha h_1, y + \alpha k_1, \ldots)$ als Function von α und gleich $F(\alpha)$ an, so hat man nach der Maclaurin'schen Reihe

$$F(\alpha) = F(0) + \alpha F'(0) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha^n}{n!} F^{(n)}(0) + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\theta\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

worin $F(0), F'(0), F''(0), \ldots$ die Werthe von

$$F(\alpha), \frac{dF(\alpha)}{d\alpha}, \frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}, \ldots$$

für $\alpha = 0$ bezeichnen.

Nun ist aber, wenn man

$$x + \alpha h_1 = x_1, \; y + \alpha k_1 = y_1, \ldots$$

setzt,

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = h_1 \; ; \; \frac{dy_1}{d\alpha} = k_1 \; ; \ldots$$

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{dy_1}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial z_1} \frac{dz_1}{d\alpha} + \ldots$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} k_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} l_1 + \ldots$$

$$\frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_1} h_1 k_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} k_1^2 + \ldots$$

oder symbolisch $= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} k_1 + \ldots\right)^2$

Allgemein erhält man hiernach

$$\frac{d^nF}{d\alpha^n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} k_1 + \ldots\right)^n$$

als Symbol des $n$ten Differentialquotienten.

Indem nun für $\alpha = 0$ nach Obigem x_1 in x, y_1 in y etc., also $F(\alpha) = f(x_1, y_1, \ldots)$ in $f(x, y, \ldots)$ übergeht, so folgt, wenn f statt $f(x, y, \ldots)$ gesetzt wird:

$$F^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} k_1 + \ldots\right)^n$$

und somit ist

$$\alpha^n F^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \alpha h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \alpha k_1 + \ldots\right)^n$$

oder nach Obigem:

$$\alpha^n F^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \ldots\right)^n$$

Setzt man hierin der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ und führt die betreffenden Werthe in die Gl. (1) ein, so erhält man:

$$f(x+h, y+k, \ldots) = f + \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right) +$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^3 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^n + R_n \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wo also

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^2 = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \ldots$$

$$\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^3 = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \ldots$$

. . . .

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^{n+1}_{x+\Theta h,\, y+\Theta k,\, \ldots}$$

Ist $\lim R_n = 0$, so erhält man die Taylor'sche Reihe für Functionen mehrer Variabeln.

Zusätze.

1) Das Verhältniss des Restes R_n zum vorhergehenden Gliede kann, wenn dieses nicht identisch Null ist, so klein gemacht werden als man nur will, wenn man nur $h, k, \ldots$ klein genug annimmt.

Denn setzen wir

$$f(x+h, y+k) = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n$$
$$= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + R_{n+1},$$

wo $R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[h^{n+1}\varphi(x+\Theta h, y+\Theta k) + (n+1)h^n k\right.$

$\left.\varphi_1(x+\Theta h, y+\Theta k) + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2}h^{n-1}k^2\varphi_2(x+\Theta h, y+\Theta k) + \ldots\right]$

so ist $R_n = u_{n+1} + R_{n+1}$; $R_{n+1} = R_n - u_{n+1}$; $\frac{R_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{R_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}$

1

$_{+1} = \frac{1}{(n+1)!}\left[h^{n+1}\varphi(x,y) + \frac{n+1}{1}h^n k\varphi_1(x,y) + \right.$

($\frac{)n}{2}h^{n-1}k^2\varphi_2(x,y) + \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}h^{n-2}k^3\varphi_3(x,y)\ldots\Big]$

...le Differentialquotienten $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ endlich und stetig sind,

so kann die Differenz $R_n - u_{n+1} = R_{n+1}$ und somit auch $\frac{R_{n+1}}{u_{n+1}}$ beliebig klein gemacht werden, wenn u_{n+1} nicht identisch Null ist. Dividirt man nämlich Zähler und Nenner des Bruches $\frac{R_n - u_{n+1}}{u_{n+1}}$ durch h^{n+1}, so schreitet die Entwickelung in Zähler und Nenner nach Potenzen von $\frac{k}{h}$ fort.

Nimmt man dieses Verhältniss beliebig aber endlich an, so ist der Nenner endlich, während der Zähler beliebig klein gemacht werden kann, wodurch die Richtigkeit des Satzes bewiesen ist.

2) Ist $f(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Function (§. 34), also

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots) = \alpha^n f(x, y, z, \ldots)$$

und man setzt $1 + \alpha$ statt α, so folgt nach (1):

$$f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z, \ldots) = (1 + \alpha)^n f(x, y, z, \ldots)$$

$$= f(x, y, z, \ldots) + \left(\alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha z \frac{\partial f}{\partial z} + \ldots\right) +$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2}\left(\alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(\alpha x \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots\right)^3 + \ldots$$

Nun ist aber auch

$$(1 + \alpha)^n f(x, y, \ldots) = f(x, y, \ldots) + \frac{n}{1} \alpha f + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \alpha^2 f$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 f + \ldots \ldots \quad (\mu)$$

und man erhält daher durch Gleichsetzung der Coefficienten gleich hoher Potenzen von α:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + \ldots = n f(x, y, z, \ldots)$$

$$\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + \ldots\right)^2 = n(n-1) f(x, y, z, \ldots)$$

$$\left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} + \ldots\right)^3 = n(n-1)(n-2) f(x, y, z, \ldots)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

wo die letzten symbolisch zu nehmen sind.

3) Setzt man in (2) $x = y = z = \ldots = 0$ und darnach wieder $x, y, z, \ldots$ anstatt $h, k, l, \ldots$ so geht dieselbe über in:

$$f(x, y, z, \ldots) = f(0, 0 \ldots) + \left[x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \ldots\right]$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left[x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \ldots\right]^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left[x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \ldots\right.$$

$$\left. + \ldots \frac{1}{n!}\left[x \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \ldots\right]^n + R_n \quad \ldots\right.$$

wo $$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\Theta + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_\Theta + \ldots\right]^{n+1}$$

und $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_\Theta, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_\Theta$ bedeuten, dass in den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}$ u. s. w für $x, y, z, \ldots$ bezüglich $0, 0, 0 \ldots$ oder $\theta x, \theta y, \theta z, \ldots$ zu setzen sei.

Ist $lim\, R_n = 0$, so erhält man hieraus die Maclaurin'sche Reihe für Functionen mehrer Variabeln.

Anmerk. Zur Giltigkeit der Formeln (2) und (3) gehört, dass f und die partiellen Differentialquotienten bis zur $n$ten Ordnung innerhalb der Grenzen x und $x+h$, y und $y+k \ldots$ stetig bleiben in Bezug auf jede der Variabeln $x, y, z, \ldots$ und dass die Differentialquotienten von der $(n+1)$ten Ordnung einwerthig seien.

Sechster Abschnitt.

Werthbestimmung der Functionen im Falle sie für specielle Werthe der Veränderlichen unbestimmte Formen annehmen.

§ 53. Erklärung.

Es ereignet sich häufig, dass eine Function für einen besonderen Werth der Veränderlichen eine der Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ∞^0, $0 \cdot \infty$ u. s. w. annimmt. Man nennt solche Formen unbestimmte. Wir wollen nun untersuchen, wie man in jedem speciellen Falle zu verfahren hat, um den wirklichen Werth einer Function zu ermitteln, im Falle dieselbe eine dieser Formen annehmen sollte.

§. 54. Bestimmung des Werthes $\frac{0}{0}$.

Angenommen der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ erscheine für $x = a$ unter der Form $\frac{0}{0}$ und es seien innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = a + h$ die Functionen $f(x)$ und $F(x)$ stetig, dagegen $f'(x)$ und $F'(x)$ eindeutig, so kann man nach der Taylor'schen Reihe setzen:

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h), \; 0 < \theta < 1$$
$$F(a + h) = F(a) + hF'(a + \theta_1 h), \; 0 < \theta_1 < 1.$$

Für $x = a + h$ ist daher der Werth des Bruches

$$= \frac{f(a) + hf'(a + \theta h)}{F(a) + hF'(a + \theta_1 h)}$$

oder da nach der Voraussetzung $f(a) = F(a) = 0$ ist,

$$= \frac{f'(a+\theta h)}{F'(a+\theta_1 h)}.$$

Für $h = 0$ erhält man hieraus, gleichgiltig ob h positiv oder negativ ist, nach obiger Voraussetzung unzweideutig $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ als den zu suchenden wirklichen Werth.

Dieser ist ein bestimmter, wenn nicht gleichzeitig $f'(a)$ und $F'(a)$ Null werden. Tritt aber dieser Fall ein, so hat man, unter der Annahme, dass innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = a + h$ die Functionen $f(x)$, $F(x)$, $f'(x)$, $F'(x)$ stetig, $f''(x)$ und $F''(x)$ aber einwerthig seien:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a+\theta h)$$

$$F(a+h) = F(a) + hF'(a) + \frac{h^2}{1.2} F''(a+\theta_1 h)$$

also da $\quad f(a) = f'(a) = F(a) = F'(a) = 0,$

für $x = a + h$:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f''(a+\theta h)}{F''(a+\theta_1 h)}$$

und wenn man $h = 0$ setzt, $\frac{f''(a)}{F''(a)}$ als fraglichen Werth, welcher wiederum bestimmt ist, wenn nicht $f''(a)$ und $F''(a)$ gleichzeitig Null sind.

Analog findet man im anderen Falle $\frac{f'''(a)}{F'''(a)}$ als Werth u. s. w.

Allgemein folgern wir hieraus, dass wenn

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$$
$$F(a) = F'(a) = F''(a) = \ldots = F^{(n)}(a) = 0$$

aber $f^{(n+1)}(a)$ und $F^{(n+1)}(a)$ nicht gleichzeitig Null sind, der verlangte Werth des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$ gleich $\frac{f^{(n+1)}(a)}{F^{(n+1)}(a)}$ sei, vorausgesetzt dass $f, f', f'', \ldots f^{(n)}$; $F, F', F'', \ldots F^{(n)}$ stetig, aber $f^{(n+1)}$ und $F^{(n+1)}$ einwerthig seien innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = a + h$, eliebig klein sein kann.

ir schliessen hieraus auf folgende Regel:

an bestimmt die Differentialquotienten des Zählers Jenners und setze in dem so erhaltenen Bruche x den speciellen Werth ein. Werden beide nicht zeitig Null, so ist der verlangte Werth gefunden;

werden aber beide Differentialquotienten für eben den Werth von x Null, so bestimme man die zweiten Differentialquotienten von Zähler und Nenner des vorgelegten Bruches und verfahre damit analog wie vorhin u. s. f. bis man zu einem Bruche gelangt, dessen Zähler und Nenner durch Substitution des speciellen Werthes von x nicht gleichzeitig Null werden. Der hierdurch erhaltene Werth des letzten Bruches ist alsdann der verlangte wahre Werth.

Anmerk. 1) In allen Fällen, wo die Taylor'sche Reihe nicht in Anwendung gebracht werden kann, ist natürlich vorstehendes Verfahren unstatthaft. Man kann in solchen Fällen den wahren Werth dadurch finden, dass man $a + h$ für x einführt, hinreichend reducirt und schliesslich $h = 0$ setzt.

So geht z. B.

$$\frac{\sqrt[4]{a^2 - x^2} + \sqrt[4]{(a-x)^3}}{\sqrt[4]{a-x} - \sqrt[4]{a^4 - x^4}}$$

für $x = a$ in $\frac{0}{0}$ über. Setzt man nun $a - h$ statt x, so erhält man den Bruch

$\dfrac{\sqrt[4]{2a - h} + \sqrt[4]{h^2}}{1 - \sqrt[4]{4a^3 - 6a^2h + 4ah^2 - h^3}}$, dessen Werth für $h = 0$ in $\dfrac{\sqrt[4]{2a}}{1 - \sqrt[4]{4a^3}}$ übergeht, was zugleich der verlangte Werth ist.

2) Obige Herleitung setzt voraus, dass a nicht ∞ sei. Ist $a = \infty$ und man setzt $x = \dfrac{1}{t}$ also $\dfrac{f(x)}{F(x)} = \dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{F\left(\frac{1}{t}\right)}$, so folgt für $x = a = \infty$, $t = 0$ und es lässt sich nun obiges Verfahren auf den Bruch $\dfrac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{F\left(\frac{1}{t}\right)}$ anwenden. Man erhält als wahren Werth $\dfrac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} F'\left(\frac{1}{t}\right)} = \dfrac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{F'\left(\frac{1}{t}\right)}$ für $t = 0$ oder $\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ für $x = a$ wie früher.

Beispiele.

1) Man soll den wirklichen Werth des Bruches $\dfrac{f(x)}{F(x)} = \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ für $x = 1$ bestimmen.

Auflösung. Da $f'(x) = nx^{n-1}$, $F'(x) = 1$ ist, so wird

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = nx^{n-1}.$$

Setzt man nun hierin $x = 1$, so erhält man den verlangten Werth $= n$.

2) Den wahren Werth von $\dfrac{f(x)}{F(x)} = \dfrac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$ für $x = 0$ zu ermitteln.

Auflösung. Man findet $\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{5x^4}$. Setzt man aber hierin $x = 0$, so geht dieser Bruch abermals in $\frac{0}{0}$ über. Man bestimme darum $\frac{f''(x)}{F''(x)} = \frac{-\sin x + x}{20x^3}$. Für $x = 0$ folgt aus diesem Bruche aber wiederum $\frac{0}{0}$. Man bilde somit $\frac{f'''(x)}{F'''(x)} = \frac{-\cos x + 1}{60x^2}$ und da dieser Bruch nochmals für $x = 0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, den Werth $\frac{f^{IV}(x)}{F^{IV}(x)} = \frac{\sin x}{120x}$ und aus demselben Grunde $\frac{f^{V}(x)}{F^{V}(x)} = \frac{\cos x}{120}$. Aus diesem Bruche erhält man endlich für $x = 0$ den verlangten wahren Werth $\frac{1}{120}$.

3) Den Werth von $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin x}$ für $x = 0$ zu finden.

Auflösung. Man findet $\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\cos x}$ und hieraus, wenn man $x = 0$ setzt, als wahren Werth $= \frac{0}{1} = 0$.

4) $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{tg\, x - \sin x}{x^2}$ für $x = 0$ zu bestimmen.

Auflösung. Da $\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{2x}$ für $x = 0$ abermals in $\frac{0}{0}$ übergeht, so entwickle man $\frac{f''(x)}{F''(x)} = \frac{\frac{2\sin x}{\cos^3 x} + \sin x}{2}$ und setze hierin $x = 0$, um den verlangten Werth $\frac{0}{2} = 0$ zu erhalten.

§. 55. Bestimmung des Werthes $\frac{\infty}{\infty}$.

Gehen Zähler und Nenner des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ für einen speciellen Werth von $x = a$ in ∞ über, nimmt also der Bruch die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, n man zur Bestimmung des wahren Werthes dieselbe Regel wie anwenden. Denn setzt man $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$, so erscheint dieser für $x = a$ unter der Form $\frac{0}{0}$ und sein Werth kann wie vorhin

ermittelt werden. Nun ist aber

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{F(x)} = -\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}, \quad \frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

also für $x = a$:

$$\frac{\frac{F'(x)}{[F(x)]^2}}{\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}} = \frac{F'(a)}{f'(a)}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right)^2$$

Bezeichnen wir nun den Werth, welchen $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x = a$ annimmt, durch z, so hat man $z = \frac{F'(a)}{f'(a)} z^2$ und hiernach, wenn z weder 0 noch ∞ ist, $z = \frac{f'(a)}{F'(a)}$.

Ist $z = 0$, k eine beliebige, von Null verschiedene Constante, also $\left(\frac{f(x)}{F(x)} + k\right)_{x=a} = k$, so wird $\frac{f(x)}{F(x)} + k = \frac{f(x) + kF(x)}{F(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ für $x = a$ und da für $x = a$ der Werth dieses Bruches $= k$ also von Null verschieden ist, so folgt nach Obigem für den wahren Werth von

$$\left(\frac{f(x)}{F(x)} + k\right)_{x=a} = \frac{f'(a) + kF'(a)}{F'(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)} + k$$

also

$$\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)_{x=a} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

Ist $z = \infty$, also $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)_{x=a} = \infty$, so wird $\left(\frac{F(x)}{f(x)}\right)_{x=a} = 0$, folglich nach Obigem:

$$\left(\frac{F(x)}{f(x)}\right)_{x=a} = \frac{F'(a)}{f'(a)} = 0,$$

daher

$$\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)_{x=a} = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Wir ersehen hieraus, dass für alle Annahmen von z zur Bestimmung des wirklichen Werthes von $\frac{f(x)}{F(x)}$ die im vorhergehenden Paragraphen gelehrte Methode anzuwenden ist.

Anmerk. Erscheint bei einer unentwickelten Function $f(x, y) = 0$ der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

unter einer der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, so nehme man w als den wirklichen Werth an, differenzire Zähler und Nenner und setze nun

$$w = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} w}{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} w^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} w + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

und w kann nun leicht gefunden werden.

Werden in (1) sämmtliche zweiten Differentialquotienten wiederum Null, so differenzire man abermals Zähler und Nenner. Es ergibt sich alsdann:

$$w = -\frac{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} w + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} w\right) w}{\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} w + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} w\right) w}$$

oder

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} w^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} w^2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} w + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0.$$

Beispiel.

Man soll den Werth des Quotienten $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{lx}{cot\, x}$ für $x = 0$ bestimmen.

Auflösung. Da $\frac{f'(x)}{F'(x)} = -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{sin^2 x}} = -\frac{sin^2 x}{x}$ für $x = 0$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, so bestimme man $\frac{f''(x)}{F''(x)} = -2 sin\, x\; cos\, x$.

Setzt man nun hierin $x = 0$, so folgt 0 als wahrer Werth von $\left(\frac{lx}{cot\, x}\right)_{x=0}$.

§. 56. Bestimmung des Werthes $0 . \infty$.

Es werde $f(x) = 0$, dagegen $F(x) = \infty$ für $x = a$; man soll den Werth des Productes $f(x)\; F(x)$ für $x = a$ ermitteln.

Schreibt man zu diesem Ende $\frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}$ statt $f(x)\; F(x)$, so erscheint das

für $x = a$ unter der Form $\frac{0}{0}$ und kann nun wie früher gefunden

Beispiel.

..n wahren Werth von $arccos\, x \,.\, tg \frac{\pi x}{2}$ für $x = 1$ zu ermitteln, Ausdruck $0 . \infty$ wird, setze man

$$arc\cos x \,.\, tg\,\frac{\pi x}{2} = \frac{arc\cos x}{\cot\frac{\pi x}{2}}.$$

Da nun dieser Werth für $x = 1$ in $\frac{0}{0}$ übergeht, so findet man nach §. 54 aus

$$\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}}$$ für $x = 1$ als verlangten Werth ∞

§. 57. Bestimmung des Werthes $\infty - \infty$.

Werden in der Differenz $\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ für $x = a$ $F(x)$ und $\psi(x) = 0$, dagegen $f(x)$ und $\varphi(x)$ endlich und nicht Null, nimmt also die Differenz für $x = a$ die unbestimmte Form $\infty - \infty$ an, so setze man statt derselben zunächst $\frac{f(x)\,\psi(x) - \varphi(x)\,F(x)}{F(x)\,\psi(x)}$.

Für $x = a$ nimmt alsdann dieser Bruch die Form $\frac{0}{0}$ an und es kann somit der wirkliche Werth der fraglichen Differenz leicht nach §. 54 bestimmt werden.

§. 58. Bestimmung der Werthe 0^0, ∞^0, 1^∞ etc.

Nimmt $f(x)^{F(x)}$ für $x = a$ eine der Formen 0^0, ∞^0, 1^∞ u. s. w. an, so bestimme man zunächst den Werth von $lf(x)^{F(x)} = F(x)\,lf(x)$ für $x = a$. Bezeichnen wir denselben durch w, so ist

$$f(x)^{F(x)} = e^w, \text{ für } x = a.$$

Beispiele.

1) x^x geht für $x = 0$ in 0^0 über. Da nun xlx für $x = 0$ die Form $0 \,.\, \infty$ annimmt und man dafür nach früherem, wenn man $xlx = \frac{lx}{\frac{1}{x}}$ setzt, 0 für $x = 0$ erhält, so ist der wirkliche Werth von x^x für $x = 0$ [n]ach Obigem $e^0 = 1$.

2) Da $y = x^{\frac{1}{x}}$ für $x = \infty$ die Form ∞^0 annimmt, setze [m]an $ly = \frac{1}{x}\,lx$, so wird für $x = \infty$, $ly = \frac{\infty}{\infty}$. Nach §. 55 findet man [hier] dafür 0 als wahren Werth und man hat daher

$$ly = 0\,,\text{ also } y = e^0 = 1.$$

3) Für $x = 1$ geht $y = x^{\frac{1}{x-1}}$ über in 1^{∞}. Man hat aber $ly = \frac{1}{x-1}\,lx$ für $x = 1$ gleich $\frac{0}{0}$ und findet somit nach §. 54 $ly = 1$, also $y = e$.

§. 59. Aufgaben zur Uebung.

1) $\frac{x^n - 1}{x^3 - 1}$ für $x = 1$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{n}{3}$.

2) $\frac{\sin x}{x}$ für $x = 0$?

Aufl. $\frac{0}{0} = 1$.

3) $\frac{e^x + e^{-x} - 2}{\cos x - 1}$ für $x = 0$?

Aufl. $\frac{0}{0} = -2$.

4) $\frac{x^x - 1}{lx}$ für $x = 1$?

Aufl. $\frac{0}{0} = 1$.

5) $\frac{\sqrt[3]{x^2} - 4}{\sqrt{(x-7)^3} - 1}$ für $x = 8$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{2}{9}$.

6) $\frac{\arcsin x}{x}$ für $x = 0$?

Aufl. $\frac{0}{0} = 1$.

7) $\frac{x^2\sqrt{ax} + \sqrt{\frac{x}{a}} - x^3 - 1}{\sqrt[5]{a^4 x} - a}$ für $x = a$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{5}{2a}(1 - a^3)$.

$\frac{ctg\, lx}{\ldots - 1}$ für $x = 1$?

Aufl. $\frac{0}{0} = 1$.

11*

9) $\frac{x^4 - 10x^3 + 24x^2 + 32x - 128}{x^4 - 15x^3 + 84x^2 - 208x + 192}$ für $x = 4$?

Aufl. $\frac{0}{0} = 6.$

10) $\frac{\sin(x-4)(x-3)}{(x-4)(x-5)}$ für $x = 4$?

Aufl. $\frac{0}{0} = -1.$

11) $\frac{x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4}{2x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 2x - 1}$ für $x = -1$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{5}{3}.$

12) $\frac{x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 16x^2 + 9x - 2}{x^5 + 4x^4 - 26x^3 + 44x^2 - 31x + 8}$ für $x = 1$?

Aufl. $\frac{0}{0} = -\frac{1}{9}.$

13) $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) tg\, x$ für $x = \frac{\pi}{2}$?

Aufl. $0 . \infty = -1.$

14) $l(2-x)\, tg \frac{\pi x}{2}$ für $x = 1$?

Aufl. $0 . \infty = \frac{2}{\pi}.$

Andeut. Setze $tg \frac{\pi x}{2} = \frac{1}{cot \frac{\pi x}{2}}$ u. s. w.

15) $\sin(a-x)\, tg \frac{\pi}{2} \frac{x}{a}$ für $x = a$?

Aufl. $0 . \infty = \frac{2a}{\pi}.$

16) $cot(x-a) - \frac{1}{x-a}$ für $x = a$?

Aufl. $\infty - \infty = 0.$

Andeut. Setze $cot(x-a) = \frac{\cos(x-a)}{\sin(x-a)}$ u. s. w.

17) $\frac{1}{x-a} - \frac{1}{l(x-a+1)}$ für $x = a$?

Aufl. $\infty - \infty = -\frac{1}{2}.$

18) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ für $x = \infty$?

Aufl. $1^\infty = e.$

Andeut. Nach § 58 bilde $x l\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Dieser Werth wird für $x = \infty$ aber $\infty \,.\, 0$ und dessen wirklicher Werth dafür $= 1$ etc.

20) $arcsin x \,.\, cot x$ für $x = 0$?

Aufl. $0 \,.\, \infty = 1.$

21) $\frac{1}{x^2+1} \, l\,(e^x - 1)$ für $x = \infty$?

Aufl. $0 \,.\, \infty = 1.$

22) $sin \frac{a}{x} \, l\,(1 + e^x)$ für $x = \infty$?

Aufl. $0 \,.\, \infty = a.$

Andeut. Schreibe $x sin \frac{a}{x} \cdot \frac{l\,(1 + e^x)}{x}$ statt des gegebenen Ausdruckes, dann wird für $x = \infty$: $x sin \frac{a}{x} = a$ und $\frac{l\,(1 + e^x)}{x} = 1.$

23) $x^{\frac{1}{1+2lx}}$ für $x = 0$?

Aufl. $0^0 = e^{\frac{1}{2}}.$

24) $x^{\frac{1}{l(e^x-1)}}$ für $x = 0$?

Aufl. $0^0 = e.$

25) $\left(\frac{1}{1-e^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ für $x = \infty$?

Aufl. $0^0 = \frac{1}{e}.$

26) $\left[tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]^{cot x}$ für $x = 0$?

Aufl. $1^\infty = \frac{1}{e^2}.$

$\left(\frac{x}{1+x}\right)^{lx}$ für $x = \infty$?

Aufl. $1^\infty = e^0 = 1.$

Andeut. Setze $ly = \frac{l\frac{x}{1+x}}{\frac{1}{lx}}$ u. s. w

28) $\left(2 - \frac{2x}{\pi}\right)^{tg\,x}$ für $x = \frac{\pi}{2}$?

Aufl. $1^{\infty} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

29) $(1 + x)^{\frac{1}{lx}}$ für $x = \infty$?

Aufl. $\infty^0 = e$.

30) $\frac{1}{x - 2} - \frac{\frac{3}{2}x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ für $x = 2$?

Aufl. $\infty - \infty \doteq -\frac{1}{2}$.

31) $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ für $x = 0$?

Aufl. $\infty - \infty = 0$.

32) $\frac{2}{x} - \frac{x}{e^x - x - 1}$ für $x = 0$?

Aufl. $\infty - \infty = \frac{2}{3}$.

33) $\frac{2}{1 - x^2} - \frac{3}{1 - x^3}$ für $x = 1$?

Aufl. $\infty - \infty = -\frac{1}{2}$.

34) Es sei $(y - ax)\,(y - bx) - k\,(\alpha y + \beta x)^4 = 0$; man soll $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0, y = 0$ bestimmen.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = a$ oder $\frac{dy}{dx} = b$.

Andeut. Man findet $\frac{dy}{dx} = \frac{a\,(y - bx) + b\,(y - ax) + 4\,k\beta\,(\alpha y + \beta x)^3}{2y - (a + b)\,x - 4\alpha k\,(\alpha y + \beta x)^3}$

Da dieser Bruch für $x = 0$, $y = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so bilde man durch Differentiation

$$\frac{a\left(\frac{dy}{dx} - b\right) + b\left(\frac{dy}{dx} - a\right) + 12k\beta\,(\alpha y + \beta x)^2\left(\alpha\frac{dy}{dx} + \beta\right)}{2\frac{dy}{dx} - (a + b) - 12k\alpha\,(\alpha y + \beta x)^2\left(\alpha\frac{dy}{dx} + \beta\right)}$$

und setze hierin $x = 0$, $y = 0$. Man findet dann

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\left(\frac{dy}{dx} - b\right) + b\left(\frac{dy}{dx} - a\right)}{2\frac{dy}{dx} - (a + b)}$$

und hieraus $\frac{dy}{dx} = a$ oder b.

35) $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ für $x = a$?

Aufl. $\frac{0}{0} = f'(a)$.

36) $\frac{f(x) - f(a) - (x - a) f'(a)}{(x - a)^2}$ für $x = a$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{1}{2} f''(a)$

37) $\frac{f(x) - f(a) - (x - a) f'(a) - \frac{(x - a)^2}{1 . 2} f''(a)}{(x - a)^3}$ für $x = a$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{1}{1 . 2 . 3} f'''(a)$.

Siebenter Abschnitt.

Maxima und Minima der Functionen.

§. 60. Erklärung.

1) Man sagt die Function $f(x)$ sei für den Werth x_0 ein $\begin{matrix}\text{Maximum,}\\ \text{Minimum,}\end{matrix}$ wenn man eine positive Grösse ε (die beliebig klein sein kann) anzugeben vermag, so dass für jeden zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegenden beliebigen Werth h, die Differenz $f(x+h)-f(x)$ $\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$ ausfällt.

2) Ist $y=f(x)$ eine stetige Function und wird deren Verlauf durch eine Curve veranschaulicht (§. 3), so erkennt man sofort, dass a u s g e z e i c h n e t e W e r t h e (Maxima und Minima) nur für solche Werthe von x der Function entsprechen, für welche die betreffende Curvenordinate vom Wachsen in's Abnehmen oder umgekehrt übergeht. Da nach §. 7, 10. die Function $f(x)$ wächst oder abnimmt, je nachdem $f'(x)$ positiv oder negativ ausfällt, so geben die Ordinaten nur für solche Curvenpuncte ausgezeichnete Werthe an, für welche $f'(x)$ sein Zeichen ändert. Für ein stetiges $f'(x)$ ist dieses aber nach §. 3. 3. nur dann möglich, wenn für den betreffenden Werth von x, die Function $f'(x)=0$ wird, d. h. wenn die entsprechende Tangente parallel zur Abscissenachse ist. Je nachdem die Curve an dieser Stelle vom Steigen in's Abnehmen oder vom Abnehmen in's Steigen überg it, bezeichnet dieselbe ein M a x i m u m oder ein M i n i m u m der Funct n.

Ausgezeichnete Werthe der Function $f(x)$ sind also nur für so ie Werthe von x möglich, für welche $f'(x)=0$ oder discontinuir h wird, worin der Fall, dass $f'(x)=\infty$ ausfällt, mit inbegriffen t. Die Fälle, wo $f'(x)$ discontinuirlich wird, müssen für jede Aufg ie

besonders behandelt werden und finden darum im Nachfolgenden nur ausnahmsweise Berücksichtigung.

Fig. 16.

Ist $f'(x) = 0$ also die Tangente parallel mit der Abscissenachse, so findet aber nicht nothwendig ein Maximum oder Minimum Statt, wie solches aus Fig. 16 hervorgeht.

Entsprechen nun z. B. die Punkte A, B, C, D (Fig. 17) der Curve MN den Abscissen a, b, c, d, so sind $f(a)$ und $f(c)$ **Maxima**, dagegen $f(b)$ und $f(d)$ **Minima** der Function $f(x)$.

Fig. 17.

3) Zu demselben Resultate gelangt man auch auf folgende Weise:

Sieht man $f'(x)$ als Geschwindigkeit, $f(x)$ als den Weg an (§. 7), so finden ausgezeichnete Werthe an den Stellen statt, wo der sich bewegende Punct umkehrt, bei einer stetigen Bewegung also die Geschwindigkeit $f'(x) = 0$ ist und zwar bezeichnet diese Stelle ein Maximum oder Minimum, je nachdem die Geschwindigkeit vom Positiven in's Negative oder umgekehrt übergeht, je nachdem also die Beschleunigung $f''(x)$ an dieser Stelle positiv oder negativ ist (§. 35).

Anmerk. Wird $f'(x) = \infty$ d. h. ist an einer bestimmten Stelle die Tangente senkrecht zur Abscissenachse, so findet daselbst nicht nothwendig ein Maximum oder Minimum Statt, wie solches die Fig. 18, 19 und 20 veranschaulichen.

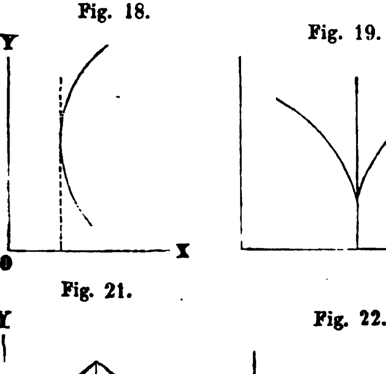


Fig. 18. Fig. 19.

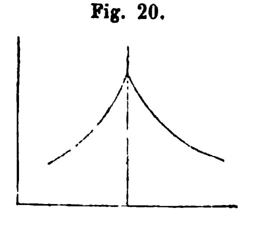


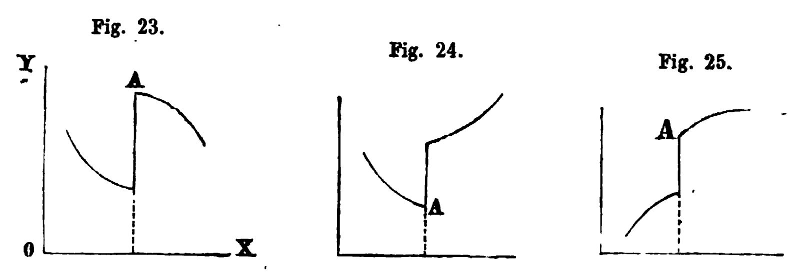
Fig. 20.

Fig. 21. Fig. 22.

Dem durch Fig. 18 repräsentirten Falle entspricht weder ein Maximum noch ein Minimum, Fig. 19 liefert ein Minimum, Fig. 20 dagegen ein Maximum.

Nehmen wir an, es sei $f(x)$ stetig $f'(x)$ aber **unstetig**, so kann ein Maximum oder ein Minimum an der betreffenden Stelle Statt. Zur Erläuterung dieses Falles dienen die Fig. 21 und 22.

Sind $f(x)$ und $f'(x)$ gleichzeitig unstetig, so entsprechen dem $f'(x)$ nach §. 7, 11 an der betreffenden Stelle drei Werthe, von welchen der eine unendlich ist. Die Bedingungen für Maxima und Minima ergeben sich leicht aus der Anschauung der Fig. 23, 24 und 25.



Der Punct A repräsentirt in Fig. 23 ein Maximum, in Fig. 24 ein Minimum, in Fig. 25 erkennen wir weder ein Maximum noch ein Minimum.

§. 61. Bestimmung der ausgezeichneten Werthe entwickelter Functionen von einer unabhängig Veränderlichen.

1) Um eine allgemeine Regel ausfindig zu machen, nach welcher sich auf das Vorhandensein ausgezeichneter Werthe einer entwickelten Function von einer unabhängig Veränderlichen schliessen lässt und nach welcher die Bestimmung derselben vorgenommen werden kann, sei $f(a)$ ein Maximum oder Minimum der Function $f(x)$, so folgt nach der Taylor'schen Reihe:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n,$$

wo $f, f', f'', \ldots$ in der Nähe des ausgezeichneten Werthes stetig vorausgesetzt werden*), dass $f'(a) = 0$ sein muss. Denn wäre $f'(a)$ von Null verschieden, so könnte man nach §. 4, 11. jedenfalls h so klein wählen, dass das Zeichen der Differenz $f(a+h) - f(a)$ mit dem von $hf'(a)$ übereinstimmt. Würde daher für ein positives h der Werth von $f(a+h) - f(a)$ positiv oder negativ, so müsste für ein negatives h bezüglich $f(a+h) - f(a)$ negativ oder positiv werden und es könnte somit $f(a)$ weder ein Maximum noch ein Minimum sein, weil nicht alle Nachbarwerthe zugleich kleiner oder grösser als $f(a)$ ausfallen würden.

Damit der Function $f(x)$ für $x = a$ ein ausgezeichneter W[illegible] entspreche, muss daher nothwendig die Bedingung $f'(a) = 0$ [illegible]füllt sein.

Nehmen wir nun an, es seien die $(n-1)$ ersten Different[illegible]

*) Die Fälle der Discontinuität müssen, wie schon bemerkt wurde, immer be[illegible]ders betrachtet werden.

quotienten für $x = a$ Null, also $f^{(n)}(x)$ der erste nicht Null werdende Differentialquotient, so hat man:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n.$$

Da man nun wieder h so klein wählen kann, dass das Zeichen von $f(a+h) - f(a)$ mit dem des Ausdruckes $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$ übereinstimmt, so ist bei einem geraden n die Function $f(x)$ für $x = a$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem $f^{(n)}(a)$ negativ oder positiv wird; bei einem ungeraden n dagegen entspricht derselben weder ein Maximum noch ein Minimum, weil sich das Zeichen von $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$ mit dem von h ändert, also die Differenzen $f(a+h) - f(a)$ und $f(a-h) - f(a)$ verschiedene Zeichen haben.

2) Um das Maximum maximorum oder das Minimum minimorum d. h. den Werth einer Function zu bestimmen, der von allen Werthen, welche die Function zwischen bestimmten Grenzen a und b annimmt, bezüglich der grösste oder kleinste ist, berücksichtige man, dass $f(x)$ wächst oder abnimmt je nachdem $f'(x)$ positiv oder negativ wird. Man suche daher zunächst diejenigen Werthe von x, für welche die Function $f(x)$ vom Wachsen in's Abnehmen oder umgekehrt übergeht. Liefern die Werthe $x_1, x_2, x_3, \ldots$ die Maxima $y_1, y_2, y_3, \ldots$ so ist der grösste dieser Werthe das Maximum maximorum und erhält man für $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ die Minima $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$, so ist der kleinste unter diesen Werthen das gesuchte Minimum minimorum der betreffenden Function.

Bleibt $f'(x)$ endlich und von einerlei Zeichen innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = b$, so liefern $f(a)$ und $f(b)$ die Werthe des Maximum maximorum und Minimum minimorum.

Beispiele.

1) Man soll untersuchen, für welche Werthe von x

$$y = 5x^2 - 3x - 2$$

ausgezeichnete Werthe annimmt.

[illegible]fl. Wir haben zunächst nach Obigem:

$$\frac{dy}{dx} = 10x - 3$$

[illegible] der Gleichung $10x - 3 = 0$

[illegible]ort $x = \frac{3}{10}$.

[illegible]un $\frac{d^2y}{dx^2} = 10$ ist, daher für jeden Werth von x, also

auch für $x = \frac{3}{10}$ positiv ausfällt, so wird y für diesen Werth von x ein Minimum und gleich $-\frac{49}{20} = -2\frac{9}{20}$.

2) Man soll in der Gleichung

$$y = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$$

diejenigen Werthe von x bestimmen, für welche y ausgezeichnete Werthe annimmt.

Aufl. Da $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x - 4$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$,

aus der Gleichung $\quad 3x^2 - 4x - 4 = 0$

sich aber die Werthe 2 und $-\frac{2}{3}$ für x ergeben und durch Einführung derselben der Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ bezüglich in 8 und -8 übergeht, so wird y

für $x = 2$ ein Minimum und $= -5$,
für $x = -\frac{2}{3}$ ein Maximum und $= 4\frac{13}{27}$.

3) Es soll untersucht werden, für welche Werthe von x die Function

$$y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$$

ausgezeichnete Werthe annimmt.

Aufl. Aus $\frac{dy}{dx} = 60\,(x^4 - x^3 - 2x^2) = 0$

folgt $\quad x = -1\,,\; x = 2\,,\; x = 0\,,\; x = 0.$

Da nun $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 60\,(4x^3 - 3x^2 - 4x)$

für $x = -1$ negativ und für $x = 2$ positiv ausfällt, so ist y für $x = -1$ ein Maximum und für $x = 2$ ein Minimum. Für $x = 0$ wird auch $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Bestimmt man darum $\frac{d^3y}{dx^3} = 60\,(12x^2 - 6x - 4)$ und setzt hierin $x = 0$, so ergibt sich daraus, dass für $x = 0$ der Function y weder ein Maximum noch ein Minimum entspricht, indem $\frac{d^3y}{dx^3}$ dafür nicht verschwindet.

4) Eine Zahl a in zwei Theile so zu zerlegen, dass das Product derselben das grösstmögliche wird.

Aufl. Bezeichnet x den einen, also $a - x$ den anderen Factor, so folgt aus

$$y = x\,(a - x) = ax - x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = a - 2x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2.$$

Setzt man nun $a - 2x = 0$, also $x = \frac{a}{2}$, so bleibt dafür $\frac{d^2y}{dx^2}$ neg

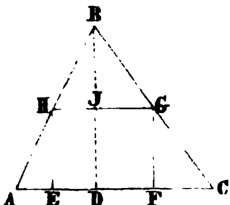
und somit ist y für $x = \frac{a}{2}$ ein Maximum. Beide Factoren sind da

$\frac{a}{2}$ und das grösste Product ist somit $y = \frac{a^2}{4}$.

5) In ein Dreieck ABC (Fig. 26) das grösstmögliche Rechteck so einzuzeichnen, dass eine Seite desselben mit einer Dreieckseite AC zusammenfällt.

Aufl. Zieht man die zu $AC = g$ gehörige Höhe $BD = h$ und bezeichnet durch x und y bezüglich die Seiten EF und FG des zu suchenden Rechteckes, so folgt aus der Proportion

Fig. 26.



$$AC : BD = HG : BJ$$

oder
$$g : h = x : h - y$$

sofort:
$$x = g\,\frac{(h - y)}{h}$$

Hiernach wird der Inhalt des Rechteckes

$$xy = \frac{g\,(h - y)}{h}\,y$$

und ist somit, wie man auf die bekannte Art findet, ein Maximum, wenn $y = \frac{h}{2}$, also $x = \frac{g}{2}$ ist.

In diesem Falle aber ist der Inhalt des Rechteckes $= \frac{gh}{4}$ oder gleich dem halben Inhalte des Dreiecks ABC.

6) Einen geraden Kreiskegel von gegebenem Kubikinhalte K so zu construiren, dass dessen Mantel M ein Minimum wird.

Aufl. Bezeichnet x den Radius der Basis, y die Höhe des Kegels, so folgt aus

$$\frac{\pi x^2 y}{3} = K\,,\; y = \frac{3K}{\pi x^2}$$

oder, wenn man der Kürze halber

$$\frac{3K}{\pi} = m \text{ setzt}, \; y = \frac{m}{x^2}$$

hiernach wird der Mantel

$$M = \pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi \sqrt{x^4 + \frac{m^2}{x^2}}.$$

Aus
$$\frac{dM}{dx} = \pi\,\frac{2x^3 - m^2 x^{-3}}{\sqrt{x^4 + \frac{m^2}{x^2}}} = 0$$

f… …r
$$x^6 = \frac{m^2}{2}\,,\; x = \sqrt[6]{\frac{m^2}{2}}\,,\; x^2 = \sqrt[3]{\frac{m^2}{2}}$$

u… $\frac{d^2M}{dx^2}$ für diesen Werth von x positiv ausfällt, so wird für

$$x = \sqrt[6]{\frac{m^2}{2}} = \sqrt[6]{\frac{9K^2}{2\pi^2}}$$

der Mantel M ein **Minimum**. Für die entsprechende Höhe findet man hiernach

$$y = \frac{m}{\sqrt[3]{\frac{m^2}{2}}} = \sqrt[3]{2m} = x\sqrt{2} = \sqrt[6]{\frac{36K^2}{\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}}$$

7) Aus einem cylindrischen Baumstamme vom Durchmesser d in Bezug auf relative Festigkeit den stärksten parallel-epipedischen Balken zu schlagen.

Aufl. Bezeichnet b die Breite, h die Höhe des Querschnittes des Balkens, so ist nach statischen Gesetzen die relative Festigkeit F proportional dem Producte bh^2 und es muss somit bh^2, oder da $h^2 = d^2 - b^2$ ist,

$$F = b\,(d^2 - b^2)$$

ein Maximum werden.

Aus $\frac{dF}{db} = d^2 - 3b^2 = 0$ folgt aber $b^2 = \frac{d^2}{3}$, also $h^2 = \frac{2d^2}{3}$. Da $\frac{d^2F}{db^2} = -6b$ für $b^2 = \frac{d^2}{3}$ **negativ** ausfällt, so ist also die Festigkeit ein **Maximum**, wenn $b = \frac{d}{3}\sqrt{3}$ und $h = \frac{d}{3}\sqrt{6}$ ist, oder wenn sich verhält: $b : h = 1 : \sqrt{2}$.

Fig. 27.

Anmerk. Hierauf gründet sich folgende Construction des Querschnittes: Man theile den Durchmesser AB (Fig. 27) in 3 gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten C und D die Perpendikel FC und GD, so bestimmen diese den verlangten Querschnitt $AGBF$; denn es verhält sich

$$AF : AG = \sqrt{AC} : \sqrt{AD} = 1 : \sqrt{2}$$

8) Das Licht geht von einem Punkte P_1 (Fig. 28) aus einem Medium M_1 nach einem Punkte P_2 in einem anderen Medium M_2. Seine Geschwindigkeit in M_1 sei c_1, in $M_2 = c_2$. Man soll bestimmen, nach welchem Gesetze die Bewegung von P_1 nach P_2 erfolgt, wenn der Weg in kürzester Zeit zurückgelegt wird.

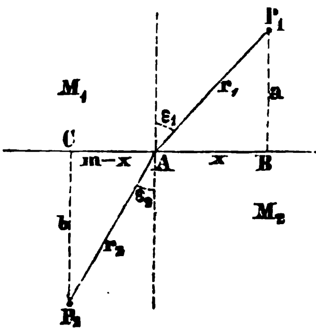


Fig. 28.

Aufl. Nach den Bewegungsgesetzen muss, wenn man P_1A durch r_1, AP_2 durch r_2 bezeichnet, die Zeit

$$Z = \frac{r_1}{c_1} + \frac{r_2}{c_2}$$

ein **Minimum** sein.

Denkt man sich nun die Perpendi $P_1B = a$ und $P_2C = b$ auf die Trennungsfläche der zwei Mittel gezog $BC = m$, $AB = x$ gesetzt, so hat man

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{1}{c_1}\frac{dr_1}{dx} + \frac{1}{c_2}\frac{dr_2}{dx}$$

oder da $r_1^2 = a^2 + x^2$; $r_2^2 = b^2 + (m - x)^2$

also $$\frac{dr_1}{dx} = \frac{x}{r_1}\,;\ \frac{dr_2}{dx} = \frac{-(m-x)}{r_2}$$

auch $$\frac{dZ}{dx} = \frac{x}{c_1 r_1} - \frac{m-x}{c_2 r_2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck Null, so folgt

$$\frac{1}{c_1}\cdot\frac{x}{r_1} = \frac{1}{c_2}\cdot\frac{m-x}{r_2}$$

oder $$c_1 : c_2 = \sin\varepsilon_1 : \sin\varepsilon_2$$

wodurch das bekannte Brechungsgesetz ausgedrückt ist.

Anmerk. Es bedarf wohl in vorliegendem Falle keiner besonderen Untersuchung, dass unter dieser Voraussetzung Z nur ein Minimum sein kann.

9) In wie viel gleiche Theile muss die Zahl a getheilt werden, damit das Product der Theile ein grösstes wird?

Aufl. Setzen wir die Anzahl der Theile $= x$, so muss

$$y = \left(\frac{a}{x}\right)^x$$

ein Maximum werden. Man hat nun

$$ly = x\,(la - lx)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = la - 1 - lx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

und aus $$la - 1 - lx = 0$$

folgt $$lx = la - 1 = la - le = l\frac{a}{e}$$

oder $$x = \frac{a}{e}.$$

Um zu zeigen, dass für diesen Werth von x wirklich y ein Maximum wird, entwickeln wir aus (α)

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{a}{x}\right)^x (la - 1 - lx)$$

und hieraus $$\frac{d^2y}{dx^2} = (la - 1 - lx)\,\frac{d}{dx}\left(\frac{a}{x}\right)^x - \left(\frac{a}{x}\right)^x\cdot\frac{1}{x}.$$

B[illegible]ichtigen wir, dass $la - 1 - lx = 0$ ist, so folgt aus $-\left(\frac{a}{x}\right)^x\cdot\frac{1}{x}$, [illegible]n darin $x = \frac{a}{e}$ einführt, $-\frac{e}{a}\,e^{\frac{a}{e}}$, also für $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein negatives Re-

Somit wird y für $x = \frac{a}{e}$ ein Maximum.

Man soll $y = (x - a)^{\frac{4}{5}} + b$ zu einem ausgezeichneten Werthe

Aufl. Man findet $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{5} \frac{1}{\sqrt[5]{x-a}}$. Hier wird $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ unendlich und diesem Werthe von x entspricht ein Minimum der Function, wie man unmittelbar einsieht, wenn man für x den Werth $a \pm h$ einführt.

§. 62. Aufgaben zur Uebung.

1) Für welche Werthe von x wird y ein Maximum oder Minimum, wenn gegeben ist:

a) $y = 4x^4 - 36x^3 + 97x^2 - 72x + 21$

b) $y = x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 42x + 53$

c) $y = x^4 - 10x^3 + 33x^2 - 40x + 23$

d) $y = x^3 + 2x^2 - 39x + 60$

e) $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Auflösungen.

a) für $x = \frac{1}{2}$ und 4 Minima, für $x = \frac{9}{4}$ ein Maximum,

b) „ $x = -\frac{3}{2}$ ein Maxim., für $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{37}$ ein Minim.

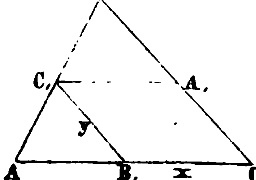
c) „ $x = \frac{5}{2}$ ein Maximum, für $x = 1$ und 4 Minima,

d) „ $x = -\frac{13}{3}$ ein Maximum, für $x = 3$ ein Minimum,

e) „ $x = e$ ein Maximum.

2) In ein Dreieck ABC (Fig. 29) das grösstmögliche Parallelogramm so einzuzeichnen, dass dasselbe einen Winkel C mit dem Dreiecke gemeinschaftlich hat.

Fig. 29.



Aufl. $CB_1 = \frac{1}{2} AC$, $CA_1 = \frac{1}{2} BC$.

Andeut. $y : AC - x = BC : AC$

$$y = \frac{BC}{AC}(AC - x).$$

Nun muss xy ein Maximum werden.

3) Man soll x so bestimmen, dass

$$y = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + (a_3 - x)^2 + \ldots + (a_n - x)^2$$

ein Minimum wird.

Aufl. $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$

4) Man soll eine Zahl a so in zwei Theile theilen, dass das Product $x^m (a - x)^n$ ein Maximum ist.

Aufl. $$x = \frac{ma}{m + n}, \quad a - x = \frac{na}{m + n}$$

also $$x : a - x = m : n.$$

5) Aus zwei gegebenen Seiten a und b das Dreieck vom grösstmöglichen Inhalte zu construiren.

Aufl. Die zwei Seiten schliessen einen rechten Winkel ein.

Andeut. $y = \frac{ab}{2} \sin x$ muss ein Maximum werden.

6) Welches ist unter allen Rechtecken von gegebenem Inhalte I dasjenige, das den kleinsten Umfang hat?

Aufl. Das Quadrat.

Andeut. Der Umfang $= 2(x + y) = 2\left(x + \frac{I}{x}\right)$ muss ein Minimum sein.

7) Von einem Dreiecke ABC (Fig. 29) kennt man $AC = b$ und $\measuredangle B$, man soll daraus ein Dreieck so construiren, dass die Summe der beiden andern Seiten ein Maximum wird.

Aufl. Die beiden Seiten werden gleich.

Andeut. $b : x = \sin B : \sin C$ und $b : y = \sin B : \sin A$, also
$$x + y = \frac{b}{\sin B} (\sin A + \sin C).$$
Es muss daher $\sin A + \sin (180 - B - A)$ ein Maximum werden.

8) Ueber eine Strecke g als Grundlinie dasjenige Dreieck von gegebenem Umfange $2U$ zu zeichnen, welches den grössten Inhalt hat.

Aufl. Das Dreieck ist gleichschenklig und dessen Schenkel sind $U - \frac{g}{2}$.

Andeut. Eine der beiden unbekannten Seiten sei x, so muss der Inhalt
$$\sqrt{U(U - g)(U - x)(g + x - U)}$$
ein Maximum werden.

9) In ein gegebenes Quadrat a^2 ein anderes vom kleinsten Inhalt- -o einzuzeichnen, dass dessen Eckpunkte in die Seiten des erst ...n.

... Die Halbirungspunkte der Seiten bestimmen die Eckpun ...es eingeschriebenen Quadrates.

...ut. Ist x die Entfernung zweier zunächst liegenden Ecken beider Figuren, so m... ...r Inhalt des eingeschriebenen Quadrates $a^2 - \frac{4(a - x)x}{2}$ ein Minimum werd...

10) Eine Gerade MN (Fig. 30) und zwei Punkte A und B sind gegeben. Man soll in jener einen Punkt P so bestimmen, dass die Summe $AP + BP$ ein Minimum wird.

Fig. 30.

Aufl. Es muss $\sphericalangle APM = \sphericalangle BPN$ sein.

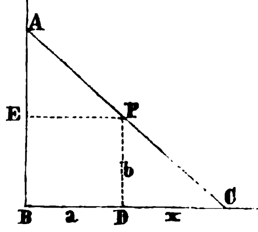
Andeut. Ist $CD = c$, so muss $y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (c - x)^2}$ ein Minimum sein. Aus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{m} - \frac{c - x}{n} = 0$$

folgt, dass $\triangle APC \backsim \triangle BPD$ etc.

11) Ein rechter Winkel ABC (Fig. 31) und innerhalb desselben ein Punkt P durch die Coordinaten a und b sind gegeben. Man soll durch diesen die kürzeste Strecke zwischen den Winkelschenkeln ziehen.

Fig. 31.



Aufl. $DC = x = \sqrt[3]{ab^2}$.

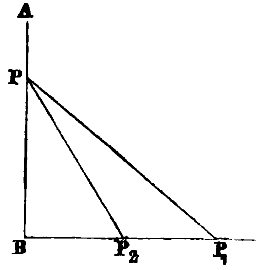
Andeut. $AE : a = b : x$, $AE = \frac{ab}{x}$.

$$AC = AP + PC = \sqrt{\frac{a^2b^2}{x^2} + a^2} + \sqrt{b^2 + x^2}$$

muss ein Minimum werden.

12) Auf dem Schenkel BC (Fig. 32) des rechten Winkels ABC sind zwei Punkte P_1 und P_2 durch die Entfernungen $P_1B = a$, $P_2B = b$ gegeben. Man soll in dem anderen Schenkel BA einen dritten Punkt P so angeben, dass $\sphericalangle P_1PP_2$ ein Maximum wird.

Fig. 32.



Aufl. $BP = x = \sqrt{ab}$.

Andeut. $tg\, P_1PP_2 = tg\,(P_1PB - P_2PB) = \dfrac{\frac{a}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{ab}{x^2}}$

muss ein Maximum werden.

13) Welches ist das grösste Rechteck, das sich in einen gegebenen Kreis zeichnen lässt?

Aufl. Das eingeschriebene Quadrat.

Andeut. Sind x und y die beiden Seiten des Rechteckes, d der Durchmesser des Kreises, so muss $xy = x\sqrt{d^2 - x^2}$ ein Maximum werden.

14) Einen gegebenen Winkel in einen Kreis so als Peripheriewinkel einzutragen, dass das von seinen Schenkeln und dem dazwischen

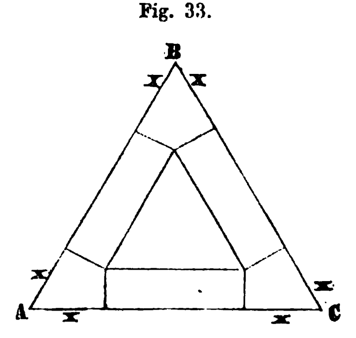
liegenden Bogen begrenzte Kreisstück ein Maximum wird. Wie ist der Winkel einzutragen?

Aufl. So, dass der zum Scheitel gehörige Halbmesser den Winkel halbirt.

Andeut. Da die dem Winkel entsprechende Sehne und der zugehörige Bogen für jede Lage des Peripheriewinkels constant bleiben, so wird der Inhalt des Kreisstückes ein Maximum, wenn das über der Sehne gezeichnete Dreieck ein Maximum ist u. s. w. nach Aufg. 7

15) Ein gleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 33), dessen Seite $= a$, ist gegeben. Man soll von den Ecken desselben in nebenverzeichneter Weise drei congruente gleichschenklige Vierecke so abschneiden, dass der übrigbleibende Theil das Netz des grösstmöglichen Prisma bildet.

Fig. 33.

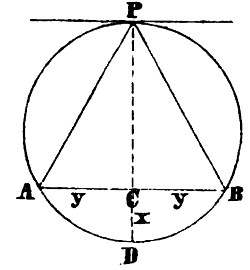


Aufl. $x = \frac{a}{6}$.

Andeut. $\frac{(a - 2x)^2}{4} \sqrt{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} =$ Kubikinhalt y, folglich muss $x\,(a - 2x)^2$ ein Maximum werden.

16) In der Peripherie eines Kreises vom Radius r ist ein Punkt P (Fig. 34) gegeben; man soll parallel zur Tangente dieses Punktes eine Sehne AB so ziehen, dass das $\triangle PAB$ ein Maximum wird.

Fig. 34.

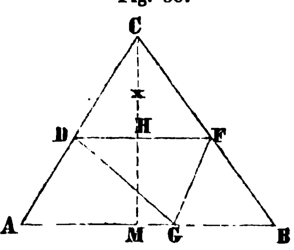


Aufl. $CD = \frac{r}{2}$; $\triangle PAB = \frac{3r^2}{8} \sqrt{3}$.

Andeut. $y = \sqrt{x\,(2r - x)}$; $\triangle ABP = y\,(2r - x)$ $= (2r - x) \sqrt{x\,(2r - x)}$ muss ein Maximum werden.

17) Die Grundlinie AB (Fig. 35) eines Dreieckes ABC sei g, die zugehörige Höhe $CM = h$. Man soll in dieses Dreieck das grösstmögliche Dreieck DFG so einzeichnen, dass $DF \parallel AB$ wird. Wie gross wird CH?

Fig. 35.



fl. $CH = x = \frac{h}{2}$; $DF = \frac{g}{2}$;

$$\triangle DFG = \frac{gh}{8}.$$

leut. $h : g = x : DF$; $DF = \frac{gx}{h}$.

$\cdot\cdot = \frac{gx}{2h}\,(h - x)$ soll ein Maximum werden.

18) Einen Kegel von gegebenem Kubikinhalte K zu construiren, dessen Oberfläche ein Minimum wird.

Aufl. Halbmesser der Basis $= \sqrt[6]{\frac{9K^2}{8\pi^2}}$, Höhe $= 2\sqrt[6]{\frac{9K^2}{\pi^2}}$.

Andeut. Der Basis Halbmesser sei x, die Höhe y, so muss

$$O = \pi x^2 + \pi x \sqrt{x^2 + y^2}$$

ein Minimum werden. Aus $\frac{\pi x^2 y}{3} = K$ erhält man y u. s. w.

19) Ein Kreis vom Radius r ist gegeben. Man soll in demselben denjenigen Sektor bestimmen, welcher, als Kegelmantel betrachtet, den grössten Kegel abgibt.

Aufl. Centriwinkel $x = 120\sqrt{6} = 293^0\ 56'19''$.

Andeut. Bezeichnet b den Bogen des Sektors, so ist der Kubikinhalt des Kegels $K = \frac{\pi}{3}\left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \sqrt{r^2 - \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2}$ oder wenn man den Werth von $b = \frac{2\pi r}{360}x$, wo x den dem Bogen b entsprechenden Centriwinkel bezeichnet, einführt und reducirt

$$K = \frac{\pi}{3}\ \frac{r^3}{360^2}\ x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{360^2}}.$$

Man findet aber, dass $x^2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{360^2}}$ ein Maximum wird für

$$x = 120\sqrt{6} = 293^0\ 56'\ 19''.$$

20) In einem geraden Kreiskegel, dessen Radius $= r$ und dessen Höhe $= h$ ist, den grössten Cylinder zu construiren.

Aufl. Höhe $x = \frac{h}{3}$, Radius $y = \frac{2r}{3}$.

Andeut. $r : y = h : h - x$, $y = \frac{r\,(h - x)}{h}$. Inhalt $= \pi y^2 x$

$$= \pi x \,.\, \frac{r^2}{h^2}\,(h - x)^2 \text{ muss ein Maximum werden.}$$

21) Ein oben offenes cylindrisches Gefäss von gegebenem Inhalte K so zu construiren, dass dessen Oberfläche ein Minimum wird.

Aufl. Halbmesser $=$ Höhe $= \sqrt[3]{\frac{K}{\pi}}$.

Andeut. Bezeichnet x den Halbmesser, y die Höhe, so muss

$$\pi x^2 + 2\pi xy = \pi x^2 + 2\pi x \frac{K}{\pi x^2}$$

ein Minimum sein. Man findet dafür $x = \sqrt[3]{\frac{K}{\pi}}$ und in $\pi x^2 y = K$ eingeführt, er man $y = \sqrt[3]{\frac{K}{\pi}}$

22) Ein Körper vom Gewichte Q liegt auf horizontaler Unterla Unter welchem Winkel x muss eine Zugkraft auf denselben einwirke

damit diese ein Minimum wird und wie gross ist sie, wenn man den Reibungscoefficienten durch μ bezeichnet?

Aufl. $tg\,x = \mu; y = \frac{\mu Q}{\sqrt{1+\mu^2}}$.

Andeut. Aus der Gleichung

$$y \cos x = \mu\,(Q - y \sin x)$$

folgt, dass $y = \frac{\mu Q}{\cos x + \mu \sin x}$ ein Minimum werden soll. Für $tg\,x = \mu$ ist dieses der Fall. Dann hat man

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}},\quad \sin x = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

und y ist nun leicht zu finden.

23) Wie hoch muss ein Licht B (Fig. 36) über die Horizontalebene AC gestellt werden, damit die Lichtstärke bei C ein Maximum wird, wenn $AC = a$ gegeben ist?

Fig. 36.

Aufl. $AB = x = \frac{a}{2}\sqrt{2} = 0{,}707a$.

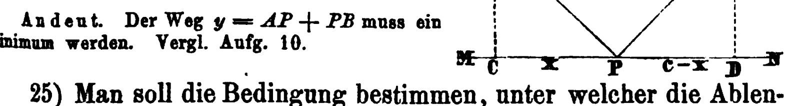
Andeut. Die Lichtstärke ist bekanntlich direct proportional dem Sinus des Neigungswinkels und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung von der Lichtquelle. Man hat daher

$$y = \frac{L \sin \alpha}{BC^2} = \frac{Lx}{BC^3} = \frac{Lx}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dieser Ausdruck wird ein Maximum, wenn $x^2 = \frac{a^2}{2}$ ist etc.

24) Welchen Weg muss das Licht einschlagen, wenn es von A (Fig. 37) nach dem Spiegel CD und von hier nach B gelangen soll?

Fig. 37.

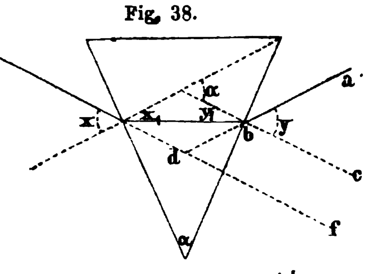


Aufl. So, dass $\measuredangle APC = \measuredangle BPD$ wird.

Andeut. Der Weg $y = AP + PB$ muss ein Minimum werden. Vergl. Aufg. 10.

25) Man soll die Bedingung bestimmen, unter welcher die Ablenkung eines auf ein dreiseitiges Prisma fallenden Lichtstrahles ein Minimum wird.

Fig. 38.



(Fig. 38) $x = y$.

..ut. Nach einem bekannten ...schen Gesetze ist das Verhält- ..es Sinus des Einfallswinkels zum ... Brechungswinkels bei den- ...en ein constantes. Setzen wir daher $\frac{\sin x}{\sin x_1} = n$, also auch $\frac{\sin y}{\sin y_1} = n$,



so soll $\measuredangle\, adf = x - x_1 + y - y_1 = x + y - \alpha$
oder $x + y$ ein Minimum werden.

Nun sind aber x und y Functionen von x_1 und man hat somit

$$\frac{d}{dx_1}(x + y) = \frac{dx}{dx_1} + \frac{dy}{dx_1} = 0$$

zu setzen, um die betreffenden Werthe zu ermitteln.

Aus $\sin x = n \sin x_1$ und $\sin y = n \sin y_1 = n \sin(\alpha - x_1)$ folgt:

$$\frac{dx}{dx_1} = \frac{n \cos x_1}{\cos x} \text{ und } \frac{dy}{dx_1} = -\frac{n \cos(\alpha - x_1)}{\cos y}$$

und aus $$\frac{n \cos x_1}{\cos x} - \frac{n \cos(\alpha - x_1)}{\cos y} = 0:$$

$$\cos x_1 \cos y = \cos x \cos y_1$$
$$\cos^2 x_1 \cos^2 y = \cos^2 x \cos^2 y_1$$

oder da $$\sin x_1 = \frac{\sin x}{n},\ \sin y_1 = \frac{\sin y}{n},$$

auch $$\left(1 - \frac{\sin^2 x}{n^2}\right)(1 - \sin^2 y) = (1 - \sin^2 x)\left(1 - \frac{\sin^2 y}{n^2}\right)$$

oder $$\sin^2 y + \frac{\sin^2 x}{n^2} - \sin^2 x - \frac{\sin^2 y}{n^2} = 0$$

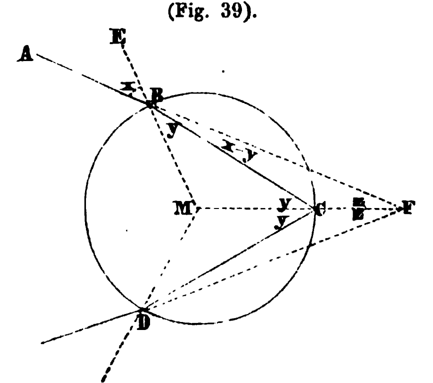
oder $$(\sin^2 y - \sin^2 x)\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 0$$

oder $$\sin x = \sin y$$

also, da x und y spitze Winkel sind, $x = y$, daher auch $x_1 = y_1$.

26) Auf einen Regentropfen M (Fig. 39) fällt ein Lichtstrahl AB, der in B gebrochen, in C reflectirt wird und nach der Brechung in D den Tropfen verlässt. Man soll den Einfallswinkel $ABE = x$ so bestimmen, dass die Ablenkung BFD ein Minimum ist.

(Fig. 39).



Aufl. Bezeichnet n das Brechungsverhältniss $\frac{\sin x}{\sin y}$, so wird $\cos x = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}}$.

Andeut. $\sin x = n \sin y$ und da y eine Function von x ist,

$$\cos x = n \cos y \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Aus $y = x - y + z$ oder $z = 2y - x$ folgt ferner

$$\frac{dz}{dx} = 2\frac{dy}{dx} - 1 \text{ und aus } 2\frac{dy}{dx} - 1 = 0,\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.$$

Nach (α) ist somit $\cos x = \frac{n \cos y}{2}$, $\cos^2 y = \frac{4 \cos^2 x}{n^2}$, $1 - \sin^2 y = \frac{4(1 - \sin^2 x)}{n^2}$,

$$1 - \frac{\sin^2 x}{n^2} = \frac{4(1 - \sin^2 x)}{n^2},\ \sin^2 x = \frac{4 - n^2}{3},\ \cos^2 x = \frac{n^2 - 1}{3}.$$

27) Ein Lichtstrahl AB (Fig. 40) fällt auf einen Regentropfen, wird bei B gebrochen, bei C und D reflectirt und tritt bei E wieder aus. Man soll den Einfallswinkel $ABH = x$ bestimmen, für welchen die Ablenkung AFG ein Minimum wird.

Aufl. $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n^2-1}{2}}$

Fig. 40.

Andeut. Da $\sin x = n \sin y$ und y eine Function von x, so folgt

$$\cos x = n \cos y \frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

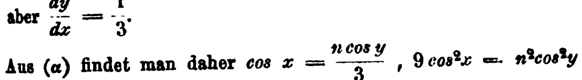
Nun ist aber

$2z + 2(180^0 - x) + 6y = 3 \cdot 180^0$

oder $\quad z = 90^0 + x - 3y$.

z wird daher ein Minimum, wenn $x - 3y$ ein solches ist.

Aus $\frac{dz}{dx} = 1 - 3\frac{dy}{dx} = 0$ erhält man aber $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}$.



Aus (α) findet man daher $\cos x = \frac{n \cos y}{3}$, $9\cos^2 x = n^2 \cos^2 y$

$$9(1 - \sin^2 x) = n^2(1 - \sin^2 y) = n^2\left(1 - \frac{\sin^2 x}{n^2}\right)$$

und hieraus $\quad \sin^2 x = \frac{9 - n^2}{8}$, $\cos^2 x = \frac{n^2 - 1}{8}$.

28) In einem Abstande d befinden sich zwei Lichtquellen A und B (Fig. 41), welchen in der Entfernung 1 bezüglich die Intensitäten a^3 und b^3 entsprechen. Man soll die am schwächsten beleuchtete Stelle C bestimmen.

Fig. 41.

Aufl. $AC = x = \frac{ad}{a + b}$.

Andeut. Bestimme x so, dass $\frac{a^3}{x^2} + \frac{b^3}{(d - x)^2}$ ein Minimum wird.

Anmerk. Aus $x = \frac{ad}{a + b}$ folgt unmittelbar, dass sich verhält

$$x : d - x = a : b.$$

§. 63. Bestimmung der ausgezeichneten Werthe unentwickelter Functionen.

Ist $f(x, y) = 0$ und soll y einen ausgezeichneten Werth annehmen, so hat man zunächst

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0\,; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für den Fall nun, dass der Function ein Maximum oder Minimum entspricht, muss aber $\frac{dy}{dx} = 0$ sein*). Dies kann stattfinden für

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ oder } \frac{\partial f}{\partial y} = \infty.$$

Durch Verbindung einer dieser Gleichungen mit der vorgelegten, erhält man die Werthe von x, für welche y ein Maximum oder Minimum werden kann.

Anmerk. Es kann sich ereignen, dass den Werthen $x = x_0$, $y = y_0$ die drei Gleichungen $f(x, y) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ genügen. In diesem Falle kann $\frac{dy}{dx}$ nicht aus (1) gezogen werden. Der betreffenden Curve entspricht alsdann für $x = x_0$, $y = y_0$ ein sog. singulärer Punkt, worüber später das Nähere folgt.

Aus
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$
ergibt sich (§. 45)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$
oder wenn man $\frac{dy}{dx} = 0$ setzt, so erhält man unter der Voraussetzung dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ endlich seien, aus $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$

sofort:
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Das Zeichen dieses zweiten Differentialquotienten bestimmt nun wieder, ob der für y gefundene Werth ein Maximum oder ein Minimum ist. Reducirt sich $\frac{d^2 y}{dx^2}$ auf Null, so muss man zu den höheren Differentialquotienten übergehen.

Beispiele.

1) Aus
$$y^3 + 3axy - x^3 = 0$$
folgt
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - ay}{y^2 + ax}$$
und die beiden Gleichungen
$$x^2 - ay = 0 \text{ und } y^3 + 3axy - x^3 = 0$$
liefern für x und y die zusammengehörigen reellen Werthe:
$$x = 0,\ y = 0 \text{ und } x = -a\sqrt[3]{2},\ y = a\sqrt[3]{4}.$$

*) Die Fälle, wo $\frac{dy}{dx} = \infty$ oder unstetig wird, werden hier ausgeschlossen.

Da nun $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x}{y^2 + ax}$$

so folgt hieraus für $x = -a\sqrt[3]{2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a\sqrt[3]{2}}{a^2\sqrt[3]{16} - a^2\sqrt[3]{2}} = -\frac{2a\sqrt[3]{2}}{a^2\sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a}$$

und es ist somit y für $x = -a\sqrt[3]{2}$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem a positiv oder negativ ist.

2) Ist $$y^4 - 4axy + x^4 = 0,$$

so wird $$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 + ay}{y^3 - ax}$$

und aus $$-x^3 + ay = 0\,;\; y^4 - 4axy + x^4 = 0$$

ergeben sich: $x = 0\,,\, y = 0$ und $x = \sqrt{a}\sqrt[8]{3}\,,\, y = \sqrt{a}\sqrt[8]{27}$.

Da $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3\sqrt[8]{3}}{2\sqrt{a}}$, so ist y für $x = \sqrt{a}\sqrt[8]{3}$ ein Maximum.

3) Es sei $$ay^3 + 2bxy - x^2 = 0,$$

also $$\frac{dy}{dx} = -\frac{2by - 2x}{3ay^2 + 2bx}$$

so folgt aus

$$by - x = 0 \text{ und } ay^3 + 2bxy - x^2 = 0$$

$$x = -\frac{b^3}{a}\,,\, y = -\frac{b^2}{a}$$

und da $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a}{b^4},$$

so wird y für $x = -\frac{b^3}{a}$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem a negativ oder positiv ist.

2) Hat man mehr als zwei Veränderliche und sind z. B. die drei Gleichungen

$$f(x\,,y\,,z\,,u) = 0\,;\; \varphi(x\,,y\,,z\,,u) = 0\,;\; \psi(x\,,y\,,z\,,u) = 0$$

gegeben, wo x als die Unabhängige, $y\,,z\,,u$ also als Functionen von x angesehen werden mögen, so muss, wenn z. B. y für einen bestimmten Werth von x einen ausgezeichneten Werth annehmen soll, $\frac{dy}{dx} = 0$ werden.

[Diff]erenzirt man nun obige Gleichungen nach x unter der Berücksi[chtig]ung, dass $\frac{dy}{dx} = 0$, und y, z, u Functionen von x sind, so folgt*):

[Di]e Fälle, in welchen $\frac{dy}{dx}$ unstetig wird, sind, wie schon bemerkt, immer ausge[schlosse]n.

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{dz}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{du}{dx} = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{du}{dx}$ ergibt sich aus diesen Gleichungen eine vierte von der Form

$$F(x, y, z, u) = 0,$$

welche in Verbindung mit den vorgelegten Gleichungen diejenigen Werthe von x, y, z, u liefert, für welche y zu einem Maximum oder Minimum werden kann.

Beispiel.

Es seien die Gleichungen

$$z = y + 1 \text{ und } x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

gegeben; man soll z zu einem Maximum oder Minimum machen.

Aufl. Da hiernach y und z Functionen von x sind, so hat man

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} \text{ und } x + y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = 0$$

oder da $\frac{dz}{dx} = 0$ ist, $\frac{dy}{dx} = 0$, also $x = 0$ und hiernach

$$y = 3 \text{ oder } y = -4.$$

Für $x = 0, y = 3$ folgt $z = 4$,

für $x = 0, y = -4$ folgt $z = -3$.

Wie nun leicht zu zeigen, ist $z = 4$ ein Maximum, und $z = -3$ ein Minimum.

3) Ist $f(x, y, z)$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn x, y, z den zwei Gleichungen

$$\varphi(x, y, z) = 0;\ \psi(x, y, z) = 0$$

genügen sollen, und man setzt $f(x, y, z) = t$, so erhält man zwischen den vier Variabeln x, y, z, t die Gleichungen:

$$f(x, y, z) - t = 0;\ \varphi(x, y, z) = 0;\ \psi(x, y, z) = 0$$

und kann nun analog wie vorhin verfahren.

Beispiel.

Den kürzesten Abstand eines Punktes von einer Geraden zu fin[den].

Aufl. Wählt man den Punkt als Coordinatenursprung und sind

$$x = az + \alpha;\ y = bz + \beta \quad \ldots\ldots \quad m)$$

die Gleichungen der Geraden, (x, y, z) der Punkt auf dersel[b]en, dessen Entfernung vom Ursprung ein Minimum ist, so soll nach der or-

gelegten Aufgabe $x^2 + y^2 + z^2$ ein Minimum werden, wenn gleichzeitig die Beziehungen (m) bestehen.

Setzt man nun $x^2 + y^2 + z^2 = t$, so hat man zwischen x, y, z, t die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 - t = 0\,;\; x - az - \alpha = 0$$
$$y - bz - \beta = 0$$

und da x und y Functionen von z sind und $\frac{dt}{dz} = 0$ sein muss, so folgt hieraus:

$$x\frac{dx}{dz} + y\frac{dy}{dz} + z = 0\,;\; \frac{dx}{dz} = a\,;\; \frac{dy}{dz} = b$$

also
$$ax + by + z = 0$$
oder wenn man aus (m) die Werthe von x und y einführt,

$$z = -\frac{a\alpha + b\beta}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Somit wird

$$x = \frac{\alpha(b^2 + 1) - ab\beta}{a^2 + b^2 + 1}\,;\; y = \frac{\beta(a^2 + 1) - ab\alpha}{a^2 + b^2 + 1}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + (b\alpha - a\beta)^2}{a^2 + b^2 + 1}$$

und hiernach der Abstand

$$= \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + (b\alpha - a\beta)^2}{a^2 + b^2 + 1}}.$$

§. 64. Functionen mehrer unabhängig Veränderlichen.

1) Man sagt die Function $f(x, y, z, t, \ldots)$ der unabhängig Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ sei ein Maximum oder Minimum, je nachdem die Differenz

$$f(x + h, y + k, z + l, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

negativ oder positiv ausfällt, wenn $h, k, l, \ldots$ zwischen den Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegen, wo ε beliebig klein, sonst aber willkürliche Grössen sind. Da zwischen diesen Grenzen auch die Null liegt, so können beliebig viele der $h, k, l, \ldots$ verschwinden und die Bedingung muss noch erfüllt bleiben.

Setzen wir $k = l = \ldots = 0$, so muss

$$f(x + h, y, z, \ldots) - f(x, y, z, \ldots)$$

st[illegible]selbe Zeichen haben, wenn man h zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, so[illegible]er beliebig annimmt. Nach der Definition des Maximums für F[illegible]nen einer unabhängig Variabeln (denn hier spielen $y, z, \ldots$ di[illegible] von Constanten) muss daher $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, oder discontinuirlich se[illegible]enso finden wir $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, oder unstetig, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, oder

unstetig u. s. w. Dieses sind nothwendige, aber nicht genügende Bedingungen, wenn der Function ein ausgezeichneter Werth entsprechen soll.

Schliessen wir die Fälle, wo die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$ unstetig werden, aus, so reduciren sich diese Bedingungen auf die Beziehungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \,;\; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \,;\; \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \,; \ldots$$

2) Um den fraglichen Gegenstand unabhängig von der Theorie der ausgezeichneten Werthe einer unabhängig Veränderlichen zu behandeln, wollen wir zunächst eine Function von nur zwei Veränderlichen x, y betrachten.

Nach der Taylor'schen Reihe (§. 52) ist

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + R_n,$$

wo symbolisch
$$u_n = \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}\right)^n$$

Nach Früherem können wir nun h und k so klein annehmen, dass, wenn man die Reihe bei irgend einem Gliede u_n, welches nicht verschwindet, abbricht, dieses Glied grösser ist als der Absolutwerth des Restgliedes. Brechen wir daher bei u_1 ab, so ist $[u_1] > [R_1]$ und das Glied

$$u_1 = h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$$

bestimmt das Zeichen der Differenz $f(x+h, y+k) - f(x, y)$.

Soll daher der Function $f(x, y)$ für $x = a, y = b$ ein ausgezeichneter Werth entsprechen, also $f(x,y)$ für $x = a, y = b$ entweder grösser oder kleiner als die Nachbarwerthe ausfallen, so muss gleichzeitig $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, also $h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}$ für jeden Werth von h und k verschwinden*). Wir erhalten daher

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = u_2 + R_2,$$

wo
$$u_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} \left(h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 .$$

und können wieder h und k so klein annehmen, dass $[u_2] > [R_2]$, durch das Zeichen der Differenz

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

durch das Zeichen von u_2 bestimmt ist.

*) Im anderen Falle könnte man durch gehörige Annahme von h und k di Ausdruck sowohl positiv als auch negativ machen und somit von einem ausgezeichne Werthe keine Rede sein.

Bezeichnen wir nun zur Abkürzung die Werthe, welche die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ für $x = a$, $y = b$ annehmen, bezüglich durch A, B, C, so hängt das Zeichen der genannten Differenz, welche die Natur des ausgezeichneten Werthes bestimmt, von dem Zeichen des Ausdruckes $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ ab.

Soll derselbe nun einerlei Zeichen für alle Werthe von h und k beibehalten, so muss dieses auch mit dem Ausdrucke

$$A\,(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) = (Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)\,k^2$$

der Fall sein. Dieses ist aber nur möglich, wenn $AC - B^2$ positiv oder Null ist. Dann ist aber $A\,(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2)$ stets positiv und es hat somit $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ einerlei Zeichen mit A. Wenn aber $AC - B^2$ positiv sein soll, müssen A und C dasselbe Zeichen haben. Hieraus geht also hervor, dass $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ mit A und C einerlei Zeichen haben muss.

Wir sind hiernach zu folgendem Schlusse gelangt:

Erfüllen die aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

entwickelten Werthe von x und y, welche x_0 und y_0 heissen mögen, die Bedingung

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$$

so wird die Function dafür ein Maximum oder Minimum, jenachdem die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \text{ und } \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}$$

gleichzeitig negativ oder positiv ausfallen.

3) Werden für x_0 und y_0 entweder die Differentialquotienten A, B, C gleichzeitig Null, oder wird $AC - B^2 = 0$, so wird im ersten Falle $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ für alle Werthe von h und k und im zweiten Falle für $\frac{h}{k} = -\frac{B}{A}$ Null*).

in diesem Falle über die ausgezeichneten Werthe zu entscheiden [illegible]tze man

$$f(x + h, y + k) - f(x, y) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 + R_3,$$

*) [D]es ergibt sich unmittelbar aus
$A\,(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2) = (Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)\,k^2.$

so kann man wieder, wenn die Differentialquotienten der dritten Ordnung nicht sämmtlich Null werden für x_0 und y_0, h und k so klein wählen, dass das Zeichen der linken Seite mit dem Zeichen von

$$u_3 = h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3hk^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + k^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

übereinstimmt.

Werden nun A, B, C für x_0, y_0 Null, so ändert dieser Ausdruck sein Zeichen, wenn man $-h$, $-k$ statt h und k setzt und es kann somit kein ausgezeichneter Werth stattfinden. Soll daher der Function ein solcher Werth zukommen, so müssen die Differentialquotienten der dritten Ordnung identisch Null sein.

Man erhält alsdann

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{1}{4!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^4 + R_4,$$

wo $\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^4$ sein Zeichen mit h und k nicht ändern darf, wenn ein Maximum oder Minimum vorhanden sein soll, was der Fall ist, wenn die symbolische Gleichung $\left(z\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^4 = 0$ lauter imaginäre Wurzeln hat.

Ist nur $AC - B^2 = 0$ und setzt man $h = -Bt, k = At$, so muss

$$-B^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3B^2A \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} - 3BA^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + A^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Null werden, wenn ein Maximum oder Minimum vorhanden sein soll, und der symbolische Ausdruck $\left(-\frac{B}{A}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^4$ bestimmt dann die Natur des ausgezeichneten Werthes. Je nachdem nämlich die Werthe von h und k, welche $\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ und $\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3$ zu Null machen, den Ausdruck $\left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)^4$ oder $\left(-\frac{B}{A}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)^4$ negativ / positiv machen, erhält man für dieselben ein Maximum. / Minimum.

In den meisten Fällen entscheidet man jedoch diese Frage rascher aus der Natur der vorgelegten Aufgabe.

4) In analoger Weise ist die Untersuchung für Functione[n v]on drei oder mehr Veränderlichen zu führen. Zur Bestimmung d[er a]usgezeichneten Werthe erhält man aus der Taylor'schen Reihe die [no]thwendigen, aber nicht genügenden Bedingungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \ldots .$$

wenn man diejenigen ausgezeichneten Werthe, für welche die partiellen Differentialquotienten unstetig werden, ausser Acht lässt. Die Natur des ausgezeichneten Werthes wird auch hier aus der Natur der vorgelegten Aufgabe leichter gefunden, als aus den Regeln, welche sich dafür ohne Schwierigkeit entwickeln liessen.

Beispiele.

1) Man soll die Function

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 20$$

zu einem Maximum oder Minimum machen.

Aufl. Da $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6$, so wird $x = 2$, $y = 3$. Dass dafür die Function ein Minimum ist, erkennt man leicht aus der Form

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + 7$$

auf welche sich dieselbe bringen lässt.

2) Den Ausdruck

$$2y^2 + 6xy + 5x^2 - 14y - 22x + 30$$

zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

Aufl. Aus
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6y + 10x - 22 = 0$$
und
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y + 6x - 14 = 0$$
ergibt sich:
$$x = 1, y = 2.$$

Bringt man die gegebene Function auf die Form

$$(2x + y - 4)^2 + (y + x - 3)^2 + 5,$$

so erkennt man hieraus, dass dieselbe für die gefundenen Werthe zu einem Minimum wird.

3) Man soll in dem Ausdrucke

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 + \dots$$

x und y so bestimmen, dass derselbe ein Minimum wird.

Aufl. Bildet man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma 2(ax + by + c)\, a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \Sigma 2(ax + by + c)\, b$$

so lassen sich aus den linearen Gleichungen

$$x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + \Sigma ac = 0$$
$$x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + \Sigma bc = 0$$

die Werthe von x und y leicht bestimmen.

Soll der Ausdruck

$$(a_1x + b_1y + c_1z - d_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z - d_2)^2 + \dots$$

zu einem Minimum gemacht werden, so findet man analog wie vorhin aus den Gleichungen

$$x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + z\Sigma ac - \Sigma ad = 0$$
$$x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + z\Sigma bc - \Sigma bd = 0$$
$$x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma c^2 - \Sigma cd = 0$$

die entsprechenden Werthe von x, y und z.

5) Die Werthe von x und y zu bestimmen, für welche das Product $xy\,(a - x - y)$ ein Maximum wird.

Aufl. Aus
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\,(a - 2x - y) = 0$$
und
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,(a - 2y - x) = 0$$
ergeben sich $x = 0$, $y = 0$ und $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{a}{3}$. Die erste Auflösung ist jedoch im vorliegenden Falle unbrauchbar. Da ferner
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y = -\frac{2a}{3}\,;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x = -\frac{2a}{3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = a - 2x - 2y = -\frac{a}{3}$$
also
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 > 0$$
und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ beide negativ sind, so ist das Product $\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{3} = \frac{a^3}{27}$ ein Maximum.

6) Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange $2s$ dasjenige anzugeben, welches den grössten Inhalt hat.

Aufl. Sind x, y zwei der drei Seiten, so ist der Inhalt
$$u = \sqrt{s\,(s - x)\,(s - y)\,(x + y - s)}.$$
und es muss somit $(s - x)\,(s - y)\,(x + y - s)$ ein Maximum werden.

Bezeichnen wir dieses Product durch v, so erhält man
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -(s - y)\,(x + y - s) + (s - y)\,(s - x)$$
$$= (s - y)\,(2s - 2x - y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -(s - x)\,(x + y - s) + (s - x)\,(s - y)$$
$$= (s - x)\,(2s - x - 2y)$$
und aus
$$(s - y)\,(2s - 2x - y) = 0$$
und
$$(s - x)\,(2s - x - 2y) = 0$$
folgt, da nicht $s = x = y$ sein kann,
$$x = y = 2s - (x + y) = \frac{2}{3}\,s;$$
das Dreieck ist somit gleichseitig.

Um nun zu zeigen, dass dafür der Inhalt u ein Maximum wird, bilde man
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -2\,(s - y)\,;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = 2x + 2y - 3s;$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2\,(s - x)$$
so folgt, wenn man die betreffenden Werthe einführt:
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = A = -\frac{2s}{3}\,;\ \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = B = -\frac{s}{3}\,;\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{2s}{3}.$$

Es ist daher $AC - B^2 = \frac{s^2}{3}$, also positiv und weil A und C negativ sind, so ist also der Inhalt des Dreieckes für die gefundenen Werthe von x und y ein Maximum.

7) Man soll

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 10$$

zu einem Minimum machen.

Aufl. Man findet $x = 2$, $y = 1$, Minimum $= 0$.

8) $5x^2 + 10y^2 + 14xy - 24x - 34y + 30$ zu einem Minimum zu machen.

Aufl. Es wird $x = y = 1$; Minimum $= 1$.

9) Den Ausdruck

$$tg^2x - 2tgx + sin^2y - sin\,y + 3\tfrac{1}{4}$$

zu einem Minimum zu machen.

Aufl. $x = 45^0$, $y = 30^0$, Minimum $= 2$.

10) Man soll den Ausdruck

$$6 + 2\cos(x + y) - (\cos x + \cos y)\, 2\sqrt{2}$$

zu einem Minimum machen.

Aufl. $x = y = 45^0$, Minimum $= 2$.

§. 65. Relative Maxima und Minima.

Sind die Werthe, für welche eine Function ausgezeichnete Werthe annehmen soll, noch gewissen Bedingungen unterworfen, welche durch Gleichungen zwischen den Veränderlichen ausgedrückt sind, so führt dieses auf die Aufgabe der Bestimmung der relativen Maxima oder Minima. Es leuchtet von selbst ein, dass die Anzahl der Gleichungen kleiner sein muss, als die der Veränderlichen der betreffenden Function, weil andernfalls denselben bestimmte Werthe entsprechen würden.

Ist z. B. $f(x, y, z)$ die gegebene Function und $\varphi = 0$ eine Bedingungsgleichung zwischen x, y und z, so kann man hieraus den Werth von z bestimmen und diesen in $f(x, y, z)$ einführen, um schliesslich eine Function zu erhalten, welche nur die beiden Veränderlichen x und y enthält und nun nach obigen Regeln weiter verfahren. Analog könnte man aus zwei gegebenen Bedingungsgleichungen

$$\varphi = 0,\ \psi = 0$$

die Werthe von y und z ermitteln und in $f(x, y, z)$ substituiren, um so die Aufgabe auf den einfachsten Fall einer Function von nur einer V[illegible]erlichen x zurückzuführen.

[illegible] einfach dieser Weg zu sein scheint, so ist er doch wegen der o[illegible]wierig zu bewerkstelligenden Substitution in den meisten Fällen n[illegible]ohl einzuschlagen.

[illegible]r wollen darum sogleich zur Ermittelung eines zweckmässigeren V[illegible]rens übergehen und zu diesem Ende folgende Aufgabe lösen:

Man soll $f(x, y, z)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, wenn x, y, z den Bedingungen

$$\varphi(x, y, z) = 0, \; \psi(x, y, z) = 0$$

zu genügen haben.

Da vermöge dieser Gleichungen y und z Functionen von x sind, so gilt als Bedingung für ein Maximum oder Minimum der Function f die Beziehung $\frac{df}{dx} = 0$ oder

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

In diese Gleichung sind nun die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ einzuführen. Dieselben ergeben sich durch Differentiation der Gleichungen $\varphi = 0$, $\psi = 0$ nach x. Man erhält alsdann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{dz}{dx} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Um nun aus (1) die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ zu eliminiren, multiplicire man (1), (2), (3) der Reihe nach mit $1, \lambda, \mu$ und addire, so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{dz}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0.$$

Um nun die verlangte Gleichung zu erhalten, welche $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ nicht enthält, bestimme man die seither noch nicht näher definirten λ und μ vermöge der beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$

Man erhält daher ganz dieselben Gleichungen, wie wenn man die Aufgabe gestellt hätte: Den Ausdruck $f + \lambda\varphi + \mu\psi$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn λ und μ Constante und x, y, z unabhängige Variabeln bedeuten.

Wir erhalten hiernach folgende in analoger Weise allgemein nachzuweisende Regel:

Ist f eine Function von n Veränderlichen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ und soll dieselbe ein Maximum oder Minimum werden, wenn zwischen den Veränderlichen noch die m Bedingungsgleichungen $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots f_m = 0$ bestehen, so multiplicire man diese der Reihe nach mit den constanten Factoren $k_1, k_2, \ldots k_m$, addire die so erhaltenen Gleichungen zu f und setze nun die partiellen Differentialquotienten des Ausdruckes

$$f + k_1 f_1 + k_2 f_2 + \ldots + k_m f_m$$

nach $x_1, x_2, x_3, \ldots x_m$ gleich Null, so erhält man, unter Zuziehung der m Bedingungsgleichungen, die zur Ermittelung der Unbekannten erforderliche Anzahl von Gleichungen.

Beispiele.

1) Unter allen Dreiecken, welche einen gleichen Winkel α und denselben Inhalt I haben, dasjenige anzugeben, welches den kleinsten Umfang u hat.

Aufl. Sind x, y, z die drei Seiten, und liegt z dem $\measuredangle\, \alpha$ gegenüber, so soll $u = x + y + z$ ein Minimum werden, wenn gleichzeitig die Bedingungen bestehen:
$2I = xy \sin\alpha$ und $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha$.

Setzt man nun nach obiger Regel
$u = x + y + z + k_1(xy\sin\alpha - 2I) + k_2(x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha - z^2)$
und bestimmt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + k_1 y \sin\alpha + 2k_2 x - 2k_2 y\cos\alpha = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1 + k_1 x \sin\alpha + 2k_2 y - 2k_2 x\cos\alpha = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 1 - 2k_2 z = 0$$

so folgt:
$$k_2 = \frac{1}{2z}.$$

Eliminirt man diesen Werth und darnach k_1, so erhält man aus der Gleichung

$$x - y + \frac{x^2 - y^2}{z} = 0$$

oder
$$(x - y)\left(\frac{z + x + y}{z}\right) = 0,$$

da [illegible] $+ z$ nicht Null sein kann:

$$x = y = \sqrt{\frac{2I}{\sin\alpha}}.$$

Das Dreieck ist somit ein **gleichschenkliges**, an dessen Spitze der gegebene Winkel liegt.

2) Aus vier Seiten a, b, c, d das Viereck vom grössten Inhalte zu bestimmen.

Aufl. Bezeichnet φ den Winkel, welchen a und b einschliessen, ψ den von c und d eingeschlossenen, so soll

$$\frac{ab}{2}\sin\varphi + \frac{cd}{2}\sin\psi \text{ oder } ab\sin\varphi + cd\sin\psi$$

zu einem Maximum gemacht werden, wo φ und ψ der Gleichung

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi = c^2 + d^2 - 2cd\cos\psi$$

genügen müssen.

Setzt man $\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2} = p$, so verwandelt sich obige Bedingung in

$$ab\cos\varphi - cd\cos\psi - p = 0.$$

Wird daher nach §. 65

$$u = ab\sin\varphi + cd\sin\psi + k\,(ab\cos\varphi - cd\cos\psi - p)$$

gesetzt, so folgt aus

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi} = ab\cos\varphi - kab\sin\varphi = 0$$

und
$$\frac{\partial u}{\partial\psi} = cd\cos\psi + kcd\sin\psi = 0$$

unmittelbar $\cos\varphi = k\sin\varphi$, $\cos\psi = -k\sin\psi$

also $\cos\varphi = -\cos\psi$ und $\varphi + \psi = 180^0$,

d. h. das Viereck muss ein **Kreisviereck** sein.

3) In einen Kreis vom Radius r ein $n$eck zu beschreiben, dessen Umfang ein Maximum ist.

Aufl. Bezeichnen α, β, γ, ... der Reihe nach die den Seiten entsprechenden Centriwinkel, so soll

$$2r\sin\frac{\alpha}{2} + 2r\sin\frac{\beta}{2} + 2r\sin\frac{\gamma}{2} + \ldots$$

oder
$$\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} + \ldots$$

ein Maximum werden. Wegen der Nebenbedingung

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots - 2\pi = 0$$

hat man daher nach §. 65 in der Gleichung

$$u = \sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \ldots + k\,(\alpha + \beta + \ldots - 2\pi)$$

die Werthe von α, β, γ, ... so zu bestimmen, dass u ein Maximum wird.

Aus
$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + k = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial\beta} = \tfrac{1}{2}\cos\frac{\beta}{2} + k = 0$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

folgt unmittelbar, dass

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2} = \ldots$$

also $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$ d. h. dass das Vieleck ein regelmässiges sein muss.

4) In einen Kreis vom Radius r ein $n$eck so einzuzeichnen, dass dessen Inhalt ein Maximum wird.

Aufl. Behalten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die vorige Bedeutung, so müssen, da der Inhalt $= \frac{r^2}{2} \sin\alpha + \frac{r^2}{2} \sin\beta + \ldots$ ist, in der Gleichung

$$u = \sin\alpha + \sin\beta + \ldots + k(\alpha + \beta + \ldots - 2\pi)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ so bestimmt werden, dass dafür u ein Maximum wird.

Man findet aber aus

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \cos\alpha + k = 0$$

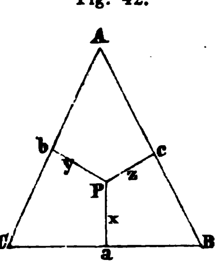
$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \cos\beta + k = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

dass $\alpha = \beta = \gamma = \ldots$, das $n$eck also ein reguläres sein muss.

5) Innerhalb des Dreieckes ABC (Fig. 42), dessen Seiten a, b und c sind, einen Punkt P so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der drei von ihm aus auf die Seiten gefällten Perpendikel x, y, z ein Minimum werde. Wie gross sind diese Perpendikel?

Fig. 42.



Aufl. Da die Lage des Punktes zugleich an die Bedingung

$$ax + by + cz = 2\Delta$$

geknüpft ist, wo Δ den Inhalt des Dreieckes ABC bezeichnet, so hat man in der Gleichung

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + k(ax + by + cz - 2\Delta)$$

x, y, z so zu bestimmen, dass u ein Minimum wird.

Aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + ak = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + bk = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z + ck = 0$$

und

$$ax + by + cz - 2\Delta = 0$$

fir... man leicht:

$$= \frac{2a\Delta}{a^2 + b^2 + c^2};\ y = \frac{2b\Delta}{a^2 + b^2 + c^2};\ z = \frac{2c\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

...n der vorhergehenden Aufgabe den Punkt P so zu bestimmen, dass di... ...me der Rechtecke xy, xz, yz ein Minimum wird.

...fl. Man hat x, y, z so zu bestimmen, dass in der Gleichung

$$u = xy + xz + yz + k(ax + by + cz - 2\Delta)$$

u ...nimum wird.

Aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z + ak = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z + bk = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x + y + ck = 0$$

und $$ax + by + cz - 2\Delta = 0$$

ergeben sich leicht die Werthe von x, y und z.

7) In der Aufg. 5 den Punkt P so zu bestimmen, dass das Product der drei Perpendikel ein Maximum wird.

Aufl. Bildet man aus der Gleichung

$$u = xyz + k(ax + by + cz - 2\Delta)$$

die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz + ak = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz + bk = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy + ck = 0$$

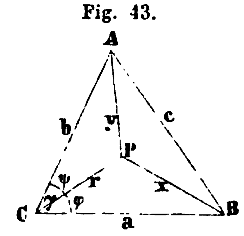
und berücksichtiget $$ax + by + cz - 2\Delta = 0$$

so findet man hieraus:

$$x = \frac{2\Delta}{3a}\,;\, y = \frac{2\Delta}{3b}\,,\, z = \frac{2\Delta}{3c}.$$

8) In dem Dreiecke ABC (Fig. 43) einen Punkt P so zu bestimmen, dass derselbe von der Ecke C einen Abstand $= r$ hat und die Summe der Quadrate der Entfernungen von den beiden anderen Eckpunkten ein Minimum ist.

Fig. 43.



Aufl. Da

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\varphi$$

$$y^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\psi$$

so wird

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 + 2r^2 - 2r(a\cos\varphi + b\cos\psi)$$

und es sind daher in der Gleichung

$$u = a\cos\varphi + b\cos\psi + k(\varphi + \psi - \gamma)$$

φ und ψ so zu bestimmen, dass u ein Maximum wird.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -a\sin\varphi + k = 0\,;\, \frac{\partial u}{\partial \psi} = -b\sin\psi + k = 0$$

$$\varphi + \psi - \gamma = 0$$

findet man $$a\sin\varphi = b\sin\psi$$

d. h. der Punkt P muss in der von C aus nach dem Halbirungspunk ler Seite AB gezogenen Strecke liegen.

9) Den Punkt P so zu bestimmen, dass die Summe der dre. nt-fernungen von den Eckpunkten des Dreieckes ein Minimum wird.

Fig. 44.

Aufl. Da (Fig. 44)

$$x^2 = b^2 + z^2 - 2bz\cos\varphi$$
$$y^2 = a^2 + z^2 - 2az\cos\psi$$

und

$$\varphi + \psi = \gamma$$

so folgt aus der Gleichung

$$u = \sqrt{b^2 + z^2 - 2bz\cos\varphi} + \sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\psi} + z + k(\varphi + \psi - \gamma),$$

dass

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z - b\cos\varphi}{x} + \frac{z - a\cos\psi}{y} + 1 = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{bz\sin\varphi}{x} + k = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{az\sin\psi}{y} + k = 0.$$

Führt man aus dieser den Werth von $k = -\frac{az\sin\psi}{y}$ in die zweite Gleichung ein, so folgt $\frac{b\sin\varphi}{x} = \frac{a\sin\psi}{y}$ oder, wenn man $AD = m$ und $BE = n \perp CP$ zieht,

$$\frac{m}{x} = \frac{n}{y}$$

folglich ist

$$\measuredangle APE = \measuredangle BPE$$

Aus der ersten Gleichung folgt ferner

$$\frac{PD}{x} + \frac{PE}{y} - 1 = 0$$

oder

$$\cos APE + \cos BPE = 1$$

oder nach Obigem

$$2\cos APE = 2\cos BPE = 1$$

oder

$$\cos APE = \cos BPE = \tfrac{1}{2},$$

d. h.

$$\measuredangle APE = \measuredangle BPE = 60^0;$$

also ist

$$\measuredangle APB = 120^0$$

und darum $\measuredangle APC = \measuredangle BPC = 180^0 - 60^0 = 120^0$

d. h. der Punkt P hat eine solche Lage, dass die drei Strecken x, y, z gleiche Winkel unter einander bilden.

D.. der Punkt P beliebig ferne angenommen werden kann, so erhält m... lie bezeichnete Lage offenbar ein Minimum der Entfernungsumme x ... z. Der Punkt P ist leicht nach E. G. §. 113. B. Aufg. 5a. zu co...n.

..rk. Hat das Dreieck einen Winkel $\geq 120^0$, so ist der Scheitel dieses W... ... gesuchte Punkt, wie sich leicht zeigen lässt.

Ein rechteckiges Parallelepiped von gegebenem Inhalte K zu best... dessen Oberfläche ein Minimum ist.

Aufl. Die drei an einer Ecke zusammenstossenden Kanten seien x, y, z, so sollen in der Gleichung

$$u = 2\,(xy + xz + yz) + 2k\,(xyz - K)$$

oder auch in $\frac{1}{2}u = xy + xz + yz + k\,(xyz - K)$

x, y und z so bestimmt werden, dass u ein Minimum wird.

Aus den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z + kyz = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + z + kxz = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x + y + kxy = 0$$

$$xyz - K = 0$$

findet man $x = y = z$ d. h. der Körper muss ein Würfel sein.

11) Einen oben offenen Wasserbehälter von der Form eines rechteckigen Parallelepipeds so zu bestimmen, dass derselbe ein gegebenes Volumen Wasser K fasst und die benetzte Fläche ein Minimum wird.

Aufl. Wenn x, y, z die drei angrenzenden inneren Kanten bezeichnen, so soll $u = xy + 2xz + 2yz$ ein Minimum werden und zugleich die Gleichung bestehen

$$xyz - K = 0.$$

Aus $u = xy + 2xz + 2yz + k\,(xyz - K)$

folgt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2z + kyz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + 2z + kxz = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2x + 2y + kxy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Ausserdem hat man: $\quad xyz - K = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$

Durch Subtraction von (1) und (2) erhält man

$$x - y + kz\,(x - y) = 0$$

oder

$$(x - y)\,(1 + kz) = 0$$

Da aber aus $1 + kz = 0$ oder $k = -\frac{1}{z}$ und (1) folgen würde:

$$y + 2z - y = 0 \text{ oder } z = 0,$$

was unmöglich ist, so muss sein:

$$x = y.$$

Mittelst der Gleichung (3) ergibt sich nun

$$4x + kx^2 = 0\,,\; k = -\frac{4}{x}$$

also nach (2)

$$x + 2z - 4z = 0\,,\; z = \frac{x}{2}$$

und daher nach (4)

$$x = y = \sqrt[3]{2K}$$

also

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2K}$$

Der innere Raum des Behälters bildet somit die Hälfte eines Wü els, dessen untere Fläche ein Quadrat vom Inhalte $\sqrt[3]{4K^2}$ ist.

12) Den kürzesten Abstand eines Punktes α, β von einer Curve $y = f(x)$ zu bestimmen.

Aufl. Soll der Ausdruck

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

ein Minimum werden und gleichzeitig die Relation

$$y = f(x)$$

bestehen, so erhält man aus

$$u = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2k\,[y - f(x)]:$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = x - \alpha - kf'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = y - \beta + k = 0$$

Durch Elimination ergibt sich daraus

$$y - \beta = -\frac{1}{f'x}(x - \alpha),$$

woraus hervorgeht, dass die in Frage stehende Strecke senkrecht auf der Curve steht (vergl. §. 68).

13) Den kürzesten oder grössten Abstand zweier in einerlei Ebene liegenden Curven zu bestimmen.

Aufl. Bezeichnen x, y die Coordinaten des Endpunktes der Strecke in der einen Curve, ξ, η die des anderen Endpunktes in der zweiten Curve, so sind y und η Functionen bezüglich von x und ξ und es soll also

$$u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

ein Minimum oder ein Maximum werden, wenn gleichzeitig die Bedingungen bestehen

$$y = f(x)\,;\ \eta = \varphi(\xi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Man erhält alsdann aus

$$u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + 2k_1\,[y - f(x)] + 2k_2\,[\eta - \varphi(\xi)]$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} = x - \xi - k_1 f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = y - \eta + k_1 = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi} = -x + \xi - k_2\varphi'(\xi) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = -y + \eta + k_2 = 0$$

iese 4 Gleichungen in Verbindung mit (a) genügen zur Bestimmung Unbekannten.

us den zwei ersten Gleichungen folgt durch Elimination von k_1:

$$\eta - y = -\frac{1}{f'(x)}(\xi - x) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

laufenden Coordinaten ξ und η.

Aus der dritten und vierten ebenso durch Elimination von k_2:

$$y - \eta = -\frac{1}{\varphi'(\xi)}(x - \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo x und y die laufenden Coordinaten bedeuten mögen.

Die Gleichung (1) besagt, dass der Punkt (ξ, η) in der Normale des Punktes (x, y) der Curve $y = f(x)$ liegt, ebenso (2), dass (x, y) ein Punkt der Normale des Punktes (ξ, η) der Curve $\eta = \varphi(\xi)$ ist. (vergl. §. 68.)

Die Gerade, welche die zwei Punkte (x, y), (ξ, η) verbindet, ist daher eine gemeinschaftliche Normale beider Curven.

Achter Abschnitt.

Theorie der ebenen Curven.

A. Für rechtwinklige Coordinaten.

§. 66. Lauf der Curven.

Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer Curve und man lässt die unabhängig Veränderliche um Δx wachsen, also x in x_1 übergehen, so wird sich auch y um Δy ändern. Man hat daher

$$\Delta y = f(x_1) - f(x).$$

Das Richtungszeichen von Δy hängt somit lediglich von dem der Differenz $f(x_1) - f(x)$ ab und je nachdem diese positiv oder negativ ist, hat die Aenderung von x eine Zu- oder Abnahme von y zur Folge. Da nach der Voraussetzung x im Zunehmen begriffen, also $x_1 - x = \Delta x$ positiv ist, so wird y auch zu- oder abnehmen, je nachdem der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv oder negativ ausfällt. Nach §. 7. 10. kann man aber Δx so klein annehmen, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ und $\frac{dy}{dx}$ einerlei Vorzeichen haben. Wir schliessen hieraus in Verbindung mit Obigem auf folgenden Satz:

Die Ordinaten einer Curve werden mit wachsenden Abscissen grösser oder kleiner, je nachdem der erste Differentialquotient positiv oder negativ ausfällt.

merk. Ebenso ist allgemein eine Function im Wachsen oder Abnehmen be-, wenn der erste Differentialquotient für den betreffenden Werth von x positiv egativ wird.

st man demnach die Abscissen von $x = a$ bis $x = b$ stetig erthe durchlaufen, so können die entsprechenden Ordinaten vom Zunehmen in's Abnehmen oder umgekehrt übergehen, wenn er erste Differentialquotient innerhalb des bezeichneten Intervalles

sein Zeichen ändert oder unstetig wird Die Culminationspunkte finden daher an denjenigen Stellen statt, wo $f'(x)$ sein Zeichen ändert, also $f'(x) = 0$ oder unstetig wird.

§. 67. **Convexität und Concavität. Wendepunkte einer Curve.**

Wir wollen nun untersuchen, in welcher Weise das Steigen oder Fallen einer Curve vor sich geht.

Fig. 45.

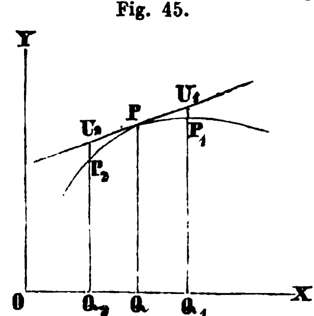


Fig. 46.

Man sagt eine Curve sei concav / convex gegen die Abscissenachse in dem Punkte P (Fig. 45 und 46), wenn dieselbe in der Nachbarschaft von P ganz innerhalb des spitzen / stumpfen Winkels liegt, welchen die Tangente des Punktes P mit der Abscissenachse bildet.

Um dieses analytisch auszudrücken, sei x die Abscisse von P, $x + h$ diejenige eines benachbarten Punktes P_1, so erhält man für die Ordinate dieses Punktes nach dem Taylor'schen Satze, wenn sämmtliche Bedingungen der Anwendbarkeit desselben erfüllt sind:

$$f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h).$$

Bemerkt man nun, dass in allen Fällen

$$f(x) + hf'(x) = U_1 Q_1$$

so folgt für die Ordinate von P_1:

$$U_1 Q_1 + \frac{h^2}{1\,.\,2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h).$$

Ist nun, um sogleich den allgemeinsten Fall zu behandeln, für den Punkt P:

$$f''(x) = f'''(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0,$$

$f^{(n)}(x)$ aber nicht Null, wo $n \geq 2$, so ergibt sich für die Ordinat

$$P_1 Q_1 = U_1 Q_1 + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h),$$

wo man h so klein wählen kann, dass das Zeichen von

$$\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta h)$$

mit dem Zeichen von $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$ übereinstimmt. Nun sind aber zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich n gerade oder ungerade ist.

a) Für ein gerades n wird, h mag positiv oder negativ sein, die Ordinate von P_1 $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ als $U_1 Q_1$, je nachdem $f^{(n)}(x)$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ist.

Wir schliessen hieraus:

Die Curve kehrt ihre $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{convexe}}{\text{concave}}$ Seite nach unten, je nachdem $f^{(n)}(x)$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ wird.

Dieser Satz wurde zwar aus einer Figur hergeleitet, in welcher y positiv auftritt, gilt aber nichts desto weniger ganz allgemein. Denn verschieben wir die Abscissenachse parallel mit sich selbst, um den Abstand a nach unten, bis y positiv wird, so hat man $f(x) + a$ statt $f(x)$ zu setzen, während die Werthe der Differentialquotienten dadurch keinerlei Aenderung erleiden.

b) Ist n ungerade, so ändert $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$ mit h sein Zeichen. Die Ordinate des benachbarten Punktes von P ist daher auf der einen Seite von P grösser, auf der anderen kleiner als $U_1 Q_1$ und die Curve schneidet somit ihre Tangente in P. Man nennt in diesem Falle den Punkt P einen Wendepunkt.

Fig. 47.

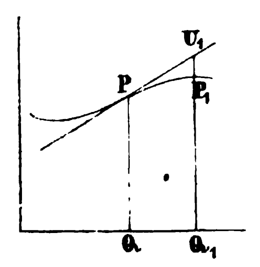
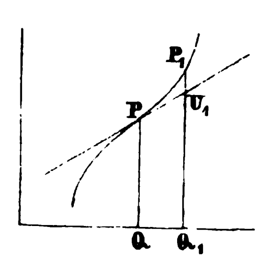


Fig. 48.



nachdem $f^{(n)}(x)$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ist, kehrt die Curve $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{rechts}}{\text{links}}$ von P .cave, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{links}}{\text{rechts}}$ aber die convexe Seite nach unten (Fig. 47 u. 48.)

$f''(x)$ nur bei einer Geraden für jeden Punkt gleich Null ist, ıt man folgenden Satz:

Eine Curve ist $\begin{matrix}\text{convex}\\ \text{concav}\end{matrix}$ nach unten, je nachdem $f''(x)$ einen $\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}$ Werth hat.*)

An denjenigen Punkten, wo die Curve den Sinn ihrer Krümmung ändert, müssen $f''(x+\delta)$ und $f''(x-\varepsilon)$, wo δ und ε unendlich klein, verschiedene Vorzeichen haben; geschieht dieses stetig, so wird $f''(x)$ an dieser Stelle Null, im anderen Falle aber unstetig.

Für einen Wendepunkt ist daher $f''(x)$ entweder Null oder unstetig. Aber nicht jeder Punkt, welcher einer dieser Bedingungen genügt, ist ein Wendepunkt.

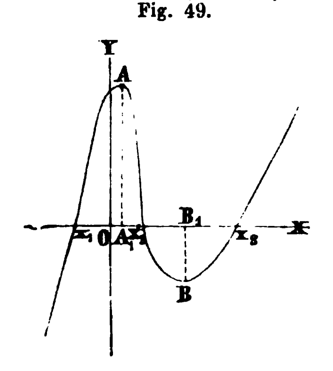
Um hiernach also den Lauf einer durch ihre Gleichung $y=f(x)$ gegebenen Curve zu untersuchen, bestimme man die Intervalle, innerhalb welcher der Reihe nach y, y', y'' dasselbe Zeichen beibehalten und die Punkte, wo diese Grössen ihre Zeichen ändern oder unstetig werden.**)

Die erste Untersuchung liefert die Schnitt- und etwaigen Berührungspunkte der Curve mit der XAchse, sowie die Lage der Curve in Bezug auf diese Achse, die zweite lässt auf das Steigen und Fallen der Curve und deren Culminationspunkte schliessen und die dritte gibt uns über die Krümmungsverhältnisse und etwaigen Wendepunkte Aufschluss.

Beispiele.

1) Es sei $y = x^3 - 9x^2 + 2x + 48$ die Gleichung einer Curve. Setzt man $y = 0$, so findet man für die Abscissen der Durchschnittspunkte x_1, x_2, x_3 (Fig. 49) der Curve mit der Abscissenachse die Werthe $Ox_1 = -2$; $Ox_2 = 3$; $Ox_3 = 8$. Da ferner die Curve von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ stetig verläuft, so findet man leicht durch Einführung von Zwischenwerthen, dass deren Ordinate von $x = -\infty$ bis $x = -2$ negativ, von $x = -2$ bis $x = 3$ positiv, von $x = 3$ *bis* $x = 8$ negativ und endlich von $x = 8$ bis $x = +\infty$ positiv ausfällt, die entsprechenden Curvenstücke also bezüglich unter, dann über, dann wieder unter und endlich über der Abscissenachse li~~n.

Fig. 49.



*) Der Satz wird auch oft auf folgende weniger einfache Weise ausgedrüc
Eine Curve wendet der Abscissenachse die concave oder convexe Seite zu, je nachdem der zweite Differentialquotient für den betreffenden Curvenpunkt mit der entsprechenden Ordinate das entgegengesetzte oder gleiche Zeichen hat.

**) Bei stetigen Functionen geschieht das erstere bekanntlich mittelst des Durchganges durch Null.

Um die Culminationspunkte A und B zu bestimmen, setze man

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 18x + 2 = 0$$

so findet man hieraus $x = OB_1 = 5{,}886\ldots$ und $x = OA_1 = 0{,}113\ldots$

Entwickelt man nun

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 18$$

so erkennt man hieraus, dass die Curve von $x = -\infty$ bis $x = 3$ concav, von $x = 3$ bis $x = +\infty$ convex nach unten ist und dass in dem Punkte $y = 0$, $x = 3$ der Sinn ihrer Krümmung sich ändert, dieser Punkt also ein Wendepunkt sein muss.

2) Ist $$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$
die Gleichung einer Curve, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}$$

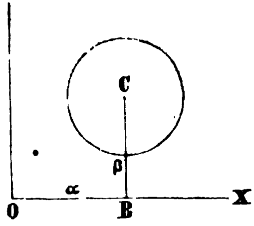
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y - \beta}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{y - \beta}\,\frac{(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2}{(y - \beta)^2}$$

$$= -\frac{r^2}{(y - \beta)^3}.$$

Die Curve ist also für $y > \beta$ concav, für $y < \beta$ convex nach unten, wie auch solches schon aus den Lehren der analytischen Geometrie bekannt ist, indem obige Gleichung ausdrückt, dass die betreffende Curve ein Kreis (Fig. 50) vom Radius r sei, dessen Mittelpunktscoordinaten OB und BC durch α und β bezeichnet sind.

Fig. 50.



§. 68. Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale.

1) Ist $$y = mx + b$$
die Gleichung einer Geraden, welche eine Curve $y = f(x)$ in einem bestimmten Punkte x_1, y_1, für welchen also $y_1 = f(x_1)$ ist, berühren soll, so müssen die beiden Gleichungen bestehen:

$$y_1 = mx_1 + b \text{ und } m = \frac{dy_1}{dx_1}\,{}^{*)}$$

Durch Einführung der Werthe von m und b aus vorstehenden [illegible]ngen in die erste Gleichung erhält man

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

---

*) [illegible]rch $\frac{dy_1}{dx_1}$ wird angedeutet, dass man zuerst $\frac{dy}{dx}$ zu bestimmen und im gefun[illegible]te x_1, y_1 statt x, y zu setzen habe.

als **Gleichung der die Curve im Punkte** x_1, y_1 **berührenden Tangente:**

Um diese Gleichung noch in einer anderen Form darzustellen, setzen wir $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ statt x und y, wo z also die Längeneinheit bezeichnet, so wird die betreffende Curvengleichung **homogen** (§. 34). Dieselbe sei nun ausgedrückt durch $f(x, y, z) = 0$.

Nach §. 42 ist aber

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \text{ oder } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

und wenn wieder x_1, y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen, so ergibt sich aus (1)

$$(y - y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1}{}^{*)} + (x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$$

wofür man auch, wegen $z = z_1 = 1$ setzen kann:

$$(y - y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} + (x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (z - z_1)\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0$$

oder

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1} + y\frac{\partial f}{\partial y_1} + z\frac{\partial f}{\partial z_1} = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}.$$

Nun aber ist nach §. 34:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial f}{\partial z_1} = nf,$$

wenn n die Ordnung der homogenen Function $f(x, y, z)$ angibt, und da x_1, y_1, z_1 ein Punkt der Curve, also $nf = 0$ ist, auch

$$x\frac{\partial f}{\partial x_1} + y\frac{\partial f}{\partial y_1} + z\frac{\partial f}{\partial z_1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

die gewünschte Tangentengleichung.

Anmerk. Für den Fall, dass x und y Functionen der Unabhängigen t sind, also $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ist, hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

zu setzen.

---

*) Durch $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ etc. wird angedeutet, dass zuerst $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ etc. zu bestimmen und in den gefundenen Werthen x_1, y_1 etc. statt x, y etc. zu setzen sei.

Ist $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve, so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

also nach (1) für die Gleichung der Tangente:

$$(x - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (y - y_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

2) Es sei ferner $\qquad y = m_1 x + b_1$

die Gleichung einer zur Tangente $y = mx + b$ senkrechten Geraden, so ist bekanntlich $m_1 = -\frac{1}{m}$ und wenn die Senkrechte durch den Berührungspunkt x_1, y_1 der Tangente geht, auch noch

$$y_1 = m_1 x_1 + b_1 = -\frac{1}{m}x_1 + b_1,$$

also

$$b_1 = y_1 + \frac{1}{m}x_1.$$

Durch Einführung der Werthe von m_1 und b_1 in obige allgemeine Gleichung folgt:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

und wenn man endlich $m = \frac{dy_1}{dx_1}$ setzt, erhält man:

$$y - y_1 = -\frac{dx_1}{dy_1}(x - x_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

als Gleichung der Normale*) des Punktes x_1, y_1:

3) Setzt man in (1) und (2) $y = 0$, so wird bezüglich

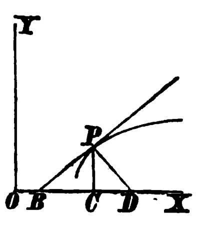
$$-x + x_1 = y_1\frac{dx_1}{dy_1} \text{ und } x - x_1 = y_1\frac{dy_1}{dx_1}$$

oder (Fig. 50a) für den Berührungspunkt x_1, y_1:

$$\text{Subtangente } BC^{**)} = y_1\frac{dx_1}{dy_1} \quad . \quad (3)$$

$$\text{Subnormale } CD^{***)} = y_1\frac{dy_1}{dx_1} \quad . \quad (4)$$

Fig. 50a.



Da ferner

$PB = \sqrt{PC^2 + BC^2}$ und $PD = \sqrt{PC^2 + CD^2}$

so erhält man durch Einführung der betreffenden Werthe:

---

*) D. i. die im Berührungspunkte zur Tangente senkrechte Gerade. Die Länge der [illegible]male wird durch den Berührungspunkt und ihren Durchschnittspunkt mit der Ab[illegible]achse bestimmt.

Die Subtangente eines Punktes ist die vom Fusspunkte der entsprechenden Or[illegible] und dem Durchschnittspunkte der Tangente mit der Abscissenachse begrenzte St[illegible]e. Dieselbe ist hiernach positiv, wenn sie, vom Fusspunkte der Ordinate gerechnet, im [illegible] der negativen XAchse liegt.

Die Subnormale ist die vom Fusspunkte der entsprechenden Ordinate und de[illegible]chschnittspunkte der Normale mit der Abscissenachse begrenzte Strecke. Di[illegible]lbe ist also positiv, wenn sie, vom Fusspunkte der Ordinate gerechnet, im Sinne de[illegible]tiven XAchse liegt.

$$\text{Tangente*)}\, PB = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\text{Normale}\quad PD = y_1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy_1}{dx_1}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

4) Führt man statt der Coordinaten x_1, y_1 eines bestimmten Punktes die laufenden Coordinaten x, y ein, so erhält man ganz allgemein:

$$\text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\text{Subnormale} = y\frac{dy}{dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\text{Tangente} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\text{Normale} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Beispiele.

1) Ist $y^2 + x^2 = r^2$ die Mittelpunktsgleichung eines Kreises vom Radius r, so hat man der Reihe nach:

$$\text{Subtangente} = y\frac{dx}{dy} = y \,.\, -\frac{y}{x} = -\frac{y^2}{x} = x - \frac{r^2}{x};$$

$$\text{Subnormale} = y\frac{dy}{dx} = -x;$$

$$\text{Tangente} = y\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = y \,.\, \frac{r}{x};$$

$$\text{Normale} = y\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = r.$$

2) Da $y^2 = px$ die Gleichung der gemeinen Parabel ist, so hat man dafür:

$$\text{Subtangente} = y\frac{2y}{p} = \frac{2y^2}{p} = 2x;$$

$$\text{Subnormale} = y\frac{p}{2y} = \frac{p}{2};$$

$$\text{Tangente} = y\sqrt{1 + \frac{4y^2}{p^2}} = \sqrt{px + 4x^2};$$

$$\text{Normale} = y\sqrt{1 + \frac{p^2}{4y^2}} = \sqrt{px + \frac{p^2}{4}}.$$

3) Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist bekanntlich

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

---

*) Die Tangente wird vom Berührungspunkte bis zum Durchschnitt mit der Abscissenachse gerechnet.

Hieraus folgt: $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}$

und man hat daher:

$$\text{Subtangente} = -\frac{a^2y^2}{b^2x} = \frac{x^2 - a^2}{x} = x - \frac{a^2}{x};$$

$$\text{Subnormale} = -\frac{b^2}{a^2}x;$$

$$\text{Tangente} = y\sqrt{1 + \frac{a^4y^2}{b^4x^2}} = \frac{y}{bx}\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}$$

$$= \frac{y}{bx}\sqrt{a^4 - c^2x^2};$$

$$\text{Normale} = y\sqrt{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}} = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - c^2x^2}.$$

4) Ist $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$ die Gleichung einer Hyperbel, so findet man wie oben:

$$\text{Subtangente} = x - \frac{a^2}{x};$$

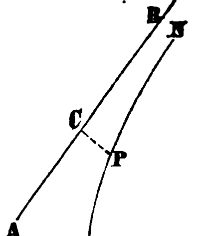
$$\text{Subnormale} = \frac{b^2}{a^2}x;$$

$$\text{Tangente} = \frac{y}{bx}\sqrt{c^2x^2 - a^4};$$

$$\text{Normale} = \frac{b}{a^2}\sqrt{c^2x^2 - a^4}.$$

§. 69. Asymptoten.

Fig. 1.



Eine Linie AB (Fig. 51) heisst eine Asymptote der Curve MN, wenn der Abstand PC eines Curvenpunktes immer kleiner wird, je entfernter man den Punkt annimmt, d. h. wenn für x oder y oder beide zugleich unendlich, $\lim PC = 0$ ist.

Die Asymptote ist eine Tangente, deren Berührungspunkt unendlich weit vom Coordinatenanfang liegt.

Denn ist $y = mx + b$ die Gleichung einer Asymptote, so ist der Abstand des Curvenpunktes x_1, y_1 von derselben $= \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{1 + m^2}}$.*)

*) ...n die Gleichung des Perpendikels ist

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1).$$

E... man aus dieser Gleichung und der Gleichung $y = mx + b$ die Veränderlichen x ...n erhält man für die Coordinaten des Perpendikelfusspunktes:

$$x = \frac{x_1 + my_1 - mb}{1 + m}; \quad y = \frac{mx_1 + m y_1 + b}{1 + m^2}$$

$$(x - x_1) + (y - y_1)^2 = p^2$$

... obigen Ausdruck für den Abstand p.

Da nun $lim \frac{y_1 - mx_1 - b}{\sqrt{1 + m^2}} = 0$ sein soll, m aber endlich ist, so ist

$$lim\,(y_1 - mx_1 - b) = 0$$

oder

$$y_1 - mx_1 - b = \varepsilon,$$

wo ε sich mit wachsendem x_1 und y_1 der Null nähert. Hieraus folgt:

$$y_1 = mx_1 + b + \varepsilon \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

oder

$$\frac{y_1}{x_1} = m + \frac{b + \varepsilon}{x_1}$$

und es ist somit

$$lim\,\frac{y_1}{x_1} = m.$$

Da aber $\frac{y_1}{x_1}$ unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheint, so hat man für $x_1 = \infty$ nach §. 55:

$$lim\,\frac{\frac{dy_1}{dx_1}}{1} = lim\,\frac{y_1}{x_1} = m \quad \ldots \ldots (2)$$

Ferner folgt aus (1):

$$b = y_1 - mx_1 - \varepsilon = lim\,(y_1 - mx_1)$$

$$= lim\,\frac{m - \frac{y_1}{x_1}}{-\frac{1}{x_1}}$$

oder da $\frac{m - \frac{y_1}{x_1}}{-\frac{1}{x_1}}$ für $x_1 = \infty$ unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, indem $lim\,\frac{y_1}{x_1} = m$, der wirkliche Werth aber nach §. 54:

$$\frac{\frac{-x_1 y_1' + y_1}{x_1^2}}{\frac{1}{x_1^2}} = y_1 - x_1 y_1' \text{ ist,}$$

$$b = lim\,(y_1 - x_1 y_1') \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

Die Gleichung der durch den Punkt x_1, y_1 gehenden Tangente ist aber nach §. 68 (1)

$$y - y_1 = y_1'(x - x_1)$$

oder

$$y = xy_1' + y_1 - x_1 y_1'$$

also für

$$x_1 = \infty,$$

$$y = x\,lim\,y_1' + lim\,(y_1 - x_1 y_1')$$

oder nach (2) und (3)

$$y = mx + b$$

d. i. die **Gleichung der Asymptote.** Wie wir hieraus zugleich ersehen, ist die Asymptote nur dann die Grenze der Tangente, wenn y_1' und $y_1 - x_1 y_1'$ für $x_1 = \infty$ bestimmte Werthe annehmen.

Aus Vorstehendem ergibt sich zur Bestimmung der Asymptoten einer Curve folgendes Verfahren:

Man führe zuerst in der allgemeinen Tangentengleichung

$$y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1),$$

wo x_1, y_1 die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen, für y_1 den betreffenden Werth aus der vorgelegten Curvengleichung $y = f(x)$ ein und lasse alsdann in der resultirenden Gleichung

$$y = x\frac{df(x_1)}{dx_1} + f(x_1) - x_1\frac{df(x_1)}{dx_1}$$

x_1 unendlich gross werden. Nähern sich hierbei die Ausdrücke

$$\frac{df(x_1)}{dx_1} \text{ und } f(x_1) - x_1\frac{df(x_1)}{dx_1}$$

bestimmten Grenzen m und b, so ist $y = mx + b$ die Gleichung der Asymptote.

Anmerkungen. 1) Geht die Asymptote parallel zur Ordinatenachse, so kann dieselbe natürlich auf dem angegebenen Wege nicht gefunden werden. Man hat in diesem Falle die Tangentengleichung nach x aufzulösen und dann analog wie vorhin zu verfahren.

2) Es ist klar, dass man als Tangentengleichung auch die Form ($1a$) des §. 68, 1. wählen kann.

3) Dass der Curve eine zur Ordinatenachse parallele Asymptote entspricht, erkennt man auch daraus, dass für $x = x_1$ $y = \infty$ wird.

Beispiele.

1) Um zu untersuchen, ob die Hyperbel, deren Mittelpunktsgleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, Asymptoten hat, bestimme man zunächst mittelst

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

die Gleichung der im Punkte x_1, y_1 gezogenen Tangente. Nach §. 68, (1) od[illegible]) erhält man dafür:

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

od

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

od

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2}\cdot\frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

oder, wenn man aus obiger Hyperbelgleichung den Werth von

$$y_1 = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x_1^2 - a^2}$$

bestimmt und darnach in (α) einführt,

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{ab} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x_1^2}} = \frac{1}{x_1}.$$

Setzt man nun hierin $x_1 = \infty$, so resultirt

$$\frac{x}{a^2} \pm \frac{y}{ab} = 0$$

oder

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

als Gleichung der Asymptoten.

Man ersieht hieraus, dass sowohl für $x = a$, als auch für $x = -a$ die Ordinate $y = \pm b$ wird und kann somit die beiden Asymptoten leicht construiren.

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist und umgekehrt, so schneiden beide Asymptoten einander im Mittelpunkte.

2) Um das Blatt des Descartes, dessen Gleichung

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

ist, auf Asymptoten zu untersuchen, setze man zunächst $y_1 = mx_1$, also

$$x_1 (1 + m^3) - 3am = 0$$

oder

$$1 + m^3 = \frac{3am}{x_1}$$

so folgt hieraus für $x_1 = \infty$, $m = -1$ und somit ist in diesem Falle

$$y_1 = - x_1.$$

Da nun
$$\frac{df(x_1)}{dx_1} = \frac{ay_1 - x_1^2}{y_1^2 - ax_1}$$

also

$$f(x_1) - x_1 \frac{df(x_1)}{dx_1} = \frac{y_1^3 - 2ax_1y_1 + x_1^3}{y_1^2 - ax_1} = \frac{ax_1y_1}{y_1^2 - ax_1}$$

und für $x_1 = \infty$

$$\frac{ax_1y_1}{y_1^2 - ax_1} = - \frac{ax_1^2}{x_1^2 - ax_1} = - a$$

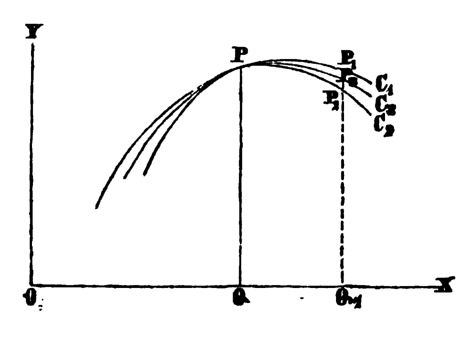
wird, so hat man

$$y = - x - a \text{ oder } y + x + a = 0$$

als Gleichung der gewünschten Asymptote.

§. 70. Osculation der Curven.

Fig. 52.



1) Sind $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ die Gleichungen zweier Curven C_1 und C_2 (Fig. 52), wo x die Abscisse des den beiden Curven gemeinschaftlichen Punktes P bezeichnet und lässt man x um $QQ_1 = h$ sich ändern, so erhält man nach §. 50 für die betreffenden Ordinaten:

$$P_1Q_1 = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x + \theta h)$$
$$P_2Q_1 = \varphi(x+h) = \varphi(x) + h\varphi'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{n!} \varphi^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \varphi^{(n+1)}(x + \theta_1 h)$$

Es ist somit, da $f(x) = \varphi(x)$, die Differenz beider Ordinaten oder

$$P_1P_2 = h\,[f'(x) - \varphi'(x)] + \frac{h^2}{1 \cdot 2}[f''(x) - \varphi''(x)] + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x)] + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[f^{(n+1)}(x+\theta h) - \varphi^{(n+1)}(x+\theta_1 h)]$$

und dieselbe hat daher die Form

$$Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots + Kh^n + Lh^{n+1}$$

wo $A, B, C, \ldots K, L$ endlich sind.

Wenn nun beide Curven C_1 und C_2 in P eine gemeinschaftliche Tangente haben, also $f'(x) = \varphi'(x)$, oder $A = 0$ ist, so sagt man dieselben gehen mit einander eine **Berührung der ersten Ordnung** ein. Ist ausserdem noch $f''(x) = \varphi''(x)$, also $A = B = 0$, so besteht zwischen C_1 und C_2 eine **Berührung zweiter Ordnung**. Sind allgemein die n ersten Differentialquotienten einander gleich, so ıan eine **Berührung $n$ter Ordnung**.

Besteht nun zwischen den Curven C_1 und C_2 eine Berührung ..sten Ordnung, so lässt sich **keine dritte** Curve C_3, deren :hung $y = \psi(x)$ sei, angeben, welche den Punkt P mit den beiden -en Curven C_1 und C_2 gemeinschaftlich hätte und deren Ast han die beiden Aeste dieser Curven fiele, wenn nicht $f'(x) = \psi'(x)$

ist. Denn die Ordinatendifferenz $P_1 P_3$ hat die Form

$$A_1 h + B_1 h^2 + C_1 h^3 + \ldots + K_1 h^n + L_1 h^{n+1}$$

und da dieser Ausdruck für ein hinreichend kleines h nach §. 4, 11. dasselbe Zeichen wie $A_1 h$, oder da h positiv ist, wie A_1 hat, so müssen wir bei Zugrundelegung unserer Figur A_1 als positiv annehmen und wegen

$$P_1 P_3 < P_1 P_2$$

setzen:

$$A_1 h + B_1 h^2 + \ldots + K_1 h^n + L_1 h^{n+1} < Bh^2 + \ldots + Kh^n + Lh^{n+1}$$

wo Bh^2 aus demselben Grunde wie vorhin $A_1 h$ positiv zu nehmen ist. Hieraus würde aber, da h positiv, folgen:

$$A_1 + B_1 h + \ldots + K_1 h^{n-1} + L_1 h^n < Bh + \ldots + Kh^{n-1} + Lh^n$$

oder $A_1 < (B - B_1) h + (C - C_1) h^2 + \ldots + (L - L_1) h^n$,

was nach §. 4, 12. für hinreichend kleine h unmöglich ist. Es kann somit $f'(x) - \psi'(x)$ nicht von Null verschieden sein.

3) Ebenso lässt sich zeigen, dass, wenn C_1 und C_2 eine Berührung zweiter Ordnung mit einander eingehen, sich zwischen beiden keine dritte Curve C_3 durchziehen lässt, die mit beiden den Punkt P gemeinschaftlich hätte, wenn nicht zugleich $f'(x) = \psi'(x)$ und $f''(x) = \psi''(x)$ ist. Analog gilt dieser Satz für eine Berührung dritter, vierter, ... $n$ter Ordnung.

4) Gehen zwei Curven C_1 und C_2 eine Berührung $n$ter Ordnung mit einander ein, so hat der Werth des Abstandes beider Curvenäste, parallel zur Ordinatenachse gemessen, die Form

$$Lh^{n+1} + Mh^{n+2} + Nh^{n+3} + \ldots$$

und da dieser Ausdruck für ein hinreichend kleines h nach §. 4, 11. dasselbe Zeichen annimmt wie Lh^{n+1}, so ersehen wir hieraus, dass für ein ungerades n die Curve C_2 in unmittelbarer Nähe der Berührungsstelle beiderseits derselben auf einerlei Seite der Curve C_1 liegt, für ein gerades n dagegen die Curve C_2 die C_1 berührt und schneidet indem nämlich beziehungsweise $\pm h$ in jeder geraden Potenz einerlei, in jeder ungeraden aber verschiedene Zeichen erhält.

Ist daher die Berührung zweier Curven von gerader Ordnung, so findet mit der Berührung zugleich ein Durchschneiden beider statt.

5) Kennt man die Curve C_2 nur der Gattung nach, nicht aber die in ihrer Gleichung auftretenden Constanten, so kann man diese immer so bestimmen, dass eine Berührung mit einer gegebenen Curve erzielt wird, deren Ordnung um Eins kleiner ist, als die Anzahl der Constanten in der Gleichung der Curve C_2; denn es lassen sich in diesem Falle stets so viel Gleichungen aufstellen, als man Constanten zu ermitteln hat.

6) Die Berührung einer Curve $y = \varphi(x)$ mit ihrer Tangente $y = f(x)$ ist im Allgemeinen von der ersten Ordnung und die Curve liegt in unmittelbarer Nähe des Berührungspunktes ganz auf derselben Seite der Tangente. Zwischen dieser und der Curve kann alsdann nach Obigem keine Gerade hindurchgehen. Wird auch noch $f''(x_1) = \varphi''(x_1)$ oder da $f''(x_1) = 0$ ist, $\varphi''(x_1) = 0$, ist aber $\varphi'''(x_1)$ nicht Null, wo x_1 die Abscisse des Berührungspunktes bezeichnet, so ist die Berührung der Tangente von der zweiten Ordnung und die Tangente schneidet und berührt zugleich die Curve. Der betreffende Punkt ist dann ein Wendepunkt (Fig. 47 und 48). Wir haben bereits in §. 67, *b.* die Eigenschaft eines Wendepunktes kennen gelernt und sind nun im Stande allgemein zu bestimmen, ob einer Curve an einer bestimmten Stelle ein solcher entspricht oder nicht. Da nämlich für die Tangente $y = f(x)$ alle höheren Differentialquotienten als der erste Null sind, so wird nach dem oben Mitgetheilten der Curve $y = \varphi(x)$ im Punkte x_1 ein Wendepunkt zukommen, wenn überhaupt dafür die $2n$ ersten Differentialquotienten von $\varphi(x)$ Null sind, der $(2n + 1)$te aber nicht Null ist. Hiernach lassen sich nun leicht die Wendepunkte einer Curve bestimmen. Man setze nämlich zuerst $\varphi''(x) = 0$, bestimme hieraus x und untersuche, wie viele der nun noch folgenden Differentialquotienten für diese Werthe von x Null werden. Ist der erste nicht Null werdende von ungerader Ordnung, so entspricht dem gefundenen x ein Wendepunkt.

Nach §. 67, 2. müssen, wenn $x = x_1$ einem Wendepunkt entsprechen soll, $\varphi''(x + h)$ und $\varphi''(x - h)$, für h beliebig klein, Werthe mit verschiedenen Zeichen liefern, wornach der gefundene Werth ebenfalls geprüft werden kann.

Die Wendepunkte liefern somit eine Berührung der 2ten, 4ten, ... $2n$ten Ordnung.

Beispiele.

1) Es sei $y = f(x) = \alpha x + \beta$ die Gleichung einer Geraden, $\eta = \varphi(\xi)$ die irgend einer Curve. Soll nun jene Gerade diese Curve in einem bestimmten Punkte x_1, y_1 berühren, so muss nach Obigem

$$y_1 = f(x_1) = \alpha x_1 + \beta = \varphi(x_1)$$

und

$$f'(x_1) = \varphi'(x_1) \text{ oder } \alpha = \varphi'(x_1)$$

als ... $= y_1 - x_1 \varphi'(x_1)$ sein.

...allgemeine Gleichung der berührenden Geraden ist somit:

$$y = x\varphi'(x_1) + y_1 - x_1\varphi'(x_1)$$

ode...

$$y - y_1 = \varphi'(x_1)[x - x_1]$$

wa... 68 (1) übereinstimmt.

2) Ist $y = x^3$ die Gleichung einer Curve, so wird

$$y' = 3x^2\,;\; y'' = 6x\,;\; y''' = 6$$

und da aus $y'' = 6x = 0$, $x = 0$ folgt, dafür aber y''' nicht Null wird, so ist $x = 0$, $y = 0$ ein Wendepunkt und weil dafür $y' = 0$, die Abscissenachse die Tangente im Wendepunkte.

3) Ist $y = x^5$, so ist ebenfalls $x = 0$, $y = 0$ ein Wendepunkt, weil dafür $y' = y'' = y''' = y^{IV} = 0$, aber $y^{V} = 120$ wird.

4) Die Gleichung einer Curve sei:

$$x^3 - xy + y = 0,$$

man soll den Lauf derselben untersuchen.

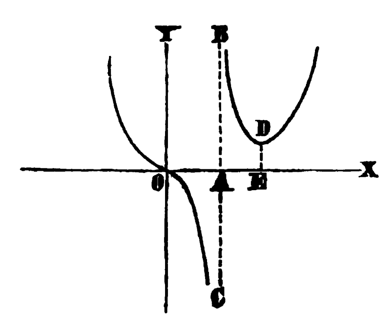
Aufl. Bestimmt man zunächst

$$y = \frac{x^3}{x-1},$$

so ersieht man hieraus, dass negativen x, positive Ordinaten entsprechen. Für $0 < x < 1$ wird y negativ, für $x > 1$ dagegen positiv. Setzt man $x = 1 \pm 0$, so folgt: $y = \pm \infty$.

Die Curve besteht somit aus zwei Theilen, welche zu beiden Seiten der im Punkte $x = OA = 1$ (Fig. 53) zur Ordinatenachse gezogenen Parallelen BC liegen. Entwickelt man

Fig. 53.



$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3};$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{-6}{(x-1)^4},$$

so ergibt sich, da $\frac{d^2y}{dx^2}$ dasselbe Zeichen wie $x(x-1)$ hat, also positiv ist für $x < 0$ und $x > 1$, negativ aber für $0 < x < 1$, dass die Curve stets die convexe Seite der Abscissenachse zukehrt. Setzt man $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, so erhält man für x Null und zwei imaginäre Werthe. Da für

$$x = 0,\; \frac{d^3y}{dx^3} = -6$$

also nicht Null wird, so ist $x = 0$, $y = 0$ ein Wendepunkt und wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$, ist die Abscissenachse Tangente in diesem Punkte. Da ferner $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird für $x = 1$, so ist die Ordinate BC eine As[illegible]tote zu beiden Curventheilen und wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = \frac{3}{2}$, ist die T[illegible]ente im Punkte $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{27}{4}$ oder des Punktes D parallel zur Ab[illegible]sen-achse. Fassen wir die gefundenen Resultate zusammen, so ergibt s[illegible] für die Curve der durch Fig. 53 dargestellte Lauf.

5) Die Gleichung einer Curve heisst

$$xy\,(x-1)+ax+\frac{y-a}{2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo a ein positiver Parameter; man soll den Lauf derselben untersuchen.

Aufl. Aus der vorgelegten Gleichung folgt:

$$y=\frac{\frac{a}{2}\,(1-2x)}{x^2-x+\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und da hiernach $y=0$ wird für $x=\pm\infty$, so ist $y=0$ d. i. die Abscissenachse OX (Fig. 54) eine Asymptote unserer Curve (2). Weil ferner

$$x^2-x+\tfrac{1}{2}=(x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{1}{4}$$

so wird y niemals unendlich.

Betrachten wir nun zuerst den Theil der Curve, welchem in der Gleichung (2) positive x entsprechen.

Da y positiv oder negativ ausfällt, je nachdem $x \lessgtr \frac{1}{2}$ und

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\,(x^2-x)}{(x^2-x+\frac{1}{2})^2}$$

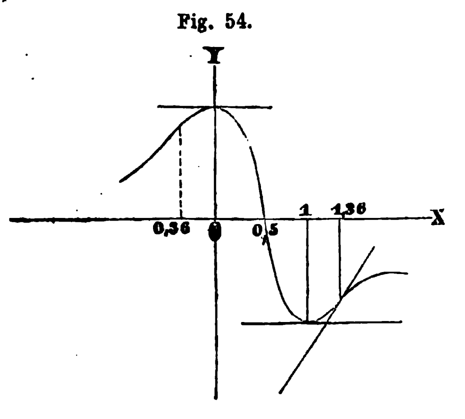
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{a}{(x^2-x+\frac{1}{2})^3}\,(1-2x)\,(x^2-x-\tfrac{1}{2})$$

$$=\frac{a}{(x^2-x+\frac{1}{2})^3}\,(1-2x)\,((x-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{3}{4})$$

$$=\frac{-2a}{(x^2-x+\frac{1}{2})^3}\,(x-0,5)(x-1,366\,..)(x+0,366\,..)$$

so folgt, dass die Curve (2) im ersten Quadranten für jeden Werth von $x > 1,366 \ldots$ der Abscissenachse die convexe, sowie für jedes $x < 0,5$, der Achse x die concave Seite zukehrt, während für alle Werthe von x, für welche $0,5 < x < 1,366$, die concave Seite gegen die XAchse OX gerichtet ist, indem im ersten Falle die Ordinaten einerlei, im zweiten und dritten aber entgegengesetzte Zeichen mit dem zweiten Differentialquoti[...] annehmen.

Fig. 54.



[...]en wir x negativ voraus, etwa $x=-x_1$, so wird

$$\frac{d[...]}{d[...]} \quad \frac{2a}{[...]_1{}^2+x_1+\frac{1}{2})^3}\,(x_1+0,5)\,(x_1+1,366\ldots)\,(x_1-0,366\ldots)$$

u[...] ähnliche Betrachtung wie vorhin lehrt, dass die Curve der xAchse

di[...] [...]ave / [...]exe Seite zukehrt, je nachdem $x_1 \lessgtr 0,366$.

Die drei Punkte

$$(x = \tfrac{1}{2}, y = 0) ; (x = x_1 = 1{,}366 , y_1 = \frac{a}{2} (1 - 2x_1))$$

und $$(x = x_2 = - 0{,}366 , y_2 = \frac{a}{2} (1 - 2x_2)),$$

welche in gerader Linie liegen, sind die 3 Wendepunkte der Curve dritten Grades.

Setzt man $\frac{dy}{dx} = 0$, so folgt $x = 0$ oder $x = 1$ und da $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ oder positiv ausfällt, je nachdem man darin $x = 0$ oder 1 setzt, so entspricht dem Punkte $x = 0$ ein Maximum, dem $x = 1$ ein Minimum.

Da das Wachsen und Abnehmen von y nur von dem Zeichen des Ausdruckes $x^2 - x = x(x - 1)$ abhängt, so erkennt man sofort, dass y wächst, wenn x von 1 bis ∞ zunimmt, dagegen abnimmt von $x = 0$ bis $x = 1$. Für negative x nimmt y stets ab, ohne je negativ zu werden. Die Curve, welche der Gl. (2) entspricht, hat hiernach die in Fig. 54 dargestellte Form.

6) Die Curve, deren Gleichung

$$y = \frac{3x - 2}{7x^2 - 16x + 13}$$

ist, zu discutiren.

Aufl. Da der Gleichung

$$7x^2 - 16x + 13 = 0$$

nur imaginäre Werthe entsprechen, so kann y für einen endlichen Werth von x niemals unendlich werden. Für $x = \pm \infty$ wird aber $y = 0$ und es ist somit die Abscissenachse eine Asymptote der Curve.

Für $x > \frac{2}{3}$ wird y positiv, für $x < \frac{2}{3}$ und jeden negativen Werth dagegen negativ, für $x = \frac{2}{3}$ aber Null.

Bestimmt man nun

$$\frac{1}{7} \frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + 4x + 1}{(7x^2 - 16x + 13)^3} ;$$

$$\frac{1}{294} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{(7x^2 - 16x + 13)^2},$$

so folgt aus $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{7}$ oder $x_1 = 1{,}5486 \ldots$ und $x_2 = - 0{,}2152$ und da $\frac{d^2y}{dx^2}$ für $x = 1{,}5486$ negativ, für $x = - 0{,}215..$ aber positiv ausfällt, so wird y für jenen Werth ein Maximum, für diese n Minimum. Weil ferner $\frac{d^2y}{dx^2}$ für die 3 Punkte

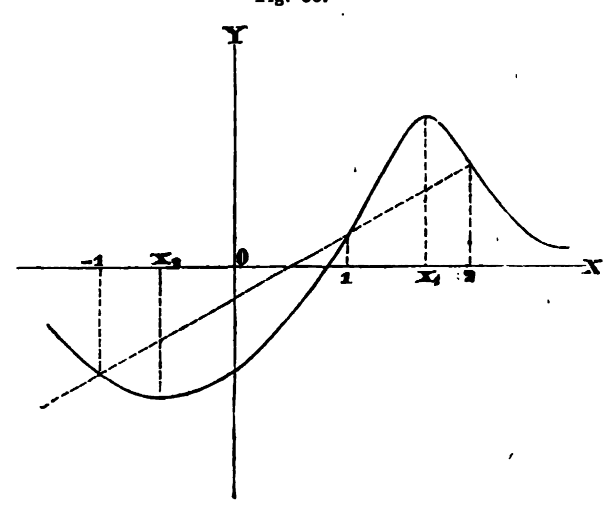
$$x = -1 , y = -\frac{5}{36} ; x = 1 , y = \frac{1}{4} ; x = 2 , y = \frac{4}{9}$$

Null wird, so hat die Curve diese drei Punkte als Wendepunkte. Wie . n sich leicht überzeugt, liegen diese drei Punkte in einer Geraden, de n Gleichung

$$y = \frac{7}{36}x + \frac{1}{18} \text{ ist.*)}$$

Nehmen wir nun x positiv, so hat $\frac{d^2y}{dx^2}$ einerlei Zeichen mit $(x-1)(x-2)$ und wird daher für $x > 2$ sowie für $x < 1$ positiv, für $1 < x < 2$ negativ; ist aber x negativ, so wird $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv, wenn der Absolutwerth von $x < 1$,

Fig. 55.



dagegen negativ, wenn dieser > 1 ist. Die Curve ist hiernach bezüglich ihrer Convexität und Concavität bestimmt und wir erhalten den durch Fig. 55 dargestellten Lauf derselben.

§. 70a. Aufgaben zur Uebung.

1) Die Gleichung

$$y = \frac{3x}{3x^2 + 1}$$

zu discutiren.

Aufl. $\frac{1}{3}\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2-1}{(3x^2+1)^2}$; $\frac{1}{3}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{18x(x+1)(x-1)}{(3x^2+1)^3}$

D[illegible] ›cissenachse ist Asymptote. Für $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$ ist y ein

---

*) [illegible]un setzt man in der Gleichung $y = mx + b$ zuerst $y = \frac{1}{4}$, $x = 1$, dann [illegible] $x = 2$ und bestimmt aus beiden Gleichungen $m = \frac{7}{36}$, $b = \frac{1}{18}$, so genügt der [illegible] $y = \frac{7}{36}x + \frac{1}{18}$ auch der dritte Punkt $y = -\frac{5}{36}$, $x = -1$.

Maximum, für $x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -0,577$ ein Minimum. Die drei in einer Geraden liegenden Punkte: $(x = 0, y = 0)$, $(x = 1, y = \frac{3}{4})$, $(x = -1, y = -\frac{3}{4})$ sind Wendepunkte. Der Lauf der Curve ist durch Fig. 56 dargestellt.

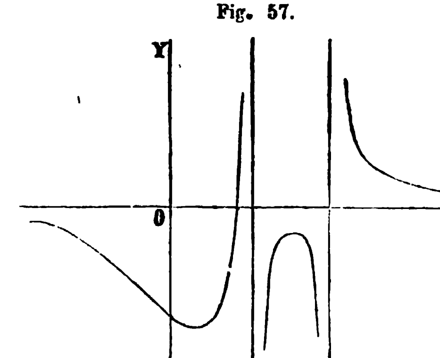
Fig. 56.

2) Die zur Discussion vorgelegte Gleichung sei

$$y = \frac{7x - 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{7x - 6}{(x - 1)(x - 2)}$$

Aufl. $\frac{dy}{dx} = +\frac{-7x^2 + 12x - 4}{(x^2 - 3x + 2)^2}$; $\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x(7x^2 - 18x + 12)}{(x^2 - 3x + 2)^3}$.

Fig. 57.



Für $x = 1,26\,..$ ist y ein Maximum, für $x = 0,453\ldots$ ein Minimum, $x = 0, y = -3$ ist ein Wendepunkt, $y = 0, x = 1$ und $x = 2$ sind drei Asymptoten. Fig. 57 stellt den Lauf der aus 3 Aesten bestehenden Curve dar.

§. 71. Krümmungskreis.

1) Sind α und β die Coordinaten des Mittelpunktes eines Kreises vom Radius ϱ, so ist bekanntlich dessen Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2.$$

Soll nun dieser Kreis mit der Curve, deren Gleichung $y = \varphi(x)$ ist, im Punkte x_1, y_1 eine Berührung erster Ordnung eingehen, so bestimme man zunächst

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - \alpha}{y - \beta}$$

der Bedingung gemäss muss nun sein:

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = \varrho^2$$

und

$$-\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta} = \varphi'(x_1).$$

Man erkennt aber sofort, dass diese beiden Gleichungen hinsichtlich der drei zu bestimmenden Constanten unzählig viele Auflösungen zulassen, es also auch unendlich viele Kreise geben muss, welche im

Punkte x_1, y_1 mit der vorgelegten Curve eine Berührung erster Ordnung eingehen.

Gibt man der letzten Gleichung die Form

$$y_1 - \beta = - \frac{1}{\varphi'(x_1)} (x_1 - \alpha)$$

so ersieht man, dass dieselbe nichts Anderes darstellt, als die durch den Berührungspunkt x_1, y_1 gezogene Normale der Curve $y = \varphi(x)$, wenn α und β die laufenden Coordinaten bezeichnen [§. 68 (2)].

Die verschiedenen Punkte α, β oder die Mittelpunkte aller nach erster Ordnung die Curve $y = \varphi(x)$ im Punkte x_1, y_1 berührenden Kreise, liegen somit in der Normale dieses Punktes.

Offenbar befindet sich aber unter diesen Kreisen einer, der mit der Curve eine innigere Berührung als die übrigen, d. i. eine Berührung zweiter Ordnung eingeht. Man nennt diesen Kreis, den Krümmungskreis und dessen Halbmesser den Krümmungshalbmesser der Curve für den betreffenden Punkt.

Wir gehen sogleich zur Bestimmung desselben über.

2) Soll der Kreis

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2$$

mit der Curve

$$y = \varphi(x)$$

im Punkte x, y eine Berührung zweiter Ordnung eingehen, so müssen y, y', y'' für diesen Punkt bei beiden Curven dieselben Werthe annehmen.

Für den Kreis hat man zur Bestimmung von y, y', y'' die drei Gleichungen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$x - \alpha + (y - \beta)\, y' = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$1 + (y - \beta)\, y'' + y'^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Denkt man sich nun in diese die aus der Gleichung der Curve $y = \varphi(x)$ abgeleiteten Werthe von y, y', y'' substituirt, so bleiben dieselben richtig und dienen alsdann zur Bestimmung von α, β, ϱ.

Bestimmt man aus (3):

$$y - \beta = - \frac{1 + y'^2}{y''} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

u[illegible] diesen Werth in (2) ein, so folgt:

$$x - \alpha = \frac{(1 + y'^2)\, y'}{y''} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

u[illegible]ach aus (1):

$$\varrho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Sieht man den Krümmungshalbmesser als **positiv** an, wenn die Curve an der betreffenden Stelle der Abscissenachse **concav** nach unten ist, so erhält man dessen Absolutwerth, wenn man von dem Doppelzeichen das Zeichen + oder — nimmt, je nachdem $y'' > 0$ oder $y'' < 0$ ist.

Bezeichnet N die Normale des betreffenden Punktes, so kann man nach §. 68 (6) auch setzen:

$$\varrho = \pm \frac{N^3}{y^3 y''} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Anmerk. Zu dem Ausdrucke (6) für den Krümmungshalbmesser gelangt man auch auf folgende Weise:

Sind ξ, η und ξ_1, η_1 zwei unmittelbar auf einander folgende Punkte einer Curve $y = \varphi(x)$, sieht man ferner x und y als Functionen der Veränderlichen t an und setzt $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$, so sind nach §. 68 (2) die Gleichungen der betreffenden Normalen:

$$y - \eta = -\frac{\xi'}{\eta'}(x - \xi) \text{ und } y - \eta_1 = -\frac{\xi_1'}{\eta_1'}(x - \xi_1)$$

woraus sich durch Subtraction ergibt:

$$\eta_1 - \eta = \frac{\xi_1'}{\eta_1'}(x - \xi_1) - \frac{\xi'}{\eta'}(x - \xi) = x\left(\frac{\xi_1'}{\eta_1'} - \frac{\xi'}{\eta'}\right) - \left(\frac{\xi_1\xi_1'}{\eta_1'} - \frac{\xi\xi'}{\eta'}\right)$$

Dividirt man diese Gleichung durch $t_1 - t$ und geht alsdann zur Grenze über, so erhält man unter Beibehaltung obiger Bezeichnungsweise:

$$\eta' = x\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)' - \left(\xi\frac{\xi'}{\eta'}\right)' = x\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)' - \xi'\frac{\xi'}{\eta'} - \xi\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)'$$

$$= (x - \xi)\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)' - \frac{\xi'^2}{\eta'}$$

$$\eta' + \frac{\xi'^2}{\eta'} = (x - \xi)\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)'$$

oder da nach §. 10

$$\eta'^2 + \xi'^2 = s'^2$$

ist, auch

$$\frac{s'^2}{\eta'} = (x - \xi)\left(\frac{\xi'}{\eta'}\right)'$$

woraus folgt:

$$x - \xi = \frac{s'^2\eta'}{\eta'\xi'' - \xi'\eta''};$$

$$y - \eta = -\frac{s'^2\xi'}{\eta'\xi'' - \xi'\eta''};$$

$$\varrho = \frac{s'^2}{\eta'\xi'' - \xi'\eta''}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} = \frac{s'^3}{\eta'\xi'' - \xi'\eta''}.$$

Lässt man nun die Accente weg und setzt $t = \xi = x$ und $\eta = y$, so geht dieser Ausdruck über in

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{-\frac{d^2y}{dx^2}} = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

und stimmt nun mit dem Obigen überein.

Beispiele.

1) Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = px$; daher wird

$$y' = \frac{p}{2y}\,;\; y'' = -\frac{p^2}{4y^3}$$

und somit der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{p}{2y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{4y^3}} = \frac{(4y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = \frac{(4x + p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}}$$

2) Die Gleichung der Ellipse ist

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

daher $$y' = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\,;\; y'' = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

folglich $$\varrho = \frac{1}{ab}\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)^{\frac{3}{2}}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{a^4b}\,(a^4 - c^2x^2)^{\frac{3}{2}}$$

wenn man nämlich $a^2 - b^2 = c^2$ setzt.

3) Für die Hyperbel ist

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

und auf dieselbe Weise wie vorhin findet man:

$$\varrho = \frac{1}{a^4b}\,(c^2x^2 - a^4)^{\frac{3}{2}}$$

Anmerk. Ist $y^2 = px + nx^2$ die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, so findet man

$$y' = \frac{p + 2nx}{2\sqrt{px + nx^2}} = \frac{p + 2nx}{2y}$$

$$y'' = -\frac{p^2}{4\,(px + nx^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{p^2}{4y^3}$$

und hiernach als allgemeinen Ausdruck für den Krümmungshalbmesser nach (7)

$$\varrho = \frac{4N^3}{p^2} = \frac{N^3}{\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

Unter der Voraussetzung, dass p die doppelte Ordinate des Brennpunktes oder den Parameter, ε die numerische Excentricität bezeichnet, ist

$$r = \frac{\frac{p}{2}}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

di· ·llgemeine Polargleichung eines Kegelschnittes für den Fall, dass der Pol mit e· ı Brennpunkte, die Polarachse mit der Achse des Kegelschnittes zusammenfällt u die Anomalien φ von dem Scheitel aus gerechnet werden, welcher dem Pole zu- n ·· ·gt.*)

·n α der Winkel, welchen eine Tangente des Kegelschnittes mit dem Radius

---

*) ·dem $\varepsilon \lesseqgtr 1$, ist die entsprechende Curve eine Ellipse, Parabel oder Hyp

vector bildet, so kann solcher aus der Gleichung

$$tg\,\alpha = r\,\frac{d\varphi}{dr}\,^{*)}$$

gefunden werden.

Für den Winkel β, welchen die Normale des betreffenden Punktes mit dem Radius vector bildet, bekommt man daher

$$tg\,\beta = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\varphi}$$

und zur Bestimmung der Normale N hat man:

$$N : r = \sin\varphi : \sin(\varphi - \beta)$$

$$N = \frac{r\,\sin\varphi}{\sin(\varphi - \beta)}$$

oder

$$N\cos\beta = \frac{r^2 \sin\varphi}{r\sin\varphi - \cos\varphi\,\frac{dr}{d\varphi}}$$

oder da

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{p}{2}\,\frac{d}{d\varphi}\,(1 + \varepsilon\cos\varphi)^{-1} = \frac{p}{2}\,\frac{\varepsilon\sin\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}$$

$$= \left(\frac{\frac{p}{2}}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\right)^2 \frac{\varepsilon\sin\varphi}{\frac{p}{2}} = \frac{r^2\,\varepsilon\sin\varphi}{\frac{p}{2}}$$

ist, auch

$$N\cos\beta = \frac{r^2\sin\varphi}{r\sin\varphi - \frac{2\varepsilon}{p}\,r^2\sin\varphi\,\cos\varphi}$$

$$= \frac{r}{1 - \frac{2\varepsilon}{p}\,r\cos\varphi} = \frac{p}{2}$$

d. h. die Projection der Normale eines Kegelschnittes auf den zugehörigen Radius vector ist gleich dem halben Parameter.

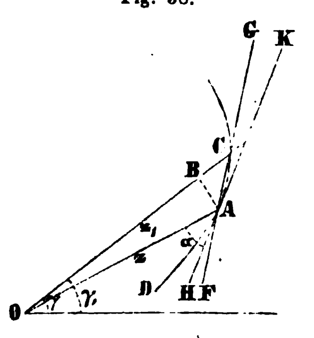
Da nun nach Obigem der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{N^3}{\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

ist, so folgt ferner

$$\varrho = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)^3}{\left(\frac{p}{2}\right)^2 \cos^3\beta} = \frac{\frac{p}{2}}{\cos^3\beta} = \frac{\frac{\frac{d}{2}}{\cos\beta}}{\cos^2\beta} = \frac{N}{\cos^2\beta}$$

Fig. 58.



*) Denn lässt man φ in φ_1 übergehen, so wird dadurch r zu r_1 werden und (Fig. 58)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{r\,(\varphi_1 - \varphi)}{r_1 - r}$$

Je mehr man nun φ_1 dem φ oder C dem A sich nähern lässt, um so mehr nähert si die Lage der Sekante FG der Lage der Tange HK und $r\,\frac{\varphi_1 - \varphi}{r_1 - r}$ der trigonometrischen Tar des $\measuredangle\, OAH = \alpha$.

Durch den Uebergang zur Grenze erh man daher

$$r\,\frac{d\varphi}{dr} = tg\,\alpha.$$

Wir schliessen hieraus auf folgende einfache Construction des Krümmungshalbmessers bei den Kegelschnitten.

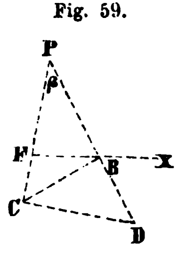
Ist F (Fig. 59) der Brennpunkt, FB die Richtung der Hauptachse, PB die Normale irgend eines Punktes P der Curve, und man zieht $BC \perp FB$, so ist

$$PC = \frac{BP}{\cos\beta} = \frac{N}{\cos\beta}.$$

Fällt man daher $CD \perp PC$, so wird:

$$PD = \frac{PC}{\cos\beta} = \frac{N}{\cos^2\beta} = \varrho$$

Fig. 59.



§. 72. Evoluten der Curven.

Die Mittelpunkte der Krümmungskreise aller auf einanderfolgenden Punkte einer Curve bestimmen eine zweite Curve, welche man die Evolute der gegebenen Curve nennt. Diese heisst alsdann auch die Evolvente von jener.

Um die Gleichung der Evolute einer gegebenen Curve $y=f(x)$ zu erhalten, substituire man in den Gleichungen (4) und (5) des §. 71, d. i. in:

$$x - \alpha = \frac{(1+y'^2)\,y'}{y''}$$

und

$$y - \beta = -\frac{1+y'^2}{y''}$$

die Werthe von y, y' und y'', so erhält man durch Elimination von x eine Gleichung zwischen α und β, welches die zu suchende Gleichung der Evolute ist.

Anmerk. 1) Die Gleichungen (1) bis (3) des §. 71 gehören offenbar der Evolute der betreffenden Curve $y = f(x)$ an, wenn man α, β und ϱ als Functionen von x ansieht, indem jede Aenderung von x eine Veränderung der Lage des Krümmungsmittelpunktes oder der entsprechenden Coordinaten α, β nach sich zieht.

Durch Differentiation von (2) nach x erhält man unter dieser Voraussetzung:

$$1 - \alpha' + (y' - \beta')\,y' + (y-\beta)\,y'' = 0$$

oder wegen (3)

$$\alpha' + \beta' y' = 0$$

woraus folgt

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = -\frac{1}{y'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Da die linke Seite dieser Gleichung offenbar den Differentialquotienten von β nach α vorstellt, also die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels ausdrückt, den die Tangente an die Evolute mit der Abscissenachse macht, so erhalten wir den Satz:

Tangenten an je zwei einander entsprechenden Punkten ..urve und ihrer Evolute stehen senkrecht auf einander, oder Tangenten an die Evolute sind die Normalen der betreffen..nkte der gegebenen Evolvente.

..fferenzirt man §. 71. (1) nach x, so folgt:

$$(x-\alpha)(1-\alpha') + (y-\beta)(y'-\beta') = \varrho\varrho'$$

..n (2)

$$(x-\alpha)\,\alpha' + (y-\beta)\,\beta' = -\varrho\varrho' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

..plication der Gl. (2) mit β' ergibt sich

$$(x-\alpha)\,\beta' + (y-\beta)\,\beta' y' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

und wenn man nun (b) und (c) quadrirt und addirt,

$$(x - \alpha)^2 (\alpha'^2 + \beta'^2) + (y - \beta)^2 (1 + y'^2) \beta'^2 + 2 (x - \alpha)(y - \beta)(\alpha' + \beta' y') \beta' = \varrho^2 \varrho'^2$$

oder da nach (a) $\alpha' + \beta' y' = 0$

also $\alpha'^2 + \beta'^2 = (1 + y'^2) \beta'^2,$

auch $(\alpha'^2 + \beta'^2) [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2] = \varrho^2 \varrho'^2$

oder wegen §. 71. (1)

$$\alpha'^2 + \beta'^2 = \varrho'^2,$$

also

$$\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} = \varrho'$$

oder nach §. 10:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{ds}{dx}$$

Es ist hiernach $\frac{d(\varrho - s)}{dx} = 0$, d. h. $\varrho - s$ ist eine constante Grösse, man mag x wählen wie man will. Bezeichnen daher ϱ_1, ϱ und s_1, s die den Werthen x_1, x entsprechenden Krümmungshalbmesser und Bogen, so hat man:

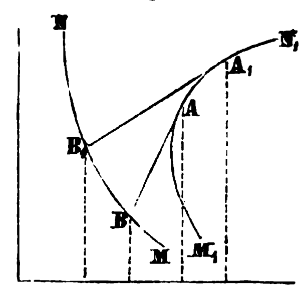
$$\varrho_1 - s_1 = \varrho - s$$

oder

$$\varrho_1 - \varrho = s_1 - s$$

d. h. die Bogen der Evolute ändern sich um dieselbe Grösse wie die Krümmungshalbmesser.

Fig. 60.



Bezeichnet also (Fig. 60) MN die Evolvente, M_1N_1 die Evolute und geht man in jener vom Punkte B zum Punkte B_1 über und sind A und A_1 die entsprechenden Punkte der Evolute, so ist

$$A_1B_1 - AB = \text{Bog. } AA_1$$

Man kann demnach die Evolvente aus der Evolute dadurch in ununterbrochener Bewegung erzeugen, dass man um diese einen Faden legt und solchen von ihr nun so abwickelt, dass er stets gespannt bleibt. Das freie Ende beschreibt alsdann die Evolvente.

Beispiele.

1) Die Gleichung der Parabel ist

$$y^2 = px,$$

also wird: $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{4y^3} = -\frac{p^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{3}{2}}}$

und somit:

$$x - \alpha = -\frac{\left(1 + \frac{p}{4x}\right) \cdot 4x^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} = -2x - \frac{p}{2},$$

$$y - \beta = \frac{\left(1 + \frac{p}{4x}\right) 4x^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} = \frac{4x^{\frac{3}{2}} + px^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}},$$

woraus folgt:

$$\alpha = 3x + \frac{p}{2} \text{ und } \beta = -4x\sqrt{\frac{x}{p}}.$$

Eliminirt man nun aus beiden Gleichungen x, so erhält man:

$$\beta^2 = \frac{16}{27p}\left(\alpha - \frac{p}{2}\right)^3 = \frac{2}{27p}(2\alpha - p)^3$$

als Gleichung der Parabelevolute.

Anmerk. Die Evolute besteht aus zwei vom Punkte $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$ ausgehenden, gegen die Abscissenachse symmetrisch gelegenen und dieser die convexe Seite zukehrenden Aesten.

2) Die Gleichung der Ellipse ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

woraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\,\frac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}};\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und somit

$$x - \alpha = x - \frac{x^3}{a^2} + \frac{b^2x^3}{a^4},$$

$$y - \beta = \frac{(a^4 - a^2x^2 + b^2x^2)(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^3b}$$

daher:

$$\alpha = \frac{x^3}{a^2} - \frac{b^2x^3}{a^4} = \frac{a^2 - b^2}{a^4}\,x^3,$$

$$\beta = \frac{(a^2b^2 - a^4 + a^2x^2 - b^2x^2)(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a^3b} = \frac{b^2 - a^2}{a^3b}\,(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Durch Elimination von x ergibt sich hiernach:

$$\left(\frac{a\alpha}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

oder

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als Gleichung der Ellipsenevolute.

Anmerk. Bezeichnet man $\frac{c^2}{a}$ durch a_1, $\frac{c^2}{b}$ durch b_1, so geht vorstehende Gleichung über in

$$\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\beta}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Eine nähere Discussion dieser Gleichung ergibt, dass die Evolute aus vier congruenten, in Bezug auf die Achsen symmetrisch liegenden Theilen besteht (Fig. 61). Für $\beta = 0$ folgt:

$$\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;\quad \left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2 = 1;\quad \alpha = \pm a_1$$

und da $a > c$, also $a_1 < c$, so liegen die Durchschnittspunkte A, A_1 der Aeste mit der grossen Achse stets zwischen den Brennpunkten.

Fig. 61.

Obigem ist ferner:

$$\alpha = \frac{c^2}{a^4}\,x^3;\quad \beta = -\frac{c^2}{a^3b}\,(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = -\frac{c^2y^3}{b^4}.$$

$x = a$ folgt $\alpha = \frac{c^2}{a}$ und da $\frac{c^2}{a} < a$, so ist der grösste Werth von α stets als die grosse Halbachse. Setzt man analog $y = b$, so erhält man als [absol]ut grössten Werth von $\beta = \frac{c^2}{b}$ und wenn daher $\frac{c^2}{b} < b$ oder $a^2 - b^2 < b^2$ $b\sqrt{2}$ ist, so liegt die Evolute ganz innerhalb der Ellipse; ist dagegen

$a = b\sqrt{2}$, also $\pm \frac{c^2}{b} = \pm b = \pm \beta$, so hat die Evolute die Endpunkte der kleinen Achse mit dieser gemeinschaftlich; wird endlich $a > b\sqrt{2}$, so schneidet die Evolute die Ellipse in vier Punkten.

3) Aus der Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

erhält man auf analoge Weise wie bei der Ellipse:

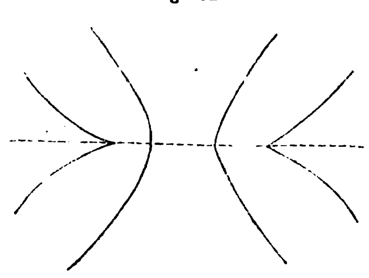
$$\left(\frac{a\alpha}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\beta}{a^2 + b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

oder

$$\left(\frac{a\alpha}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{b\beta}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

als Evolutengleichung.

Fig. 62.



Anmerk. Eine einfache Discussion dieser Gleichung ergibt, dass die Evolute wiederum aus vier congruenten, gegen die Hauptachse symmetrisch gelegenen Theilen besteht (Fig. 62).

§. 73. Enveloppe einer Curvenschaar.

1) Ist $f(x, y, p) = 0$, wo f eine eindeutige Function bedeutet*), die Gleichung einer Curve, p eine darin vorkommende Constante (Parameter), so wird man für verschiedene p auch verschiedene Curven derselben Art erhalten. Lässt man daher p sich stetig ändern, so erhält man eine Reihe von Curven, von welchen je zwei unmittelbar auf einander folgende durch ihre Durchschnitte Punkte einer neuen Curve bilden, welche die Enveloppe der ersten heisst.

Um nun zu untersuchen, wie man zur Gleichung dieser Linie gelangt, sei p_1 ein anderer Werth der Constanten, so hat man zur Bestimmung der Durchschnittspunkte der zwei entsprechenden Curven die Gleichungen

$$f(x, y, p) = 0 \text{ und } f(x, y, p_1) = 0$$

oder

$$\frac{f(x, y, p_1) - f(x, y, p)}{p_1 - p} = 0.$$

Lassen wir nun p_1 dem p sich unendlich nähern, die Differenz $p_1 - p$ also unendlich klein werden, so bekommen wir

$$\frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0.$$

*) f darf also weder Wurzelausdrücke mit geraden Wurzelexponenten noch gebrochene Exponenten mit geraden Nennern und dergleichen enthalten.

Die verlangte Gleichung wird somit erhalten, wenn man aus den Gleichungen

$$f(x, y, p) = 0 \text{ und } \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

den Werth von p eliminirt.

Wie wir oben bemerkt haben, setzt diese Regel voraus, dass $f(x, y, p) = 0$ eine eindeutige Function sei. Wird aber diese Gleichung nach p aufgelöst, ist z. B. $p = \varphi(x, y)$, so darf $\varphi(x, y)$ nicht eindeutig sein, weil alsdann die Curven $p = \varphi(x, y)$ und $p_1 = \varphi(x, y)$ keine Schnittpunkte liefern. Ist $\varphi(x, y)$ nur zweideutig, und bezeichnen φ_1 und φ_2 die beiden Werthe, so sind die beiden Nachbarcurven:

$$p = \varphi_1(x, y) \text{ und } p_1 = \varphi_2(x, y).$$

Daher ist $\quad p_1 - p = \varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)$

und wenn man zur Grenze übergeht,

$$\varphi_2(x, y) = \varphi_1(x, y)$$

welches nun die Gleichung der Enveloppe ist.

Ist z. B. $\quad (x - p)^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$

die gegebene Gleichung, so folgt durch Differentiation nach p

$$-2(x - p) = 0 \text{ oder } p = x,$$

also

$$y^2 - a^2 = 0$$

als Enveloppe.

Hätte man statt der obigen Gleichung geschrieben:

$$x - p + \sqrt{a^2 - y^2} = 0,$$

so würde man $-1 = 0$ erhalten haben, was seinen Grund in der Zweideutigkeit von p hat.

Da nach (α) $\quad p - x = \pm\sqrt{a^2 - y^2}$

so ist $\quad \varphi_1 = x + \sqrt{a^2 - y^2}\,;\ \varphi_2 = x - \sqrt{a^2 - y^2}$

und die Gleichung der Enveloppe wird daher wieder:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ oder } a^2 - y^2 = 0$$

2) Die Enveloppe berührt alle Curven der entsprechenden Schaar.

Denn bezeichnet $\quad f(x, y, p) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$

eine eindeutige Function, so ist nach Obigem für die Enveloppe

$$f(x, y, p) = 0 \text{ und } \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

nun die Gleichung der Enveloppe erhalten wird, wenn man .. beiden Gleichungen (2) den Parameter p eliminirt, so kann

$$f(x, y, \varphi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

..hung der Enveloppe betrachten, wenn darin φ diejenige

Function von x und y bedeutet, welche durch Auflösung der Gleichung $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ nach p erhalten wird.

Aus der Gleichung (1) der Eingehüllten, wo p einen constanten festen Werth hat und aus der Gleichung (3) der Enveloppe oder, was dasselbe ist, aus den Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = p$ folge nun:

$$x = a\,;\, y = b,$$

so ist noch zu zeigen, dass beide Curven in diesem Punkte eine gemeinschaftliche Berührende haben. Für die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Berührende mit der XAchse bildet, erhält man bei der Eingehüllten:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0,$$

und bei der Enveloppe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y'\right) = 0.$$

Da für $x = a$, $y = b$, aber $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$ und $\varphi = p$ wird, so ist für diesen Punkt $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$. Man erhält somit für $\frac{dy}{dx}$ bei beiden Curven denselben Werth, wodurch obige Behauptung bewiesen ist.

Beispiele.

1) Ein rechter Winkel ABC (Fig. 63) bewegt sich so, dass der eine Schenkel AB stets durch den festen Punkt A geht und der Scheitel B die Ordinatenachse OY durchläuft. Man soll die Enveloppe des Schenkels BC bestimmen.

Fig. 63.

Aufl. Es sei $P = (x\,,\,y)$ ein Punkt von BC,

$$\sphericalangle ABO = BDO = \alpha,$$

$AO = a$, $BO = p$, so ist:

$$tg\,\alpha = \frac{a}{p} = \frac{y}{x + DO} = \frac{y}{x + \ldots};$$

woraus folgt:

$$y = \frac{a}{p}\left(x + \frac{p^2}{a}\right) = \frac{a}{p}x + p$$

oder

$$f(x\,,\,y\,,\,p) = py - ax - p^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad)$$

als Gleichung des Schenkels BC.

Hiernach setze man

$$\frac{\partial f(x\,,y\,,p)}{\partial p} = y - 2p = 0, \text{ also } ax - p^2 = 0,$$

und wenn man vermittelst dieser Gleichung p aus (1) eliminirt, so ergibt sich

$$yp - 2p^2 = 0$$

oder

$$y^2 = 4p^2 = 4ax$$

als gewünschte Gleichung.

Die Enveloppe ist somit eine Parabel, deren Scheitel O und deren Brennpunkt A ist.

2) Der rechte Winkel ABC (Fig. 64) bewegt sich so, dass der Schenkel AB stets durch den festen Punkt A geht, der Scheitel aber immer in die Peripherie des Kreises M fällt. Man soll die Enveloppe des Schenkels BC bestimmen.

Fig. 64.

Aufl. Es sei $AB = p$, der Radius $MB = r$, $AM = a$, $\sphericalangle\ AMB = \alpha$, $\sphericalangle\ BAD = \beta$, so ist

$$p^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\alpha$$

$$tg\,\beta = \frac{BD}{AD} = \frac{r\sin\alpha}{r\cos\alpha - a}$$

$$y - r\sin\alpha = ED\cot\beta = (r\cos\alpha - x)\frac{r\cos\alpha - a}{r\sin\alpha}$$

woraus folgt

$$yr\sin\alpha - x(a - r\cos\alpha) = r^2 - ar\cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

als Gleichung des Schenkels BC.

Setzt man deren Differentialquotient nach α oder

$$yr\cos\alpha - r(a + x)\sin\alpha = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

so ist aus (2) und (3) der Werth von α zu eliminiren.

Schreibt man zu diesem Ende statt (2):

$$y^2 r\sin\alpha + (a + x)\,yr\cos\alpha = y(r^2 + ax)$$

und führt aus (3) den Werth von $yr\cos\alpha$ ein, so folgt:

$$[y^2 + (a + x)^2]\,r\sin\alpha = y(r^2 + ax) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und wenn man statt (2) schreibt:

$$yr(a + x)\sin\alpha + r(a + x)^2\cos\alpha = (r^2 + ax)(a + x)$$

und nun aus (3) den Werth von $r(a + x)\sin\alpha$ einführt:

$$[y^2 + (a + x)^2]\,r\cos\alpha = (r^2 + ax)(a + x) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Quadrirt man nun die beiden Gleichungen (4) und (5) und addirt hiernach die Resultate, so ergibt sich

$$r^2[y^2 + (a + x)^2]^2 = (r^2 + ax)^2[y^2 + (a + x)^2]$$

als· der $y^2 + (a + x)^2 = 0$

od· $r^2[y^2 + (a + x)^2] = (r^2 + ax)^2$

od· $r^2y^2 + (r^2 - a^2)x^2 = (r^2 - a^2)r^2.$

folgern aus dieser Gleichung, dass für $a < r$ die Enveloppe eine Ell· für $a > r$ eine Hyperbel und für $a = 0$ der Kreis selbst ist.

· $= a$ erhält man als Gleichung:

$$y^2 + (a + x)^2 = 0$$

od· $y = 0\,,\ x = -a$

d· Punkt.

3) Der rechte Winkel ABC (Fig. 65) bewege sich so, dass der Schenkel AB stets durch den Scheitel A einer Parabel geht; die Spitze des rechten Winkels aber eine Parabel durchläuft.

Fig. 65.

Aufl. Bezeichnen wir die Coordinaten eines Parabelpunktes B durch x_1 und y_1, so ist $y_1^2 = px_1$, und wenn x und y die Coordinaten eines Punktes P des Schenkels BC bedeuten,

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$$

die Gleichung der Geraden BC.

Man hat daher

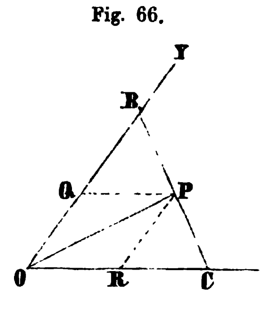
$$y_1(y - y_1) + x_1(x - x_1) = 0$$

oder
$$yy_1 + xx_1 - y_1^2 - x_1^2 = 0$$
oder
$$y\sqrt{px_1} + xx_1 - px_1 - x_1^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$
woraus durch Differentiation nach x_1 folgt:
$$\frac{y\sqrt{p}}{2\sqrt{x_1}} + x - p - 2x_1 = 0$$
oder
$$y\sqrt{px_1} + 2xx_1 - 2px_1 - 4x_1^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$
Durch Subtraction fliesst aus (α) und (β):
$$xx_1 - px_1 - 3x_1^2 = 0$$
oder
$$x - p - 3x_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Nach (α) ist aber
$$py^2 = (p + x_1 - x)^2 x_1$$
oder
$$27py^2 = [3(p - x) + 3x_1]^2 \, 3x_1$$
also, wenn man aus (γ) den Werth von $3x_1$ einführt,
$$27py^2 = 4(x - p)^3$$
oder
$$y^2 = \frac{4}{27p}(x - p)^3$$
die Gleichung der Enveloppe.

4) Eine feste Gerade BC (Fig. 66) schneidet die Coordinatenachsen OX und OY in den Entfernungen $OC = a$ und $OB = b$ von O. Auf derselben bewegt sich ein Punkt P von C gegen B. Man soll die Gleichung der Enveloppe finden, welche durch die Diagonale QR des über OB, OC und dem Punkte P als viertem Eckpunkte beschriebenen Parallelogrammes erzeugt wird,

Fig. 66.



Aufl. Ist für irgend eine Lage des Punktes P die Abscisse $OR = z$ die Ordinate $PR = u$, so ist

$$\frac{z}{a} + \frac{u}{b} = 1$$

die Gleichung der Geraden BC und da die Diagonale QR die Coordinatenachsen in R und Q schneidet, $\frac{x}{z} + \frac{y}{u} = 1$ die der Geraden QR. Schreibt man

dafür $\frac{x}{z} + \frac{ay}{au} = 1$ und berücksichtigt, dass nach der ersten Gleichung

$$au = ab - bz$$

ist, so geht dieselbe über in:

$$\frac{x}{z} + \frac{ay}{ab - bz} = 1$$

für den Differentialquotienten nach z ergibt sich hieraus:

$$-bx + ay = ab - 2bz.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen z, so folgt:

$$a^2y^2 - 2ab\,xy - 2a^2by + b^2x^2 - 2ab^2x + a^2b^2 = 0$$

oder

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1\right)^2 - \frac{4xy}{ab} = 0$$

oder

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} - 1 = \pm 2\sqrt{\frac{y}{b}}\sqrt{\frac{x}{a}}$$

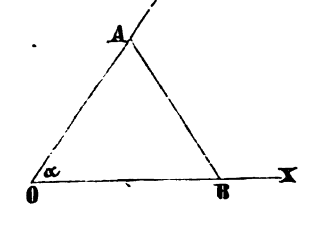
oder

$$\left(\sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 = 1$$

als Gleichung der Enveloppe. Diese ist hiernach eine Parabel, welche die Achsen OX und OY bezüglich in C und B berührt.

5) Zwischen den Schenkeln eines Winkels $YOX = \alpha$ (Fig. 67) bewegt sich eine Gerade AB so, dass sie successiv Dreiecke wie OAB von einerlei Inhalt abschneidet. Man soll die von AB erzeugte Enveloppe bestimmen.

Fig. 67.



Aufl. Bezeichnen wir wieder die Coordinaten OB und OA der Durchschnittspunkte B und A durch z und u, so ist $\frac{uz}{2}\sin\alpha$, also auch uz eine constante Grösse c.

Führt man daher in die Gleichung der Geraden AB oder in

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{u} = 1$$

$u = \frac{c}{z}$ ein, so erhält man:

$$\frac{x}{z} + \frac{yz}{c} = 1,$$

als Gleichung der Geraden AB.

Setzt man den Differentialquotienten nach z Null, so folgt.

$$-\frac{x}{z^2} + \frac{y}{c} = 0$$

un[...] man aus diesen beiden Gleichungen den Werth von z eliminirt,

$$4xy = c \text{ oder } xy = \frac{c}{4}.$$

[...]nveloppe ist somit eine Hyperbel.*)

*) [...]nn $xy = k$ ist die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Asymptoten als [...]achsen.

6) In den Schenkeln des Winkels YOX (Fig. 68) sind zwei feste Punkte P und Q gegeben. Eine Gerade AB bewegt sich so, dass sie die Winkelschenkel stets in gleichen Abständen PA, BQ von P und Q schneidet; man soll die Gleichung der durch AB bestimmten Enveloppe herleiten.

Fig. 68.

Aufl. Setzen wir $OQ = a$, $OP = b$, $PA = QB = z$, so ist die Gleichung der Einhüllenden AB:

$$\frac{x}{a - z} + \frac{y}{b + z} = 1$$

und wenn man den Differentialquotienten nach z Null setzt,

$$\frac{x}{(a - z)^2} - \frac{y}{(b + z)^2} = 0\ ;\ x\,(b + z)^2 = y\,(a - z)^2$$

oder
$$\frac{a - z}{b + z} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

oder, wenn wir einstweilen den Ausdruck $\sqrt{\frac{x}{y}}$ durch u bezeichnen,

$$a - z = u\,(b + z).$$

Die Gleichung der Einhüllenden wird daher:

$$\frac{x}{u\,(b + z)} + \frac{y}{b + z} = 1$$

oder
$$\frac{x}{u} + y = b + z$$

oder auch
$$x + uy = a - z.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man

$$\frac{u + 1}{u}\,(x + uy) = a + b$$

und wenn man den Werth von u einführt,

also
$$uy = \sqrt{xy}\,,\ x + uy = (\sqrt{x} + \sqrt{y})\,\sqrt{x}$$

und
$$\frac{u + 1}{u} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

setzt,

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = a + b$$

oder
$$(x + y - a - b)^2 = 4xy.$$

Die Enveloppe ist somit eine Parabel, welche die beiden Coordinatenachsen berührt.

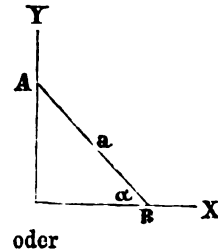


Fig. 69.

7) Eine Strecke $AB = a$ (Fig. 69) bewegt sich mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines r[illegible]ten Winkels, man soll die Gleichung der von ihr be[illegible]mten Enveloppe aufsuchen.

Aufl. Man hat

$$\frac{x}{a \cos \alpha} + \frac{y}{a \sin \alpha} = 1$$

oder
$$\frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha} = a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

und wenn man den Differentialquotienten hiervon nach α Null setzt,

$$x \sin^3\alpha = y \cos^3\alpha$$

oder
$$\sin^2\alpha = \frac{y}{x}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\cos^2\alpha = \frac{y}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}}(1 - \sin^2\alpha)$$

oder
$$\sin^2\alpha = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$$

und
$$\cos^2\alpha = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung (μ) folgt:

$$\frac{x\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{y\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}}{y^{\frac{1}{3}}} = a$$

oder
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

als Gleichung der Enveloppe.

8) In einem Kreise (Fig. 70) wird ein Strahl AB bei B so reflectirt, dass der $\measuredangle\, ABD = 2\alpha$ vom Radius $MB = r$ halbirt wird; man soll die Enveloppe aller zu AB parallel einfallenden und in analoger Weise reflectirten Strahlen bestimmen.

Fig. 70.

Aufl. Die Gleichung des reflectirten Strahles BD ist

$$y - y_1 = tg\,2\alpha\,(x - x_1)$$

wenn x_1 und y_1 die Coordinaten des Punktes B in Bezug auf M als Anfangspunkt bezeichnen. Schreibt man dafür

$$(y - y_1)\cos 2\alpha = \sin 2\alpha\,(x - x_1)$$

und setzt
$$y_1 = r\sin\alpha\,;\; x_1 = r\cos\alpha,$$

so folgt:

$$y\cos 2\alpha - x\sin 2\alpha = r(\sin\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha\sin 2\alpha)$$
$$= -r\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

und hieraus durch Differentiation

$$-2y\sin 2\alpha - 2x\cos 2\alpha = -r\cos\alpha$$

oder
$$y\sin 2\alpha + x\cos 2\alpha = \frac{r}{2}\cos\alpha \quad \ldots\ldots \quad (\nu)$$

Multiplicirt man nun (μ) mit $\cos 2\alpha$ und (ν) mit $\sin 2\alpha$, so ergibt sich durch nachherige Addition:

$$y = \frac{r}{2}(\cos\alpha\sin 2\alpha - 2\sin\alpha\cos 2\alpha)$$
$$= \frac{r}{2}(\sin\alpha - \sin\alpha\cos 2\alpha)$$
$$= \frac{r}{2}\sin\alpha\,(1 - \cos 2\alpha) = r\sin^3\alpha$$

ur[illegible] man (μ) mit $\sin 2\alpha$ und (ν) mit $\cos 2\alpha$ multiplicirt und darnach su[illegible]

$$x = \frac{r}{2} (\cos\alpha \cos 2\alpha + 2 \sin\alpha \sin 2\alpha)$$
$$= \frac{r}{2} (\cos\alpha + \sin\alpha \sin 2\alpha) = \frac{r}{2} \cos\alpha \, (1 + 2\sin^2\alpha)$$
$$x^2 = \frac{r^2}{4} (1 - \sin^2\alpha)(1 + 2\sin^2\alpha)^2$$
$$= \frac{r^2}{4} (1 + 3\sin^2\alpha - 4\sin^6\alpha).$$

Es ist somit

$$x^2 + y^2 = \frac{r^2}{4} (1 + 3\sin^2\alpha)$$

oder
$$4(x^2 + y^2) - r^2 = 3r^2 \sin^2\alpha$$

oder
$$[4(x^2 + y^2) - r^2]^3 = 27 r^4 y^2$$

die gewünschte Gleichung.

9) Auf den zwei Geraden OX und OY (Fig. 71) bewegen sich gleichzeitig in den durch die Pfeile angegebenen Richtungen zwei Punkte p_1 und p_2 von A und B aus mit den Geschwindigkeiten α und β. Man soll die von $p_1 p_2$ gebildete Enveloppe bestimmen.

Fig. 71.

Aufl. Setzen wir $OA = a$, $OB = b$, so ist nach der Zeit t der Punkt p_1 um $a + \alpha t$ und p_2 um $b - \beta t$ von O entfernt und die Gleichung der Geraden $p_1 p_2$ somit

$$\frac{x}{a + \alpha t} + \frac{y}{b - \beta t} = 1.$$

Differenzirt man dieselbe nach t, so folgt:

$$-\frac{\alpha x}{(a + \alpha t)^2} + \frac{\beta y}{(b - \beta t)^2} = 0$$

oder
$$\frac{\sqrt{\alpha x}}{a + \alpha t} = \frac{\sqrt{\beta y}}{b - \beta t}$$

und hieraus

$$t = \frac{b\sqrt{\alpha x} - a\sqrt{\beta y}}{(\sqrt{\alpha y} + \sqrt{\beta x})\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{b\sqrt{\alpha x} - a\sqrt{\beta y}}{\alpha\sqrt{\beta y} + \beta\sqrt{\alpha x}}$$

Also wird
$$a + \alpha t = \frac{(a\beta + \alpha b)\sqrt{\alpha x}}{(\sqrt{\alpha y} + \sqrt{\beta x})\sqrt{\alpha\beta}}$$
$$b - \beta t = \frac{(b\alpha + a\beta)\sqrt{\beta y}}{(\sqrt{\alpha y} + \sqrt{\beta x})\sqrt{\alpha\beta}}$$

und durch Einführung dieser Werthe in die Gleichung der Geraden $p_1 p_2$ resultirt

$$(\sqrt{\alpha y} + \sqrt{\beta x})\sqrt{\beta x} + (\sqrt{\alpha y} + \sqrt{\beta x})\sqrt{\alpha y} = a\beta + b\alpha$$

oder
$$(\sqrt{\alpha y} + \sqrt{\beta x})^2 = a\beta + b\alpha$$

als Gleichung der Enveloppe. Diese ist hiernach eine Parabel.

10) Man soll die Enveloppe aller Kreise bestimmen, wenn deren Mittelpunkte auf der Peripherie einer Ellipse liegen, und sämmtliche durch das Centrum der Ellipse gehen.

Aufl. Ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse (Fig. 72), so kann man setzen:

$$x = a \cos \alpha \; ; \; y = b \sin \alpha$$

wo α veränderlich ist. Die Gleichung eines Kreises von der bezeichneten Eigenschaft ist alsdann:

$$(x - a \cos \alpha)^2 + (y - b \sin \alpha)^2 = (a \cos \alpha)^2 + (b \sin \alpha)^2$$

oder

$$x^2 + y^2 - 2\, ax \cos \alpha - 2by \sin \alpha = 0.$$

Fig. 72.

Durch Differentiation nach α folgt hieraus:

$$ax \sin \alpha - by \cos \alpha = 0$$

und man hat daher:

$$ax \cos \alpha + by \sin \alpha = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$by \cos \alpha - ax \sin \alpha = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$(b^2 y^2 + a^2 x^2) \sin \alpha = by \, \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2) \cos \alpha = ax \, \frac{x^2 + y^2}{2}$$

also $\qquad (a^2x^2 + b^2y^2)^2 = \frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2 (a^2x^2 + b^2y^2)$

oder $\qquad (a^2x^2 + b^2y^2) [(x^2 + y^2)^2 - 4 (a^2x^2 + b^2y^2)] = 0.$

Es ist hiernach

$$(x^2 + y^2)^2 = 4 (a^2x^2 + b^2y^2)$$

die Gleichung der Enveloppe und diese ist somit die Fusspunktcurve der Ellipse

$$\frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2} = 1 \text{ *)}$$

für die vom Mittelpunkte aus gefällten Perpendikel.

---

*) Errichtet man von einem festen Punkte aus Perpendikel auf die Tangenten einer Curve, so bestimmen die Fusspunkte derselben eine Curve, welche die **Fusspunktcurve** jener Curve genannt wird. Aus den Gleichungen der gegebenen Curve, der Tangente im Punkte x_1, y_1 und des Perpendikels ergeben sich für die Coordinaten x, y de[illegible]punktes drei Formeln, aus welchen nun x_1, y_1 eliminirt werden können. Ist al[illegible] $+ \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse für den Punkt x_1, y_1, so ist nach §. 68

$$y - y_1 = - \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

od[illegible]

$$\frac{x x_1}{a^2} + \frac{y y_1}{b^2} = 1$$

di[illegible]ngente und $y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} x$ die des Perpendikels vom Mittelpunkte aus. Aus den

11) Die Enveloppe aller Kreise zu bestimmen, welche ihre Mittelpunkte in der Peripherie einer Parabel haben und durch den Scheitel derselben gehen.

Fig. 73.

Aufl. (Fig. 73.) Bezeichnen α, β die Coordinaten eines Parabelpunktes, x, y die eines Punktes der Enveloppe, so ist

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

oder
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$$

und
$$\beta^2 = p\alpha.$$

Führt man nun den Werth von $\alpha = \frac{\beta^2}{p}$ aus der zweiten in die erste Gleichung ein, so folgt

$$x^2 + y^2 - \frac{2\beta^2}{p} x - 2\beta y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu)$$

und wenn man nach β differenzirt,

$$2\beta x + py = 0,$$

also
$$\beta = -\frac{py}{2x}.$$

Man hat daher nach (μ):

$$x^2 + y^2 - \frac{py^2}{2x} + \frac{py^2}{x} = 0$$

oder
$$2x(x^2 + y^2) + py^2 = 0$$

oder, wenn man $-x$ statt x setzt,

$$2x^3 = y^2(p - 2x)$$

und hiernach
$$y = x\sqrt{\frac{2x}{p-2x}}$$

als gewünschte Gleichung.

Die gesuchte Enveloppe ist die Fusspunktcurve einer Parabel, wenn die Perpendikel vom Scheitel aus errichtet werden*) und führt den besonderen Namen Cissoide.

Anmerk. Für $x = \frac{p}{2}$ wird $y = \infty$; die Directrix ist somit eine Asymptote der Curve. Nach obiger Entwickelung liegt die ganze Curve auf der Seite der negativen x.

---

beiden letzten Gleichungen folgt

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}; \; y_1 = \frac{b^2 y}{x^2 + y^2}$$

und wenn man diese Werthe in die Ellipsengleichung einführt

$$\frac{a^2x^2 + b^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 \text{ oder } (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

als Gleichung der Fusspunktcurve der Ellipse.

*) Denn aus der Tangentengleichung

$$y - \beta = \frac{p}{2\beta}(x - \alpha) \text{ oder } \beta y = \frac{p}{2}(x + \alpha)$$

und der Perpendikelgleichung $y = -\frac{2\beta}{p} x$ folgt $\beta = -\frac{py}{2x}$; $\alpha = -\frac{x^2}{...}$ ...

Führt man diese Werthe in die Parabelgleichung $\beta^2 = p\alpha$ ein, so resultirt ... Gleichung.

12) Die Enveloppe aller Curven

$$(x-p)^2+y^2-a^2=0,$$

wo p der veränderliche Parameter ist, zu bestimmen.

Aufl. Eliminirt man aus den Gleichungen

$$(x-p)^2+y^2-a^2=0 \text{ und } -2(x-p)=0$$

den Werth von p, so folgt:

$$y^2-a^2=0 \text{ oder } (y+a)(y-a)=0.$$

Die Enveloppe wird somit durch zwei parallele Gerade gebildet.

13) Die Enveloppe der Curvenschaar

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n+\left(\frac{y}{\beta}\right)^n=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu)$$

zu bestimmen, wenn gleichzeitig die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^m+\left(\frac{\beta}{b}\right)^m=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\nu)$$

bestehen soll, worin a und b Constante, α und β zwei Veränderliche bezeichnen.

Aufl. Da nach (ν) β eine Function von α ist, so folgt durch Differentiation der Gl. (μ) und (ν) nach α:

$$\frac{x^n}{\alpha^{n+1}}+\frac{y^n}{\beta^{n+1}}\frac{d\beta}{d\alpha}=0$$

und

$$\frac{\alpha^{m-1}}{a^m}+\frac{\beta^{m-1}}{b^m}\frac{d\beta}{d\alpha}=0,$$

daher

$$\frac{x^n}{\alpha^{n+1}}\cdot\frac{a^m}{\alpha^{m-1}}=\frac{y^n}{\beta^{n+1}}\cdot\frac{b^m}{\beta^{m-1}}$$

oder

$$\frac{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n}{\left(\frac{\alpha}{a}\right)^m}=\frac{\left(\frac{y}{\beta}\right)^n}{\left(\frac{\beta}{b}\right)^m}=k$$

also

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n=k\left(\frac{\alpha}{a}\right)^m;\ \left(\frac{y}{\beta}\right)^n=k\left(\frac{\beta}{b}\right)^m.$$

Durch Einführung dieser Werthe in die Gl. (μ) erhält man:

$$k\left[\left(\frac{\alpha}{a}\right)^m+\left(\frac{\beta}{b}\right)^m\right]=1$$

und es ist somit nach (ν):

$$k=1;$$

folg

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n=\left(\frac{\alpha}{a}\right)^m \text{ und } \left(\frac{y}{\beta}\right)^n=\left(\frac{\beta}{b}\right)^m$$

ode

$$\alpha=a^{\frac{m}{m+n}}\,x^{\frac{n}{m+n}}$$

$$\beta=b^{\frac{m}{m+n}}\,y^{\frac{n}{m+n}}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gl. (ν), so resultirt:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mn}{m+n}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mn}{m+n}} = 1$$

als gesuchte Gleichung.

Anmerk. Hiernach kann leicht Aufgabe 7 gelöst werden. Berücksichtigt man nämlich, dass

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

die Gleichung der Geraden und

$$\alpha^2 + \beta^2 = l^2 \text{ oder } \left(\frac{\alpha}{l}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{l}\right)^2 = 1$$

die Bedingungsgleichung ist, so ergibt sich, wenn man $m = 2$, $n = 1$, $a = b = l$ setzt, sofort:

$$\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{l}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

oder

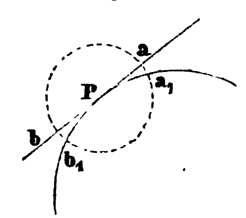
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

als Gleichung der Enveloppe, wie wir solche auch früher gefunden haben.

§. 74. Besondere Punkte ebener Curven.

Denkt man sich von irgend einem Punkte P (Fig. 74) einer ebenen Curve aus mit einem unendlich kleinen Radius einen Kreis gezeichnet, so wird dieser im Allgemeinen die Curve in zwei Punkten a_1, b_1 schneiden, welche eine solche Lage haben, dass die Radien Pa_1, Pb_1 nahezu mit den Richtungen der Tangente Pa, Pb zusammen fallen, der $\measuredangle\, a_1 P b_1$ also von einem gestreckten nur um unendlich wenig verschieden ist.

Fig. 74.



Jeder Punkt einer Curve, der als Mittelpunkt eines solchen Kreises angenommen, nicht zwei Durchschnittspunkte a_1, b_1 liefert, welche bezüglich ihrer Lage den eben gemachten Anforderungen entsprechen, heisst ein besonderer oder singulärer Punkt der betreffenden Curve.

Wir unterscheiden hiernach mehre Arten von besonderen Punkten, welche nun der Reihe nach betrachtet werden sollen.

a. Vielfache Punkte.

Ein Punkt wird ein vielfacher genannt, wenn der von demselben aus mit unendlich kleinem Radius beschriebene Kreis die Curve in mehr als zwei Punkten schneidet.

Ein vielfacher Punkt entsteht, wenn sich mehre Curvenäste in einem und demselben Punkte durchschneiden (Fig. 75) oder einander berühren (Fig. 76). Im Allgemeinen werden hiernach der Curve in

Fig. 75.

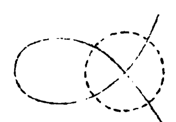
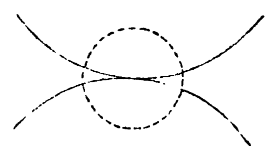


Fig. 76.



einem vielfachen Punkte mehre Tangenten entsprechen, es sei denn, dass solche in eine zusammenfallen. Je nach der Anzahl dieser Tangenten heisst der Punkt insbesondere ein Doppelpunkt, drei-, vier- etc. $n$facher Punkt.

Beispiel.

Ist
$$y^2 - x^2 - x^3 = 0$$
die Gleichung einer Curve, so folgt hieraus:
$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3x + 2}{2\sqrt{x+1}}$$
und wenn man nun $x = 0$ setzt, so wird
$$y = 0, \frac{dy}{dx} = \pm 1,$$
woraus hervorgeht, dass der Curve im Punkte $x = 0, y = 0$ d. h. im Ursprunge, zwei Tangenten entsprechen, derselbe also ein Doppelpunkt ist. Aus $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ folgt sofort, dass die beiden Tangenten den Coordinatenwinkel halbiren. Eine nähere Untersuchung über den Lauf der Curve führt zu dem durch Fig. 77 repräsentirten Bilde derselben.

Fig. 77.

b. Rückkehrpunkte.

Ein Curvenpunkt P heisst Rückkehrpunkt, wenn der von ihm als Centrum aus mit unendlich kleinem Radius beschriebene Kreis die Curve in zwei Punkten a_1, b_1 schneidet, der entsprechende Centri-
·l a_1Pb_1 aber vom Nullwinkel nur um unendlich wenig ver-
'en ist.

ı Rückkehrpunkt wird hiernach entstehen, wenn zwei Curven-
. . ͻn einem und demselben Punkte ausgehen und zugleich einander
em Punkte berühren. Beiden Aesten entspricht im Rückkehr-
eine gemeinschaftliche Tangente.

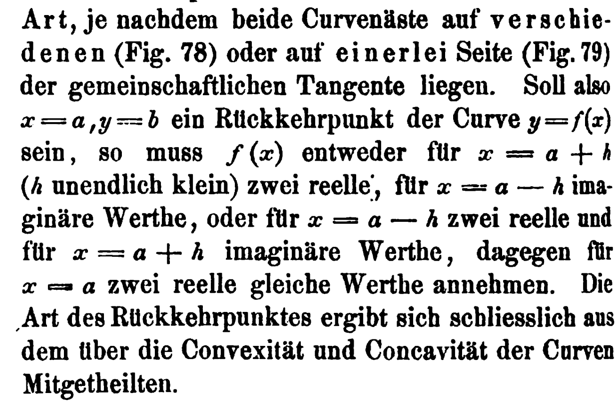
Man unterscheidet Rückkehrpunkte der **ersten** und der **zweiten**

Fig. 78.



Art, je nachdem beide Curvenäste auf **verschiedenen** (Fig. 78) oder auf **einerlei** Seite (Fig. 79) der gemeinschaftlichen Tangente liegen. Soll also $x = a, y = b$ ein Rückkehrpunkt der Curve $y = f(x)$ sein, so muss $f(x)$ entweder für $x = a + h$ (h unendlich klein) zwei reelle, für $x = a - h$ imaginäre Werthe, oder für $x = a - h$ zwei reelle und für $x = a + h$ imaginäre Werthe, dagegen für $x = a$ zwei reelle gleiche Werthe annehmen. Die Art des Rückkehrpunktes ergibt sich schliesslich aus dem über die Convexität und Concavität der Curven Mitgetheilten.

Fig. 79



Beispiele.

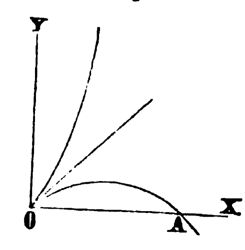
1) Ist



$$y = x \pm \sqrt{x^3}$$

die Gleichung einer Curve, so nimmt y für $x = 0$ nur den Werth 0, dagegen für $x = 0 + h$ stets zwei reelle und für $x = 0 - h$ zwei imaginäre Werthe an, der Punkt $x = 0, y = 0$ ist somit ein Rückkehrpunkt.

Fig. 80.



Um nun die Art desselben zu ermitteln, bilden wir $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{x}}$ und setzen hierin $x = 0 + h$. Es resultirt alsdann $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{3}{4\sqrt{h}}$ und nach §. 67 kehrt somit in der Nähe des Rückkehrpunktes der eine Ast die convexe, der andere die concave Seite der Abscissenachse zu. Der Punkt $x = 0, y = 0$ ist also ein Rückkehrpunkt der **ersten** Art und weil für $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 1$ wird, so halbirt die gemeinschaftliche Tangente den Coordinatenwinkel. Da für $x = 1$, $x - \sqrt{x^3} = 0$ wird, so schneidet der untere Ast die Abscissenachse in der Entfernung $OA = 1$. Der Lauf der Curve ist durch Fig. 80 dargestellt.

2) Es sei

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^5}$$

die Gleichung der Curve.

Wie vorhin überzeugt man sich leicht, dass $x = 0, y = 0$ ein Rückkehrpunkt ist.

Entwickelt man nun

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}\,;\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}$$

und setzt in diesem Ausdrucke $x = 0 + h$, so geht aus $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4}$

hervor, dass in der Nähe des Punktes $x = 0$, $y = 0$ beide Curvenäste gegen die Abscissenachse convex sind, dieser Punkt also ein Rückkehrpunkt der zweiten Art ist. Eine weitere Untersuchung zeigt, dass der untere Ast für $x = \frac{64}{225}$ einen Wendepunkt hat, in $x = 1$ die Abscissenachse schneidet u. s. w. (Fig. 81).

Fig. 81.

3) Es sei

$$y = \varphi(x) + k(x - a)^{\frac{m}{2n}} \psi(x)$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ eindeutige Functionen von x sind und der auf die kleinste Benennung gebrachte positive Ausdruck $\frac{m}{2n} > 1$ ist.

Die Curve besteht wegen des Doppelwerthes von $(x - a)^{\frac{m}{2n}}$ im Allgemeinen aus zwei Aesten und zwar erhält man für jedes $x > a$ zwei reelle Werthe von y für beide Aeste, für $x = a$ wird $y = \varphi(a)$ für jeden Ast und für $x < a$, nimmt y für beide Aeste zwei imaginäre Werthe an.

Die zwei Aeste gehen somit von dem Punkte $x = a$, $y = \varphi(a)$ aus und es bleibt nun noch zu untersuchen, ob derselbe ein Rückkehrpunkt ist.

Entwickeln wir zu diesem Ende

$$y' = \varphi'(x) + k\left[(x - a)^{\frac{m}{2n}} \psi'(x) + \frac{m}{2n}(x - a)^{\frac{m}{2n} - 1} \psi(x)\right]$$

$$y'' = \varphi''(x) + k\left[(x - a)^{\frac{m}{2n}} \psi''(x) + \frac{m}{n}(x - a)^{\frac{m}{2n} - 1} \psi'(x) + \frac{m}{2n}\left(\frac{m}{2n} - 1\right)(x - a)^{\frac{m}{2n} - 2} \psi(x)\right]$$

so ersieht man hieraus, dass, wenn $x = a$ gesetzt wird, für beide Aeste $y' = \varphi'(a)$ resultirt, beide Aeste also im Punkte $x = a$, $y = \varphi(a)$ eine gemeinschaftliche Tangente haben und dieser Punkt somit ein Rückkehrpunkt sein muss. Um die Gattung desselben zu ermitteln, führen wir $x = a$ in den Ausdruck von y'' ein. Nehmen wir zunächst an, es sei $\frac{m}{2n} > 2$, so wird $y'' = \varphi''(a)$ und wenn $\varphi''(a)$ von Null verschieden vorausgesetzt wird, so hat y'' für beide Aeste einerlei Zeichen und es ist somit in diesem Falle x — - ·· $= \varphi(a)$ ein Rückkehrpunkt der zweiten Art.

...nen wir aber $\frac{m}{2n} < 2$ an, so wird für $x = a$, $y'' = \infty$ für beide A... ...tzen wir nun $a + h$ statt x, wo h unendlich klein, so übertrifft d... $\frac{m}{n}\left(\frac{m}{2n} - 1\right) h^{\frac{m}{2n} - 2}$ die Summe aller übrigen Glieder, indem $\frac{n}{2}$ ... — 1 positiv sind, während $\frac{m}{2n} - 2$ negativ ist. Es liefert

somit y'' für $x = a + h$ für beide Aeste Werthe von verschiedenen Zeichen und in diesem Falle ist demnach der Punkt $x = a$, $y = \varphi(a)$ ein Rückkehrpunkt der ersten Art.

4) Nach §. 72, Beisp. 1 ist, wenn $\frac{2}{27p} = m$ gesetzt wird,

$$y^2 = m\,(2x - p)^3 = 8m\left(x - \frac{p}{2}\right)^3$$

oder

$$y = \sqrt{8m}\,\left(x - \frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = k\left(x - \frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

die Gleichung der Evolute einer Parabel. Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung der vorhergehenden Aufgabe, so hat man

$$\varphi(x) = 0\ ;\ a = \frac{p}{2}\ ;\ \frac{m}{2n} = \frac{3}{2}\ ;\ \psi(x) = 1$$

zu setzen, und da nun $\frac{m}{2n} < 2$, so ist der Punkt $x = \frac{p}{2}$, $y = 0$ ein Rückkehrpunkt der ersten Art.

c. Isolirte Punkte.

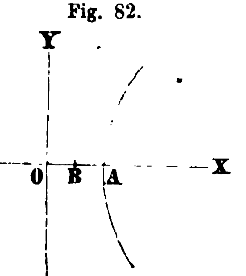
Hat ein Curvenpunkt die Eigenschaft, dass der von ihm aus mit unendlich kleinem Radius beschriebene Kreis der Curve in keinem Punkte begegnet, so heisst er ein isolirter, conjugirter oder beigeordneter Punkt.

Durch einen isolirten Punkt geht somit kein Ast der betreffenden Curve und wenn $x = a$, $y = b$ ein isolirter Punkt sein soll, so müssen die Werthe von y für $x + h$ und $x - h$, wo h unendlich klein, imaginär ausfallen.

Beispiel.

Es sei
$$y = \pm (x - 2)\sqrt{x - 4}$$
die Gleichung einer Curve. Dieselbe liefert für $x = 4$, $y = 0$ und für alle aufeinander folgenden Werthe von $x = 4$ bis $x = +\infty$ je eine positive und eine negative Ordinate. Ist somit (Fig. 82) $OA = 4$, so erstreckt sich die Curve von A aus oberhalb und unterhalb der Abscissenachse bis ins Unendliche.

Fig. 82.



Für alle Werthe von $x = 4$ bis $x = -\infty$ mit Ausnahme des einzigen Werthes $x = 2$, wofür $y = 0$ wird, fällt y imaginär aus. Ist daher $OB = 2$, so liegt in der Nähe [illegible]ses Punktes B kein Curvenpunkt mehr [illegible]es ist somit der Punkt $x = 2$, $y =$ [illegible]in isolirter Punkt.

d. Grenzpunkte.

Schneidet der von einem Curvenpunkte aus mit unendlich kle[illegible]em Radius beschriebene Kreis die Curve nur in einem Punkte, so h[illegible]sst

jener Punkt **Grenzpunkt**. In einem Grenzpunkte hört somit der Lauf einer Curve plötzlich auf.

Beispiel.

Ist
$$y = e^{\frac{1}{x}}$$
die Gleichung einer Curve, so erhält man zunächst für $x = 0$, $y = \infty$ und wenn man nun x von 0 bis ∞ wachsen lässt, so nimmt gleichzeitig y von ∞ bis 1 ab, woraus hervorgeht, dass $y = 1$ oder wenn $OA = 1$, die zur XAchse parallele AB, sowie die Ordinatenachse Asymptoten an den im ersten Quadranten liegenden Curventheil CDF (Fig. 83) sind.

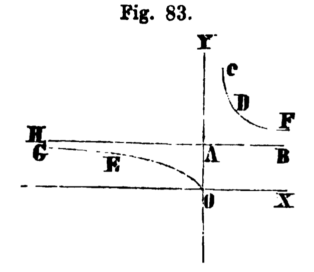


Fig. 83.

Lässt man nun x abnehmen von $x = -0$ bis $x = -\infty$, also $\frac{1}{x}$ wachsen von $-\infty$ bis 0, so wächst $e^{\frac{1}{x}}$ von 0 bis 1.

Wir erhalten hiernach einen zweiten Ast OEG, der plötzlich im Anfangspunkte der Coordinaten aufhört und die Gerade $y = 1$ oder HB ebenfalls zur Asymptote hat; O ist somit ein Grenzpunkt dieses Astes. Da $y = \infty$ oder 0 ist, je nachdem $x = +0$ oder -0 gesetzt wird, so ist die Ordinate für $x = 0$ unstetig und macht hier einen Sprung von $+\infty$ auf 0.

e. Vorspringende Punkte oder Spitzen.

Einen Curvenpunkt nennen wir eine **Spitze**, wenn der von ihm aus mit unendlich kleinem Halbmesser beschriebene Kreis die Curve in zwei Punkten schneidet, der diesen entsprechende Centriwinkel aber vom Nullwinkel und gestreckten Winkel um einen endlichen Werth verschieden ist. In der Spitze treffen hiernach zwei Curvenäste einander in der Weise, dass jedem derselben in diesem Punkte eine besondere Tangente entspricht.

Beispiel.

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$
d ... ene Curvengleichung. Da für $x = 0$, $y = 0$ wird, so ist der ... ein Curvenpunkt.

... die Tangente in diesem Punkte zu bestimmen, berücksichtige ... $\frac{dy}{x} = \lim \frac{y}{x}$ für abnehmende x und y ist. Man hat aber

je nachdem man x positiv oder negativ setzt und dann in Null übergehen lässt,

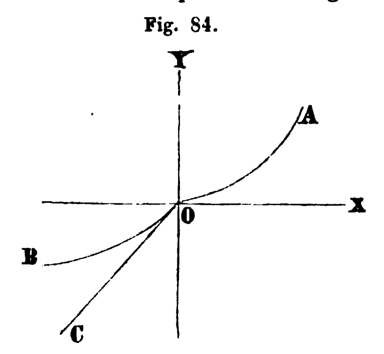


Fig. 84.

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = 0$$

und

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+e^{-\infty}} = 1$$

Der Ast OA (Fig. 84) im ersten Quadranten berührt somit die Abscissenachse, der Ast OB im dritten Quadranten dagegen die den betreffenden Coordinatenwinkel halbirende Gerade OC. Der Ursprung O ist somit eine Spitze der Curve.

§. 75. Allgemeine Bestimmung der besonderen Punkte einer Curve.

1) Betrachten wir hier nur Gleichungen von der Form:

$$f(x, y) = l + ax + by + \frac{1}{1.2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}(A_1x^3 + 3B_1x^2y + 3C_1xy^2 + D_1y^3) + \ldots = 0,$$

wo der Ausdruck $f(x, y)$ als ein geschlossener erscheint, so ist nach der Maclaurin'schen Reihe *):

$$f = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 y + \frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 x^2\right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right] + \frac{1}{1.2.3}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 x^3 + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}\right)_0 x^2 y\right.$$

$$\left. + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 xy^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 y^3\right] + \ldots$$

also

$$l = f_0\,;\ a = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0;\ b = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0;$$

$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0;\ B = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0;\ C = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0;$$

$$A_1 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0;\ B_1 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_0;\ C_1 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0;\ D_1 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0$$

. . . .

*) Die Resultate bleiben auch noch richtig für den Fall, dass f, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, stetig sind.

2) Wir wollen nun zuerst zeigen, dass für jeden singulären Punkt einer Curve die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

erfüllt sein müssen.

Da diese Bedingungen für jedes beliebige Coordinatensystem erfüllt bleiben, wenn sie für irgend eines erfüllt sind*), so denken wir uns den Ursprung des Systemes in den zu betrachtenden Punkt verlegt.

In der Gleichung der Curve ist alsdann $l = 0$ zu setzen und dieselbe wird daher:

$$ax + by + \frac{1}{1.2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \ldots = 0.$$

Um nun obige Behauptung zu rechtfertigen, zeigen wir, dass, wenn nicht gleichzeitig

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = a = 0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = b = 0,$$

der Punkt $x = 0$, $y = 0$ kein besonderer Punkt sein kann.

Zur weiteren Vereinfachung obiger Gleichung drehen wir die Coordinatenachsen um den festen Anfangspunkt so, dass die Gerade $ax + by = 0$ als neue Abscissenachse erscheint; dadurch behält obige Gleichung dieselbe Form, nur wird $a = 0$.

Wir nehmen daher als die zu betrachtende Gleichung:

$$by + \frac{1}{1.2}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \frac{1}{1.2.3}(A_1x^3 + 3B_1x^2y + 3C_1xy^2 + D_1y^3) + \ldots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo b von Null verschieden ist und zeigen, dass der Anfangspunkt kein singulärer Punkt sein kann. Setzen wir zu diesem Ende $y = \lambda x^2$, so folgt aus (1):

---

*) Um dieses nachzuweisen, seien x, y die Coordinaten eines Punktes auf ein rechtwinkliges, ξ, η die desselben Punktes auf ein beliebiges anderes System bezogen und nach E. P. §. 8

$$x = a\xi + b\eta + c; y = a_1\xi + b_1\eta + c_1$$

also $$f(x, y) = f(a\xi + b\eta + c, a_1\xi + b_1\eta + c_1) = \varphi(\xi, \eta) = 0$$

die Gleichung bezüglich des neuen Systemes.

Man hat alsdann, wegen $\varphi(\xi, \eta) = f(x, y)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = a\frac{\partial f}{\partial x} + a_1\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = b\frac{\partial f}{\partial x} + b_1\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

und $\frac{\partial f}{\partial y}$ nicht gleichzeitig Null, so findet dieses auch bei jedem anderen

Syst

Denn wäre $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$, so müsste nach dem oben Ge-

sagt $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sein.

$$b\lambda + \frac{A}{2} + x\left(B\lambda + \frac{A_1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\right) + x^2\left(\frac{C\lambda^2}{1 \,.\, 2} + \frac{B_1\lambda}{1 \,.\, 2} + \frac{A_2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\right)$$
$$+ x^3\left(\frac{C_1\lambda^2}{1 \,.\, 2} + \frac{B_2\lambda}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{A_3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} + \ldots\right) = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

Da wir die Curve in unmittelbarer Nähe des Anfangspunktes kennen lernen wollen, so ist x sehr klein, aber nicht Null, daher muss auch $b\lambda + \frac{A}{2}$ sehr klein oder λ nahezu gleich $-\frac{A}{2b}$ sein.

Setzt man nun in (2) $\lambda = -\frac{A}{2b}$, so erhält man, nachdem durch x dividirt ist, zur Bestimmung etwaiger reellen Werthe von x, die entsprechende Gleichung. Die Anzahl derjenigen x, für welche λ einen Werth hat, welcher $-\frac{A}{2b}$ unendlich nahe liegt, ist daher endlich. Nimmt man deshalb $[x]$ kleiner als den Absolutwerth der kleinsten dieser Abscissen, so kann aus obiger Gleichung für λ kein Werth folgen, welcher $-\frac{A}{2b}$ unendlich nahe liegt.

Setzen wir nun $b\lambda + \frac{A}{2} = \pm\,\varepsilon$, wo ε beliebig klein, also

$$\lambda = -\frac{A}{2b} \pm \frac{\varepsilon}{b}$$

und geben dem λ alle möglichen Werthe, die zwischen $-\frac{A}{2b} - \frac{\varepsilon}{b} = K$ und $-\frac{A}{2b} + \frac{\varepsilon}{b} = G$ liegen, nur den Werth $-\frac{A}{2b}$ und die diesem unendlich nahe liegenden nicht, so sei in (2) für einen beliebigen solchen Werth von λ, g der absolut grösste der Coefficienten von x, x^2, x^3, ...

Wählt man dann

$$[x] < \frac{\left[b\lambda + \frac{A}{2}\right]}{\left[b\lambda + \frac{A}{2}\right] + g}$$

so wird nach §. 4 das Zeichen von $b\lambda + \frac{A}{2}$ das Zeichen (2) bestimmen. Ist nun δ der kleinste Werth, welchen

$$\frac{\left[b\lambda + \frac{A}{2}\right]}{\left[b\lambda + \frac{A}{2}\right] + g}$$

annimmt, wenn λ alle Werthe beigelegt werden, welche zwischen K und G liegen, nur die nicht, welche $-\frac{A}{2b}$ unendlich nahe kommen, so ist δ nicht unendlich klein und wenn man also $[x] < \delta$ setzt, so wird das Zeichen von (2) durch das Zeichen von $b\lambda + \frac{A}{2}$ bestimmt. Betrachtet man dann x als constant und setzt das eine Mal $\lambda = G$, das andere Mal $\lambda = K$, so nimmt (2) verschiedene Vorzeichen an und es liegt somit zwischen obigen Grenzen **ein** und **nur** ein Werth von λ, der (2) genügt und zwar sowohl für ein positives als für ein negatives x*).

Es gibt daher, wenn $[x] < \delta$, sowohl für ein positives als für ein negatives x **nur** einen Punkt $x = x_1$, $y = \lambda x_1^2$ der Curve, wo λ dem $-\frac{A}{2b}$ sehr nahe liegt und passend bestimmt wird. Eine Parallele mit der YAchse schneidet demnach die Curve in unmittelbarer Nähe vom Anfangspunkte immer **nur** in **einem** Punkte.

Sagen wir dafür, die Curve falle in unmittelbarer Nähe des Ursprunges mit der Parabel $y = -\frac{A}{2b}x^2$ zusammen, so schliessen wir hieraus, dass die XAchse eine Tangente an die Curve ist und hiernach der Anfangspunkt **kein** singulärer Punkt sein kann.

Dieser Schluss ist aber nur dann möglich, wenn $A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0$ nicht Null ist.

Ist
$$A = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 = 0,$$
so geht die Gleichung unserer Curve über in:
$$by + \frac{1}{1\,.\,2}(2Bxy + Cy^2) + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}(A_1x^3 + 3B_1x^2y + 3C_1xy^2 + D_1y^3) + \ldots = 0$$
Setzt man nun hierin
$$y = \lambda x^3,$$
so resultirt:
$$[illegible] + \frac{A_1}{3\,!} + \left(B\lambda + \frac{A_2}{4\,!}\right)x + \left(\frac{B_1\lambda}{2!} + \frac{A_3}{5\,!}\right)x^2 + \left(\frac{C\lambda^2}{2\,!} + \frac{B_2\lambda}{3!} + \frac{A_4}{6\,!}\right)x^3 + \ldots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

[illegible] nur einen Werth von λ gibt, folgt daraus, dass $b\lambda + \frac{A}{2}$ nur einmal [illegible]ert, wenn λ von K bis G variirt.

Durch eine Beweisführung, welche der vorigen vollkommen analog ist, zeigt man nun, dass für jedes gehörig kleine, sowohl positive als negative x, es einen und nur einen Werth von λ gibt, der sehr nahe dem Werthe $-\frac{A_1}{3!\,b}$ kommt, und der Gleichung (3) genügt, oder mit anderen Worten: dass die betreffende Curve in unmittelbarer Nähe vom Anfangspunkte sowohl rechts als links mit der Parabel

$$y = -\frac{A_1}{6b}x^3$$

zusammenfällt. Hieraus folgt alsdann, dass die XAchse eine Tangente an die Curve und der Anfangspunkt insbesondere ein Wendepunkt ist. Dieser Schluss ist aber nur dann erlaubt, wenn A_1 nicht gleich Null ist. Ist $A_1 = 0$, so setze man $y = \lambda x^4$ und verfahre wie vorhin. Man findet auch nun u. s. f. in allen anderen Ausnahmefällen, dass der Punkt $(0\,,0)$ einem gewöhnlichen Punkte entspricht.

Wir schliessen hieraus, dass

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

nothwendige, wenn auch nicht genügende Bedingungsgleichungen sind, damit der Punkt $(x\,,y)$ ein singulärer sei.

Anmerk. Für homogene Coordinaten sind

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

die entsprechenden Bedingungen.

3) Verlegen wir nun den Anfangspunkt der Coordinaten in denjenigen Punkt der Curve, für welchen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,,$$

so geht die Curvengleichung nach der Maclaurin'schen Reihe über in:

$$f(x\,,y) = \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right]$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_\Theta x^3 + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_\Theta x^2 y + 3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\right)_\Theta xy^2 + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_\Theta y^3\right] + \ldots = 0$$

oder in

$$\frac{1}{2!}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) + \frac{1}{3!}(x^3\varphi_0 + 3x^2y\varphi_1 + 3xy^2\varphi_2 + y^3\varphi_3) + \ldots = 0 \quad \ldots \quad)$$

wo $\varphi_0\,,\varphi_1\,,\varphi_2\,,\varphi_3$ stetige Functionen von x und y bedeuten.

Wir setzen nun zunächst voraus, dass nicht gleichzeitig

$$A = 0\,,\ B = 0\,,\ C = 0$$

seien, und betrachten die einzelnen hier möglichen Fälle der Reihe nach.

1. Fall. Es sei $AC - B^2$ positiv oder

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0^2 > 0.$$

Da in diesem Falle der Ausdruck $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ nur Null werden kann, wenn $x = 0$, $y = 0$ ist, und derselbe für hinreichend kleine x und y absolut genommen grösser als $[R_3]$ wird, also das betreffende Glied das Zeichen der linken Seite der Gl. (4) bestimmt, so nimmt (4), man mag x und y so klein wählen, als man nur will, immer das Zeichen von A und C an, welche beide nicht Null sind. In der Nähe unseres Punktes gibt es somit keinen weiteren Curvenpunkt und derselbe ist daher ein isolirter Punkt.

2. Fall. Es sei $AC - B^2$ negativ oder

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)_0^2 < 0.$$

Bringt man in diesem Falle den Ausdruck $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ auf die Form $C(y - px)(y - qx)$ und wählt die Linie

$$y - px = 0$$

zur Abscissenachse, so nimmt die Gleichung der Curve, nachdem man durch den Factor von y^2 dividirt hat, die Form an:

$$\begin{gathered} y\,(y - rx) + A_1x^3 + 3B_1x^2y + 3C_1xy^2 + D_1y^3 + \\ A_2x^4 + 4B_2x^3y + 6C_2x^2y^2 + 4D_2xy^3 + E_2y^4 + \\ A_3x^5 + 5B_3x^4y + 10C_3x^3y^2 + 10D_3x^2y^3 + 5E_3xy^4 + F_3y^5 + \ldots = 0 \end{gathered}$$

Setzt man hierin

$$y = \lambda x^2$$

so folgt:

$$\begin{gathered} A_1 - \lambda r + (\lambda^2 + 3B_1\lambda + A_2)\, x + (3C_1\lambda^2 + 4B_2\lambda + A_3)\, x^2 \\ + (D_1\lambda^3 + 6C_2\lambda^2 + 5B_3\lambda + A_4)\, x^3 + \ldots = 0 \quad . \; . \quad (5) \end{gathered}$$

Auf analoge Weise wie früher lässt sich nun zeigen, dass für jedes hinreichend kleine, positive oder negative x, es immer einen und nur einen Werth von λ gibt, welcher sehr nahe an $\frac{A_1}{r}$ liegt und für welchen die Gl. (5) befriedigt wird, oder mit anderen Worten, dass die Curve in [illegible]lbarer Nähe unserer XAchse mit der Parabel $y = \frac{A_1}{r} x^2$ üb[illegible]nmt, also diese Achse eine Tangente an dieselbe ist.

[illegible] ebenso lässt sich nachweisen, dass wenn man die Gerade

$$y - qx = 0$$

als [illegible]achse wählt, auch diese eine Tangente an die Curve sein mu[illegible]

Der in Rede stehende Punkt ist somit nothwendig ein **Doppelpunkt.**

Wird $A_1 = 0$, so ist obiger Schluss nicht richtig. In diesem Falle setze man

$$y = \lambda x^3,$$

so lassen sich aus der resultirenden Gleichung

$$A_2 - \lambda r + (3B_1\lambda + A_3)\,x + (\lambda^2 + 4B_2\lambda + A_4)\,x^2 + \ldots = 0$$

wieder dieselben Schlüsse ziehen, wie früher. Die Abscissenachse ist hier zugleich eine Wendetangente und die Curve stimmt in unmittelbarer Nähe des Anfangspunktes mit der Parabel $y = \frac{A_2}{r}\,x^3$ überein.

Ist $A_2 = 0$, so setze man

$$y = \lambda x^4.$$

Auch in diesem Falle ergibt sich dasselbe Resultat wie vorhin.

Ist daher $AC - B^2$ negativ, so ist der Punkt $x = 0, y = 0$ unter allen Umständen ein **Doppelpunkt.**

3. **Fall.** Es sei $AC - B^2 = 0$

oder

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0^2 = 0.$$

In diesem Falle lässt sich $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ auf die Form $C\,(y - px)^2$ bringen und wenn man nun die Gerade

$$y - px = 0$$

zur XAchse wählt, so nimmt, nachdem durch den Coefficienten von y^2 dividirt ist, die Curvengleichung die Form an:

$$y^2 + A_1x^3 + 3B_1x^2y + 3C_1xy^2 + D_1y^3 +$$
$$A_2x^4 + 4B_2x^3y + 6C_2x^2y^2 + 4D_2xy^3 + E_2y^4 + A_3x^5 +$$
$$5B_3x^4y + \ldots = 0.$$

Setzt man hierin

$$y^2 = \lambda x^3,$$

so findet man, analog wie vorhin, dass die Curve in unmittelbarer Nähe des Ursprunges mit der Parabel $y^2 = -A_1x^3$ zusammenfällt, woraus wir folgern, dass der fragliche Punkt ein **Rückkehrpunkt der ersten Art** sei, wenn $A_1 = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0$ nicht Null ist.

Um den Werth von $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0$ bei Zugrundelegung eines bel[illegible]gen Achsensystemes zu ermitteln, sei φ der Winkel, den die Ta[illegible] in dem betrachteten Punkte mit der alten Abscissenachse bildet [illegible]

$$tg\,\varphi = t;$$

ferner seien ξ und η die Coordinaten in Bezug auf die Tangente, hat man allgemein

$$x = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi + c = a\xi - b\eta + c$$
$$y = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi + d = b\xi + a\eta + d$$
$$f(x, y) = f(a\xi - b\eta + c, b\xi + a\eta + d) = \psi(\xi, \eta)$$

und hiernach

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{\partial f}{\partial\xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{d\xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\xi}$$
$$= a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} = a\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) + b\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$
$$= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^3\psi}{\partial\xi^3} = a^2\left(a\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + b\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right) + 2ab\left(a\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + b\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)$$
$$+ b^2\left(a\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + b\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)$$
$$= a^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3a^2b\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3ab^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + b^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$
$$= a^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3t\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3t^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + t^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)$$

welchen Ausdruck man also für $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0$ zu setzen hat.

Ist demnach für ein beliebiges Coordinatensystem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

aber $$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_{x,y} + 3t\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\right)_{x,y} + 3t^2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\right)_{x,y} + t^3\left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_{x,y} \text{ nicht Null,}$$

wo $$t = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

so hat man einen **Rückkehrpunkt der ersten Art***).

---

*) ...ss das Zeichen des Ausdruckes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2$$

...ysteme unabhängig ist und auch für jede Coordinatenannahme gleichzeitig ...wird, ergibt sich wie folgt:

$$f(x, y) = \varphi(\xi, \eta)$$

... $= a\xi + b\eta + c$; $y = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma$, und bekanntlich $a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$, ... man:

Für den Fall, dass sowohl

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = 0$$

als auch $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right)_0 + 3t \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 + 3t^2 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 + t^3 \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 = 0$

gelangt man nach einer der vorigen analogen Entwickelung zu dem Resultate, dass die Frage durch die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\frac{C}{2!}\lambda^2 + \frac{1}{2!}(B_1 + 2C_1 t + D_1 t^2)\,\lambda + \frac{1}{4!}(A_2 + 4B_2 t + 6C_2 t^2 + 4D_2 t^3 + E_2 t^4) = 0$$

entschieden wird. Sind die Wurzeln derselben imaginär, so ist der betreffende Punkt ein isolirter; sind beide Wurzeln reell und ungleich, so ist er ein Doppelpunkt, in welchem sich zwei Curvenäste berühren; sind beide Wurzeln einander gleich, so ist der Punkt im Allgemeinen ein Rückkehrpunkt der zweiten Art. In diesem Falle können aber Ausnahmsfälle vorkommen, deren Berücksichtigung uns jedoch hier zu weit führen würde.

4) Wird vorausgesetzt, dass gleichzeitig die drei partiellen Differentialquotienten verschwinden, also

$$A = B = C = 0$$

seien, so lässt sich die entsprechende Untersuchung ganz analog wie bei dem vorigen Falle durchführen, nur wird jetzt die Anzahl der besonders zu betrachtenden Fälle eine grössere.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = a\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial y}\,;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = b\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi\,\partial \eta} = a\left(b\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right) + \alpha\left(b\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \beta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$= ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (a\beta + b\alpha)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

folglich

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)^2 =$$

$$\left(a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \alpha^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left(b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b\beta\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) -$$

$$\left[ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (a\beta + b\alpha)\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]^2 =$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right](a\beta - b\alpha)^2$$

woraus hervorgeht, dass $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi\,\partial \eta}\right)^2$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2$ stets e[illegible] Zeichen haben und zugleich verschwinden.

5) Sind allgemein für den Punkt x_0, y_0 einer Curve alle partiellen Differentialquotienten von f bis einschliesslich derjenigen von der $(n-1)$ten Ordnung Null, so beginnt die Curvengleichung mit

$$\frac{x^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)^n + \ldots$$

Hat nun die symbolische Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)^n = 0$$

n reelle ungleiche Wurzeln, so ist jener Punkt ein $n$facher, es schneiden einander in demselben n Zweige und die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die n Berührenden des Punktes mit der XAchse bilden, sind die Wurzeln obiger Gleichung.

Damit ein Punkt ein $n$facher sei, ist daher eine nothwendige, aber nicht genügende Bedingung, dass alle Differentialquotienten, welche von einer niederigeren als der $n$ten Ordnung sind, für diesen Punkt verschwinden.

6) Beschränkt man sich auf die einfacheren Fälle, so genügt also zur Auffindung der singulären Punkte folgende Regel:

a) Man suche alle Systeme der Werthe von x und y, welche gleichzeitig den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0\,;\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0\,;\ f = 0$$

genügen, so können die entsprechenden Punkte singuläre Punkte sein.

b) Man bestimme nun für jeden dieser Punkte die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 t + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 t^2 = 0$$

so liefern:

α) zwei imaginäre Wurzeln einen isolirten Punkt,

β) zwei reelle ungleiche Wurzeln einen Doppelpunkt.

γ) Werden beide Wurzeln gleich, so führe man den betreffenden Werth statt t in den symbolischen Ausdruck $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3$ ein.

d dieser dadurch nicht Null, so ist der entsprechende Punkt Rückkehrpunkt der ersten Art, verschwindet er aber, so er-le man die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\left(\frac{\partial [illegible]}{\partial [illegible]}\right) [illegible] + \left[\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}\right)_0 t + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right)_0 t^2\right]\lambda + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,t\right)^4 = 0$$

las letzte Glied natürlich symbolisch zu nehmen ist.

Es deuten alsdann an:

α') zwei imaginäre Wurzeln einen isolirten Punkt,

β') zwei reelle ungleiche Wurzeln einen Doppelpunkt, in welchem zwei Aeste eine gemeinschaftliche Tangente haben,

γ') zwei reelle gleiche Wurzeln im Allgemeinen einen Rückkehrpunkt der zweiten Art. In speciellen Fällen kann jedoch hier der Punkt auch ein Rückkehrpunkt der ersten Art sein, oder aber die Regel auch eine Ausnahme erleiden. Der Punkt ist aber stets ein Doppelpunkt oder isolirter Punkt, wenn er nicht ein Rückkehrpunkt ist.

Beispiele.

1) Ist
$$f(x, y) = y^2 - x(x+1)^2 = 0$$
die Gleichung einer Curve, so wird
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 - 4x - 1\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x - 4\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$
Aus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ergeben sich als Werthe, welche der Curvengleichung entsprechen: $x = -1$, $y = 0$ und dafür wird
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4$$
also positiv, somit ist $x = -1$, $y = 0$ ein isolirter Punkt.

2) Es sei
$$y^4 + x^4 - a^2(x^2 + y^2 + xy) = 0$$
die gegebene Curvengleichung.

Bildet man
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2a^2x - a^2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 2a^2y - a^2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2a^2\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -a^2\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 2a^2,$$
so findet man zunächst aus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ als zusammengehörig und der Gleichung genügend die Werthe $x = 0$, $y = 0$. Dafür wird aber
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 3a^4$$
also positiv und somit ist $x = 0$, $y = 0$ ein isolirter Punkt.

3) Die gegebene Curvengleichung sei
$$y^2 - x^3 = 0.$$
Hieraus folgt:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

und da den Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ und $y^2 - x^3 = 0$ nur die zusammengehörigen Werthe $x = 0$, $y = 0$ genügen, dafür aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$$

wird, so ist $x = 0$, $y = 0$ ein Rückkehrpunkt der ersten Art.

Um nun noch zu prüfen, ob die oben ausgesprochene Bedingung, dass

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3t \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3t^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} + t^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

nicht Null sei, erfüllt ist, führen wir für den Differentialquotienten die betreffenden Werthe und weil $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$ für $x = 0$ gleich Null wird, für t den Werth 0 ein, so erhält man -6.

4) Ist

$$(y - x)^2 - x^3 = 0$$

die vorgelegte Gleichung, so hat man

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2(y - x) - 3x^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y - x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - 6x\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -2\,; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Aus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ergeben sich nur $x = 0$, $y = 0$ als zusammengehörige Werthe, welche der Gleichung genügen und wofür

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 0$$

wird. Es ist daher $x = 0$, $y = 0$ ein Rückkehrpunkt der ersten Art, da $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + t \frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^3 = -6$ wird, weil $t = 0$ und $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -6$ ist.

5) Nach der Anmerkung zu Beispiel 2 im §. 72 ist

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

die Gleichung der Evolute einer Ellipse. Um nun dieselbe auf singuläre Punkte zu untersuchen, erheben wir beide Seiten zur dritten Potenz und erhalten

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 + 3\left(\frac{xy}{a_1 b_1}\right)^{\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{x}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b_1}\right)^{\frac{2}{3}}\right] = 1$$

o

$$\left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 + 3\left(\frac{xy}{a_1 b_1}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

ıgt

$$27\left(\frac{xy}{a_1 b_1}\right)^2 = \left[1 - \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{y}{b_1}\right)^2\right]^3$$

$$\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)^3 + \frac{27 x^2 y^2}{a_1^2 b_1^2} = 0.$$

Hiernach ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6}{a_1^2}\left[x\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)^2 + \frac{9}{b_1^2}xy^2\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6}{b_1^2}\left[y\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)^2 + \frac{9}{a_1^2}x^2y\right]$$

und da sämmtliche Differentialquotienten von f stetig sind, so erhält man die singulären Punkte durch die Gleichungen:

$$x\left[\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)^2 + \frac{9y^2}{b_1^2}\right] = 0$$

$$y\left[\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)^2 + \frac{9x^2}{a_1^2}\right] = 0.$$

Hieraus ergeben sich als zusammengehörig zunächst die reellen Werthe

$$x = 0\,,\, y = 0\,;\; x = 0\,,\, y = \pm b_1\,;\; x = \pm a_1\,,\, y = 0$$

und wenn weiter noch den Gleichungen

$$\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)^2 + \frac{9y^2}{b_1^2} = 0$$

$$\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)^2 + \frac{9x^2}{a_1^2} = 0$$

reelle Werthe entsprechen sollen, so müssten die drei Gleichungen

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0\,,\, y = 0\,,\, x = 0$$

bestehen.

Da sich dieselben aber offenbar widersprechen und $x = 0\,, y = 0$ kein Curvenpunkt ist, so sind die singulären Punkte nur noch unter den vier Punkten

$$x = 0\,,\, y = \pm b_1\,;\; y = 0\,,\, x = \pm a_1$$

zu suchen.

Um nun die Natur dieser Punkte zu ermitteln, bestimmen wir

$$\frac{a_1^2}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{9}{b_1^2}y^2 + \left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)^2 + \frac{4x^2}{a_1^2}\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)$$

$$\frac{b_1^2}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9}{a_1^2}x^2 + \left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right) + \frac{4y^2}{b_1^2}\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)$$

$$\frac{a_1^2}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{18}{b_1^2}xy + \frac{4}{b_1^2}xy\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\right)$$

Da aber für jeden singulären Punkt die Beziehung besteht

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0$$

so gehen diese Gleichungen über in:

$$\frac{a_1^2}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{9}{b_1^2}y^2\,;\; \frac{b_1^2}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9}{a_1^2}x^2\,;\; \frac{a_1^2}{6}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{18}{b_1^2}x[illegible]$$

und es ist nun sowohl für $x = 0\,, y = \pm b$ als auch für $y = 0\,, x =$ [illegible] a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0,$$

woraus hervorgeht, dass die vier Punkte Rückkehrpunkte der [illegible]en Art sind.

6) Die Gleichung des Descart'schen Blattes ist

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

Bildet man hiernach:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax,$$

so ergeben sich aus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ die Werthe $x = 0$, $y = 0$ als zusammengehörig und der Curve entsprechend. Da nun für diesen Punkt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0 \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = -3a$$

wird, also

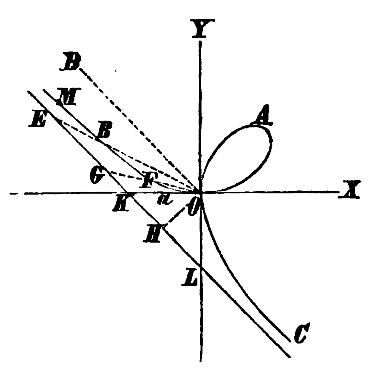
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2 = -9a^2$$

somit negativ ausfällt, so ist der Punkt $x = 0$, $y = 0$ ein Doppelpunkt.

Um den Lauf des Descart'schen Blattes näher zu ermitteln, berücksichtige man zunächst, dass wenn x positiv ist, y nur einen oder drei reelle Werthe hat, je nachdem $x^3 \gtrless 4a^3$, dagegen wenn x negativ ist, hat y stets nur einen reellen Werth.

Die Betrachtung über die Convexität und Concavität der Curve, liefert schliesslich den durch Fig. 85 dargestellten Lauf derselben.

Fig. 85.



Setzt man

$$\frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha \; ; \; \frac{1 - \sqrt{-3}}{2} = \beta$$

also $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = 1$,
so kann man statt der vorgelegten Gleichung auch schreiben

$$(y + x + a)(y - \alpha x - a\beta)(y - \beta x - a\alpha) - a^3 = 0$$

woraus nach der Theorie der Curven 3. Grades hervorgeht, dass

$$y + x + a = 0$$

eine Asymptote der Curve ist, welche die negativen Coordinatenhälften in den Abständen a vom Ursprunge schneidet.

Um auf einfachere Weise die Asymptote zu erkennen, denken wir uns da- ...dinatensystem um 45^0 gedreht. Sind ξ, η die Coordinaten des ne ...stemes, so wird

$$x = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}} \; ; \; y = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \; ; \; xy = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2}$$

u ...rgelegte Gleichung geht über in

$$\eta^2 = \frac{\xi^2}{3} \, \frac{3a - \xi\sqrt{2}}{\xi\sqrt{2} + a}$$

aus welcher Form man sofort erkennt, dass $\eta = \infty$ wird für

$$\xi = -\frac{a}{\sqrt{2}},$$

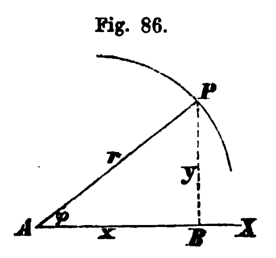
also $\xi = -\frac{a}{\sqrt{2}}$ eine Asymptote ist.

B. Für Polarcoordinaten.

§. 76. Allgemeine Formeln zur Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten in Polarcoordinaten und umgekehrt.

Zur Bestimmung der Lage eines Punktes P (Fig. 86) kann man sich bekanntlich statt des rechtwinkligen auch des Polarcoordinatensystemes bedienen. Beide Systeme stehen in einem gewissen Zusammenhange, welcher sich leicht durch Gleichungen ausdrücken lässt. Denn setzen wir den Radius vector $AP = r$, die Anomalie oder den Polarwinkel $PAX = \varphi$ und sind

Fig. 86.



$$AB = x\ ,\ PB = y$$

die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P, so hat man:

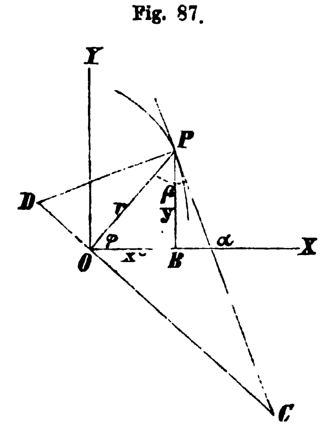
$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ tg\,\varphi = \frac{y}{x}\ ,\ \varphi = arc\ tg\ \frac{y}{x}$$

Hiernach kann man also eine auf rechtwinklige Coordinaten bezogene Curvengleichung in eine durch Polarcoordinaten ausgedrückte umwandeln, und umgekehrt.

§. 77. Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale.

Fig. 87.



Es sei P (Fig. 87) ein Punkt einer Curve, r und φ seien dessen Polarcoordinaten, $f(r\ ,\ \varphi) = 0$ die Polargleichung der betreffenden Curve und PC eine an diese im Punkte P gezogene Tangente. Errichtet man $PD \perp PC$ un[...]ieht durch den Pol O eine Se[...]hte DC zu OP, so heisst, ana[...] wie früher, OC die Pol[...]ibtangente, PD die Pola[...]ormale und OD die Pol[...]ibnormale des Punktes P.

Nun ist

$$OC = r\, tg\, OPC = r\, tg\, (\alpha - \varphi) = \frac{r\,(tg\,\alpha - tg\,\varphi)}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\varphi}$$

$$OD = r\, tg\, OPD = r \cot\, (\alpha - \varphi) = \frac{r\,(1 + tg\,\alpha\, tg\,\varphi)}{tg\,\alpha - tg\,\varphi}$$

oder wenn x, y die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes P in Bezug auf OX als Abscissenachse und O als Anfangspunkt bezeichnen, nach §. 9:

$$OC = \frac{r\left(\frac{dy}{dx} - tg\,\varphi\right)}{1 + \frac{dy}{dx}\, tg\,\varphi}\,;\quad OD = \frac{r\left(1 + \frac{dy}{dx}\, tg\,\varphi\right)}{\frac{dy}{dx} - tg\,\varphi}$$

Aus $\quad y = r \sin\varphi$ und $x = r \cos\varphi$

folgt aber, wenn man x, y, r als Functionen der unabhängig Veränderlichen φ ansieht,

$$\frac{dy}{d\varphi} = \sin\varphi\, \frac{dr}{d\varphi} + r\cos\varphi$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos\varphi\, \frac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi$$

und hiernach

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\sin\varphi\, \frac{dr}{d\varphi} + r\cos\varphi}{\cos\varphi\, \frac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Durch Einführung dieses Werthes in obige Ausdrücke erhält man:

$$\text{Subtangente } OC = \frac{r^2}{\frac{dr}{d\varphi}} = r^2\, \frac{d\varphi}{dr} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$\text{Subnormale } OD = \frac{dr}{d\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken OPC und OPD ergibt sich nun unmittelbar:

$$\text{Tangente } \quad PC = r\sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \quad \ldots \quad (3)$$

$$\text{Normale } \quad PD = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

..e Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten gegeben und den Winkel β bestimmen, welchen die Tangente PC eines .. P mit dem Radius vector r bildet, so setze man

$$\beta = \alpha - \varphi\,;\ tg\,\beta = \frac{tg\,\alpha - tg\,\varphi}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\varphi} = \frac{\frac{dy}{dx} - tg\,\varphi}{1 + \frac{dy}{dx}\, tg\,\varphi} = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}} = r\,\frac{d\varphi}{dr}$$

Anmerk. Die Subtangente wird als positiv oder negativ angesehen, je nachdem r mit wachsendem φ wächst oder abnimmt.

Beispiele.

1) Ist OB (Fig. 88) der Radius eines Kreises $BCDE$ und bewegt sich auf jenem, während er sich um O in dem Sinne $BCDE$ dreht, gleichzeitig der Punkt O so, dass die von ihm durchlaufenen Wege den vom Radius erzeugten Winkeln proportional sind, so beschreibt der Punkt eine krumme Linie $OFGBKL$, welche archimedische Spirale heisst.

Fig. 88.

Ist daher F irgend ein Punkt dieser Curve und sind $OF = r$, $\measuredangle FOB = \varphi$ dessen Polarcoordinaten, so folgt aus der Proportion

$$OF : OB = \text{Bog. } BC : \text{Periph. d. Kreises}$$

oder wenn man den Radius $OB = 1$ setzt, aus

$$r : 1 = \varphi : 2\pi$$

unmittelbar die entsprechende Polargleichung:

$$r = \frac{\varphi}{2\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Für den Punkt K wäre

$$r = \frac{2\pi + \varphi}{2\pi} = 1 + \frac{\varphi}{2\pi} \text{ u. s. w.}$$

Aus (1) folgt:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}$$

und es ist daher

$$\text{die Subtangente } = r^2\,\frac{d\varphi}{dr} = \left(\frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 2\pi$$

$$= \frac{\varphi^2}{2\pi} = r\varphi$$

$$\text{die Subnormale } = \frac{1}{2\pi}, \text{ also constant.}$$

Nach m Umdrehungen des Halbmessers ist also die Subtangente

$$= r\,.\,2m\pi = m\,.\,2\pi r.$$

Ferner wird

$$\text{die Tangente} = r\sqrt{1 + \varphi^2}$$

$$\text{die Normale} = \sqrt{r^2 + \frac{1}{4\pi^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

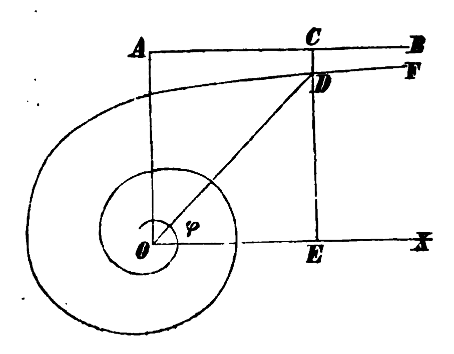
2) Aus der Gleichung der hyperbolischen Spirale

$$r\varphi = a\,;\ r = \frac{a}{\varphi}$$

folgt

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2}$$

Fig. 89.



und es ist daher

$$\text{die Subtangente} = -\frac{r^2\varphi^2}{a} = -a, \text{ also constant;}$$

$$\text{die Subnormale} = -\frac{a}{\varphi^2}\,;$$

$$\text{die Tangente} = r\sqrt{1 + \frac{r^2\varphi^4}{a^2}} = \frac{a}{\varphi}\sqrt{1 + \varphi^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + a^2}\,;$$

$$\text{die Normale} = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{\varphi^4}} = \frac{a}{\varphi^2}\sqrt{1 + \varphi^2}.$$

Anmerk. Führt man in die vorgelegte Gleichung der Reihe nach für φ alle Werthe von 0 bis ∞ ein, so ersieht man, dass r immer kleiner wird, die Curve also unendlich viele Windungen um den Pol O macht und sich diesem immer mehr und mehr nähert, so dass der Pol als asymptotischer Punkt erscheint. Zieht man ferner ⁾Y (Fig. 89), macht $AO = a$ und $AB \,//\, OX$, so hat man:

$$CD = a - y = a - r\sin\varphi = a\left(1 - \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right)$$

bei kleiner werdendem φ bekanntlich $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ sich der Grenze 1 nähert). 2), so ergibt sich hieraus, dass CD sich immer mehr der Null nähert, je er φ wird, also AB eine Asymptote zu dem sich in's Unendliche erstreckenden DF ist.

§. 78. Differentialquotient eines Bogens.

Für rechtwinklige Coordinaten ist nach §. 10 der Differentialquotient eines Bogens oder

$$\frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

führt man daher den Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus §. 77 (A) ein, so erhält man in Bezug auf Polarcoordinaten:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{dx}\,\frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}{-r\sin\varphi + \cos\varphi\,\frac{dr}{d\varphi}}\,(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)$$

woraus folgt:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$$

§. 79. Differentialquotient einer Fläche.

Es sei $r = f(\varphi)$ die Polargleichung einer Curve MN (Fig. 90 und 91), dem Polarwinkel φ_1 entspreche der Radius vector r_1 und die

Fig. 90.

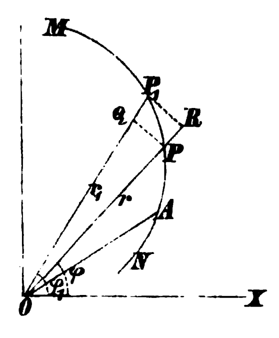
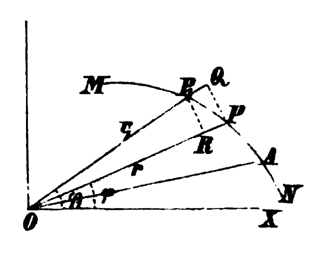


Fig. 91.



Aenderung OPP_1, welche das Flächenstück $OAP = u$ erleidet, nn φ in φ_1 oder r in r_1 übergeht $= u_1 - u$. Nun kann man offenba las Bogenelement PP_1 so klein annehmen, dass der Radius vector im Uebergange von der Lage OP in die OP_1 stets wächst (Fig. 90) ler stets abnimmt (Fig. 91), also wenn man von O aus die Kreisbog PQ und P_1R beschreibt, bezüglich

$$OP_1R \lessgtr OPP_1 \lessgtr OPQ$$

oder
$$\frac{r_1^2}{2}(\varphi_1 - \varphi) \lessgtr u_1 - u \lessgtr \frac{r^2}{2}(\varphi_1 - \varphi)$$

oder
$$\frac{r_1^2}{2} \lessgtr \frac{u_1 - u}{\varphi_1 - \varphi} \lessgtr \frac{r^2}{2}$$

wird. Nun rückt aber der Radius vector r_1 dem r hinsichtlich der Länge immer näher, je kleiner man $(\varphi_1 - \varphi)$ werden lässt. Für $(\varphi_1 - \varphi)$ unendlich klein hat man somit

$$\frac{du}{d\varphi} = lim\frac{u_1 - u}{\varphi_1 - \varphi} = \frac{r^2}{2} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Sind r und φ also auch u Functionen von t, so folgt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{dt} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Anmerk. Sind x und y, also auch r und φ Functionen irgend einer Variabeln t, so hat man

$$y^2\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{dt} = (r\sin\varphi)^2\frac{d\cot\varphi}{dt} = -r^2\frac{d\varphi}{dt}$$

oder nach (1), wenn man zugleich berücksichtigt, dass auch

$$\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{dt} = \frac{y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}}{y^2}$$

ist,

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = -2\frac{du}{dt}$$

woraus für $t = \varphi$ sich ergibt:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{d\varphi} - y\frac{dx}{d\varphi}\right)$$

§. 80. Krümmungshalbmesser.

Nach §. 71 ist für rechtwinklige Coordinaten der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \pm\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

[illegible] man hierin:

$$x = r\cos\varphi\,;\; y = r\sin\varphi,$$

[illegible] sich nach §. 46, Beispiel 5:

$$\varrho = \pm\frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

als Ausdruck für den **Krümmungshalbmesser in Polarcoordinaten.**

Für die rechtwinkligen Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes findet man leicht:

$$\alpha = \frac{r \cos\varphi \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right] - \sin\varphi\,\frac{dr}{d\varphi}\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

$$\beta = \frac{r \sin\varphi \left[\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}\right] + \cos\varphi\,\frac{dr}{d\varphi}\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right]}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\,\frac{d^2r}{d\varphi^2}}$$

Beispiele.

1) Setzen wir $\frac{1}{2\pi} = a$, so ist nach dem Beispiel zu §. 77

$$r = a\varphi$$

die Gleichung der **archimedischen Spirale.** Führt man nun

$$\frac{dr}{d\varphi} = a\,;\ \frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$$

in obigen Ausdruck ein, so folgt:

$$\varrho = \frac{a\,(\varphi^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2 + 2}$$

oder wenn man die Normale durch N bezeichnet,

$$\varrho = \frac{a\left(\frac{N}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{N}{a}\right)^2 + 1} = \frac{(aN)^{\frac{3}{2}}}{N^2 + a^2}$$

2) Aus der Gleichung $r = \frac{a}{\varphi}$ der hyperbolischen Spirale folgt unmittelbar:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a}{\varphi^2}\,;\ \frac{d^2r}{d\varphi^2} = \frac{2a}{\varphi^3}$$

daher:

$$\varrho = \frac{\left(r^2 + \frac{a^2}{\varphi^4}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + \frac{2a^2}{\varphi^4} - \frac{2ar}{\varphi^3}} = \frac{a}{\varphi^4}\,(1 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}$$

oder wenn man die Tangente des betreffenden Punktes durch T beze[ichn]et, nach §. 77, Beispiel 2:

$$\varrho = \frac{T^3}{a^2\varphi} = \frac{rT^3}{a^3}.$$

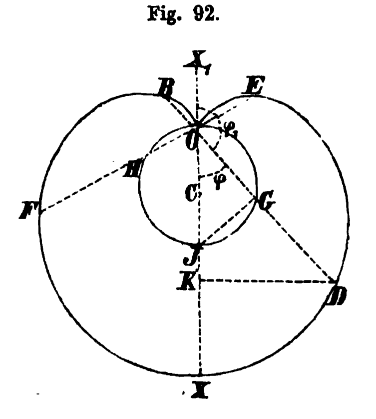
§. 81. **Aufgaben zur Uebung.**

1) Bezeichnet a den Halbmesser eines Kreises C (Fig. 92) und man zieht durch irgend einen Punkt O der Peripherie desselben beliebige Gerade $BD, EF, \ldots$ macht $GD = GB = HF = HE = 2a$, so bestimmen die Punkte

$O, E, D, F, \ldots$

eine Curve, welche **Cardioide** heisst.

Fig. 92.



Man soll nun die Gleichung dieser Curve in Bezug auf O als Anfangspunkt und OX als Abscissenachse herleiten, so wie hieraus die Eigenschaften derselben bezüglich des in gegenwärtigem Abschnitte Vorgetragenen näher untersuchen.

Aufl. 1) Gleichung: $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$.

2) Polargleichung: $r = 2a(1 + \cos\varphi)$.

3) Subtangente $= -\dfrac{2a(1 + \cos\varphi)^2}{\sin\varphi}$.

4) Subnormale $= -2a\sin\varphi$.

5) Tangente $= \dfrac{4a\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$.

6) Normale $= 4a\cos\dfrac{\varphi}{2}$.

7) Krümmungshalbmesser $= \dfrac{8}{3}a\cos\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{2}{3}$ Normale.

8) Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises

$$\alpha = \frac{4a}{3} + \frac{2a}{3}(1 - \cos\varphi)\cos\varphi$$

$$\beta = \frac{2a}{3}(1 - \cos\varphi)\sin\varphi.$$

... t $x = 0, y = 0$ ist ein Rückkehrpunkt der ersten Art.

...t. 1) Ist $OK = x$, $KD = y$, $OD = r$
so ... sich

$$r : x = 2a : r - 2a$$

al... $$2ax = r^2 - 2ar = x^2 + y^2 - 2a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

... ..er Pol, $OD = r$, $\measuredangle DOX = \varphi$, so ist $r = 2a\cos\varphi + 2a$.

$\dfrac{dr}{\cdot} = -2a\sin\varphi$; $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2} = -2a\cos\varphi$ u. s. w.

8) $x = r\cos\varphi = 2a\,(1 + \cos\varphi)\cos\varphi\;;\; y = 2a\,(1 + \cos\varphi)\sin\varphi;$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{(1 + 2\cos\varphi)\sin\varphi} = -\frac{\cos\varphi + \cos 2\varphi}{\sin\varphi + \sin 2\varphi} = -\,\mathrm{cotg}\,\frac{3\varphi}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3\,(1 + \cos\varphi)}{2a\,(1 + 2\cos\varphi)^3\sin^3\varphi} = -\frac{3}{8a}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}\,\sin^3\frac{3\varphi}{2}}.$$

Nun nach §. 80. α und β.

9) Nach §. 75.

Anmerk. Zählt man die Polarwinkel von AX_1 aus, so wird

$$\sin\varphi = \sin\varphi_1\;,\;\cos\varphi = -\cos\varphi_1$$

also

$$\alpha = \frac{4a}{3} - \frac{2a}{3}\,(1 + \cos\varphi_1)\cos\varphi_1$$

$$\beta = \frac{2a}{3}\,(1 + \cos\varphi_1)\sin\varphi_1,$$

oder wenn man $\frac{4a}{3} - \alpha = \alpha_1$ setzt,

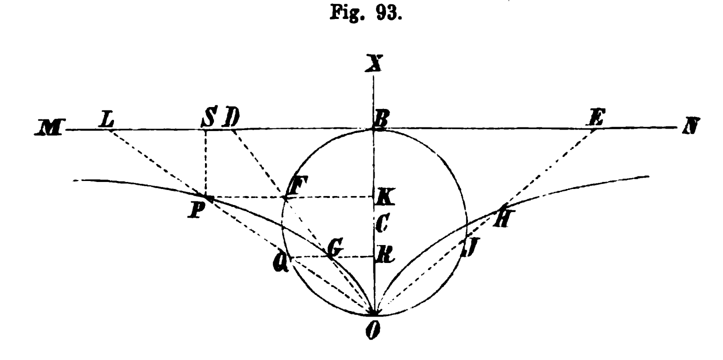
$$\alpha_1 = \frac{2a}{3}\,(1 + \cos\varphi_1)\cos\varphi_1$$

$$\beta = \frac{2a}{3}\,(1 + \cos\varphi_1)\sin\varphi_1.$$

Die Evolute der Cardioide ist somit wiederum eine Cardioide, deren erzeugender Kreis $\frac{a}{3}$ zum Halbmesser hat, deren Anfangspunkt um $\frac{4a}{3}$ von A entfernt in der Achse AX liegt und deren Drehungsrichtung entgegengesetzt ist der Drehungsrichtung der Evolvente.

2) Zieht man irgend einen Durchmesser OB (Fig. 93) eines Kreises C vom Halbmesser a, in B eine Tangente MN, dann von O aus nach

Fig. 93.



dieser Tangente beliebige Strecken OD, OE, ... und trägt auf OF nach DG, OI nach EH u. s. w., so bestimmen die kte O, G, H, ... eine Curve, welche Cissoide heisst.

Man soll diese Curve näher untersuchen, wenn O als Coord en-anfang und OB als Abscissenachse angenommen wird.

Aufl. 1) Gleichung: $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$.

2) Subtangente $= - \frac{x(2a - x)}{3a - x}$.

3) Subnormale $= \frac{x^2(3a - x)}{(2a - x)^2}$.

4) Tangente $= \frac{ax}{3a - x}\sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}}$.

5) Normale $= \frac{ax\sqrt{x(8a - 3x)}}{(2a - x)^2}$.

6) MN ist eine Asymptote.

7) Krümmungshalbmesser $= \frac{a}{3}\frac{\sqrt{x(8a - 3x)^3}}{(2a - x)^2}$.

8) Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\alpha = \frac{ax(5x - 12a)}{3(2a - x)^2}.$$

$$\beta = \frac{8a}{3}\sqrt{\frac{x}{2a - x}}.$$

9) Gleichung der Evolute: $4096a^3\alpha + 1152a^2\beta^2 + 27\beta^4 = 0$.

10) $x = 0$, $y = 0$ ist ein Rückkehrpunkt der ersten Art.

Andeut. 1) $OK = x$, $PK = y$, $QR \perp OB$, so verhält sich:

$$OR : QR = OK : KP = x : y$$

oder da $$OK = x = 2a - PS = 2a - OR$$

und $$QR^2 = OR(2a - OR) = (2a - x)x$$

auch $$2a - x : x = x^2 : y^2.$$

2—7) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(3a - x)}{y(2a - x)^2} = \frac{(3a - x)x^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{3}{2}}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3a^2}{x^{\frac{1}{2}}(2a - x)^{\frac{5}{2}}}$.

8) und 9) Nach §. 72. Um aus α und β den Werth von x zu eliminiren, setze man

$$\alpha = \frac{5a}{3}\left(\frac{x}{2a - x}\right)^2 - \frac{4a^2x}{(2a - x)^2}$$

$$= \frac{5a}{3}\left(\frac{3\beta}{8a}\right)^4 - 4a^2\left(\frac{3\beta}{8a}\right)^2 \cdot \frac{1}{2a - x}$$

$$= \frac{5a}{3}\left(\frac{3\beta}{8a}\right)^4 - 4a^2\left(\frac{3\beta}{8a}\right)^2 \frac{\left(\frac{3\beta}{8a}\right)^{2\,*)} + 1}{2a}$$ u. s. w.

10) Nach §. 75.

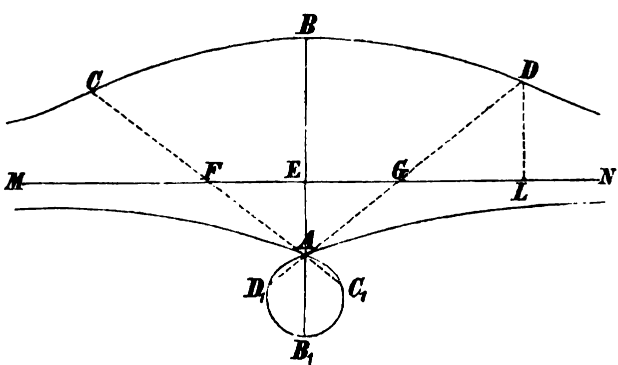
e ...st MN (Fig. 94) eine Gerade, und man zieht durch irgend
tı ...nkt A ausserhalb derselben die Strahlen B_1B, C_1C, D_1D, . .
I ...ann eine beliebige Strecke a auf denselben nach EB, EB_1, FC,
... GD_1, . . ., so bestimmen die Punkte C, B, D, . . . und

*) $\left(\frac{3\beta}{8a}\right)^2 = \frac{x}{2a - x}$, also $\left(\frac{3\beta}{8a}\right)^2 + 1 = \frac{2a}{2a - x}$.

$C_1, B_1, D_1, \ldots$ zwei Curvenäste, welche beiderseits der Geraden MN liegen und von welchen jene die obere, diese die untere Conchoide heisst. Man soll nun die Eigenschaften dieser Curve näher



Fig. 94.



untersuchen, wenn MN als Abscissenachse, AB als Ordinatenachse angenommen und $AE = b$ gesetzt wird.

Aufl. 1) Gleichung: $y^2 + \frac{x^2y^2}{(y+b)^2} = a^2$

oder $x = \pm \frac{b+y}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$

2) Subtangente $= - \frac{y^3 + a^2b}{y\sqrt{a^2 - y^2}}$

3) Subnormale $= \frac{y^3\sqrt{a^2 - y^2}}{y^3 + a^2b}$

4) Tangente $= \frac{a\sqrt{y^4 + 2by^3 + a^2b^2}}{y\sqrt{a^2 - y^2}}$

5) Normale $= \frac{ay\sqrt{y^4 + 2by^3 + a^2b^2}}{y^3 + a^2b}$

6) MN ist eine Asymptote.

7) Krümmungshalbmesser $= \frac{a(y^4 + 2by^3 + a^2b^2)^{\frac{3}{2}}}{y^3(y^3 + 3by^2 - 2a^2b)}$

8) Je nachdem $b \lesseqgtr a$ ist, hat die untere Curve einen Doppe[illegible]kt oder einen Rückkehrpunkt.

Andeut. 1) Es sei $EL = x$, $DL = y$, $GL = z$, so folgt:

$$y^2 = a^2 - z^2 \,,\; z : x - z = y : b.$$

Eliminire nun z u. s. w.

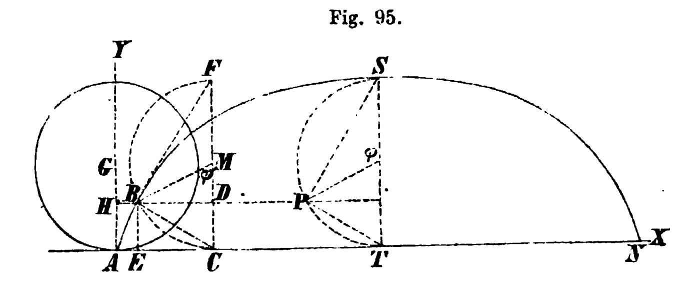
2—3) Aus $x = \frac{b + y}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$ bestimme $\frac{dx}{dy}$ und hieraus:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y^2 \sqrt{a^2 - y^2}}{y^3 + a^2 b};$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{a^2 y^3 (y^3 + 3by^2 - 2a^2 b)}{(y^3 + a^2 b)^3}.$$

4) Rollt ein Kreis G vom Radius r (Fig. 95) auf einer Geraden AX, so beschreibt ein Punkt A in der Peripherie desselben eine Curve, welche

Fig. 95.



gemeine Cycloide heisst. Man soll diese Curve untersuchen, wenn A als Coordinatenanfang und AX als Abscissenachse angenommen wird.

Aufl. 1) Gleichung: $x = r \, arc \cos \frac{r - y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$. (a)

2) Subtangente $= \frac{y^2}{\sqrt{2ry - y^2}}$.

3) Subnormale $= \sqrt{2ry - y^2}$.

4) Tangente $= \frac{y \sqrt{2ry}}{\sqrt{2ry - y^2}}$.

5) Normale $= \sqrt{2ry} = BC$.

6) Krümmungshalbmesser $= 2 \sqrt{2ry} = 2BC$*)

7) Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\alpha = x + 2 \sqrt{2ry - y^2}$$
$$\beta = - y.$$

leichung der Evolute: $\alpha = r \, arc \cos \frac{r + \beta}{r} + \sqrt{- 2r\beta - \beta^2}$.

---

*) h. der Krümmungshalbmesser ist für jeden Punkt gleich der doppelten Nor- betreffenden Punktes.

Andeut. 1) Ist B ein Punkt der Curve, $\measuredangle BMC = \varphi$ der entsprechende Wälzungswinkel, so ist

$$x = AC - BD = arc\, BC - BD = r\varphi - r \sin\varphi$$

$$y = CM - DM = r - r\cos\varphi\ ;\ \cos\varphi = \frac{r-y}{r},$$

also
$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}$$

und somit
$$x = r\, arc\cos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2}.$$

2—7)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry-y^2}}{y} = \frac{BD}{y}.\text{*)}$$

Anmerk. 1) Man ersieht aus 8), dass nur negativen Werthen von β reelle Werthe von α entsprechen. Für $\beta = -2r$ wird (Fig. 96)

$$\alpha = r\, arc\cos -1 = \pi r = AF.$$

Wählt man den Punkt C als Coordinatenanfang und verlegt dahin parallel die Achsen, so dass CB die neue positive XAchse wird, so hat man, wenn α_1 und β_1 die neuen Coordinaten bezeichnen, in obiger Gleichung zu setzen:

$$\alpha = \pi r - \alpha_1\ ,\ \beta = -2r + \beta_1$$

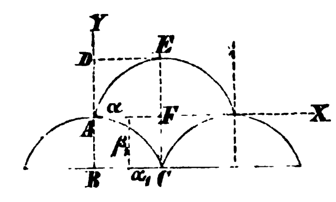
und findet:

$$\pi r - \alpha_1 = r\, arc\cos\frac{-r+\beta_1}{r} + \sqrt{2r\beta_1 - \beta_1^2}$$

$$= r\left(\pi - arc\cos\frac{r-\beta_1}{r}\right) + \sqrt{2r\beta_1-\beta_1^2}$$

also
$$\alpha_1 = r\, arc\cos\frac{r-\beta_1}{r} - \sqrt{2r\beta_1-\beta_1^2}.$$

Fig. 96.



Aus der Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der Cycloidengleichung (a) geht unmittelbar hervor, dass die Evolute der Cycloide eine dieser congruente Cycloide ist.

2) Wählt man (Fig. 95) den Scheitel S als Ursprung ST als Abscissenachse, so erhält man

$$y = r\, arc\cos\frac{r-x}{r} + \sqrt{2rx-x^2}$$

als Cycloidengleichung.

3) Da in (a) für

$$y = 0\ ,\ x = r\, arc\cos 1$$

wird und $arc\cos 1$ vieldeutig ist, so trifft die Curve unzählige Mal die Abscissenachse in Abständen $= 2\pi r = AN$, was damit übereinstimmt, dass man sich den Kreis fortgesetzt rollend auf der Abscissenachse denken kann.

4) Fällt der beschreibende Punkt nicht in die Peripherie des rollenden Kreises, so entsteht eine gestreckte oder eine verschlungene Cycloide, je nachdem derselbe innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt.

5) Denkt man sich parallel zu TS Lichtstrahlen einfallend, wie z. B. FB so bestimmen dieselben eine Enveloppe (Katakaustik), deren Gleichung hier noch [illegible]kelt werden soll.

Da $\measuredangle EBC = \measuredangle BCM = \measuredangle CBM$ und BC die Normale der [illegible]ide, so ist BM der reflectirte Strahl.

---

*) Aus $\frac{DB}{y} = \frac{DF}{DB} = \frac{dy}{dx}$ folgt unmittelbar, dass BF die Tangente an [illegible]urve B, also BC die entsprechende Normale ist.

Die Gleichung desselben ist somit

$$Y - y = cotg\,\varphi\,(X - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mu)$$

wo x und y Functionen von φ sind und X, Y die laufenden Coordinaten bezeichnen.

Durch Differentiation nach φ folgt hieraus:

$$-\frac{dy}{d\varphi} = -\frac{X - x}{sin^2\varphi} - cotg\,\varphi\,\frac{dx}{d\varphi}.$$

Nun ist aber $\quad x = r\varphi - r\,sin\,\varphi = r(\varphi - sin\,\varphi)$

und $\quad y = r - r\,cos\,\varphi = r(1 - cos\,\varphi)$,

also $\quad \frac{dx}{d\varphi} = r - r\,cos\,\varphi$

und $\quad \frac{dy}{d\varphi} = r\,sin\,\varphi.$

Daher:

$$r\,sin\,\varphi = \frac{X - x}{sin^2\varphi} + r\,cotg\,\varphi\,(1 - cos\,\varphi)$$

$$r\,sin^3\varphi = X - x + r\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi\,(1 - cos\,\varphi)$$

$$= X - r\varphi + r\,sin\,\varphi + r\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi - r\,sin\,\varphi\,cos^2\varphi$$

folglich:

$$X = r\varphi + r\,sin^3\varphi - r\,sin\,\varphi - r\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi + r\,sin\,\varphi\,cos^2\varphi$$

$$= r\varphi - r\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi = \frac{r}{2}\,(2\varphi - sin\,2\varphi).$$

Führt man nun die Werthe von X, x und y in die Gleichung (μ) ein, so findet man:

$$Y = r\,sin^2\varphi = \frac{r}{2}\,(1 - cos\,2\varphi).$$

Setzt man ψ statt 2φ und r_1 statt $\frac{r}{2}$, so folgt:

$$X = r_1\,(\psi - sin\,\psi)\ ;\ Y = r_1\,(1 - cos\,\psi)$$

Die Enveloppe oder die Katakaustik ist daher wieder eine Cycloide, deren erzeugender Kreis $\frac{r}{2}$ zum Radius hat.

6) Um die Gleichung der gestreckten und verschlungenen Cycloide herzuleiten, sei (Fig. 97) während des Rollens der Punkt a zum Berührungspunkt a_1 geworden und b nach b_1, A nach A_1 gekommen. Alsdann ist $arc\,a_1b_1 = arc\,ab$. Setzt man nun das constante Verhältniss

$$Cb : CA = C_1b_1 : C_1A_1 = 1 : \alpha,$$

so sind nach Früherem die Coordinaten ξ, η des Punktes b_1 gegeben durch die Gleichungen:

$$\xi = r\varphi - r\,sin\,\varphi\ ;\ \eta = r - r\,cos\,\varphi$$

und die Coordinaten ξ_1, η_1 des Punktes C_1 durch:

$$\xi_1 = r\varphi\ ;\ \eta_1 = r.$$

Fig. 97.

Aus den Proportionen

$$\xi_1 - \xi : \xi_1 - x = 1 : \alpha$$

$$\eta_1 - \eta : \eta_1 - y = 1 : \alpha$$

folgt nun:

$$x = r\varphi - \alpha r\,sin\,\varphi$$

$$y = r - \alpha r\,cos\,\varphi$$

.... jetzt leicht die Gleichung in x und y ableiten lässt.

...chdem $\alpha = 1$, $\alpha > 1$, $\alpha < 1$ ist, entspricht dieselbe der gemeinen, ...kten, oder verschlungenen Cycloide. Aus ihr lassen sich nun leicht ... Eigenschaften der beiden zuletzt genannten Cycloiden entwickeln.

... ein Kreis vom Radius r statt auf einer Geraden, wie in v... ...endem Falle, auf der convexen Seite eines anderen Kreises v... ... R, so beschreibt jeder Punkt desselben eine Curve, welche E... ...de heisst (Fig. 98).

Man soll diese Curve untersuchen, wenn der Mittelpunkt A als Anfangspunkt und AC als Abscissenachse angenommen wird.

Aufl. 1) Gleichung:

$$\left\{\begin{array}{l} x = (R+r)\cos\varphi - r\cos\frac{R+r}{r}\varphi \\ y = (R+r)\sin\varphi - r\sin\frac{R+r}{r}\varphi \end{array}\right\} (1)$$

oder

$$x = (R+r)\cos\frac{r}{R}\psi - r\cos\frac{R+r}{R}\psi,$$

$$y = (R+r)\sin\frac{r}{R}\psi - r\sin\frac{R+r}{R}\psi.$$

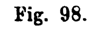
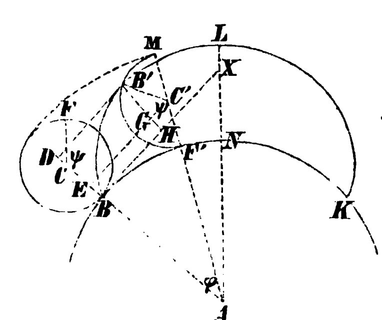


Fig. 98.



2) Subtangente $= y\cot\frac{R+2r}{2r}\varphi$.

3) Subnormale $= y\,tg\,\frac{R+2r}{2r}\varphi$.

4) Tangente $= \dfrac{y}{\sin\frac{R+2r}{2r}\varphi}$.

5) Normale $= \dfrac{y}{\cos\frac{R+2r}{2r}\varphi}$.

6) Krümmungshalbmesser $= \dfrac{r(R+r)\sin\frac{R}{2r}\varphi}{R+2r}$

7) Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\cos\varphi + r\cos\frac{R+r}{r}\varphi\right] \\ \beta = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\sin\varphi + r\sin\frac{R+r}{r}\varphi\right] \end{array}\right.$$

Diese beiden Gleichungen zusammen bilden die Gleichung der Evolute.

Andeut. 1) B' sei die Lage des Punktes B nachdem sich der Kreis um den $\measuredangle\, B'C'F' = \measuredangle\, BCF = \psi$ fortgewälzt hat, also F nack F' gekommen ist. Man hat alsdann:

$$x = AD = AE + ED = AE + B'G = (R+r)\cos\varphi + r\sin B'C'G$$
$$= (R+r)\cos\varphi - r\cos(\varphi+\psi)$$
$$y = B'D = C'E - C'G = (R+r)\sin\varphi - r\sin(\varphi+\psi).$$

Es ist aber $R\varphi = r\psi$, $\psi = \frac{R}{r}\varphi$, $\varphi = \frac{r}{R}\psi$ etc.

$$2\text{—}7)\ \frac{dy}{dx}\ \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\sin\frac{R+2r}{2r}\varphi\,\sin\frac{R}{2r}\varphi}{\cos\frac{R+2r}{2r}\varphi\,\sin\frac{R}{2r}\varphi} = tg\,\frac{R+2r}{2r}\varphi$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{R+2r}{2r}\varphi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d\frac{dy}{dx}}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{R+2r}{r(R+r)\cos^3\frac{R+2r}{2r}\varphi \sin\frac{R}{2r}\varphi}$$

Anmerkungen. 1) Verlegt man die Abscissenachse bezüglich der Coordinaten α und β nach AN, wo $BN = \pi r$ ist, bezeichnet $\measuredangle BAN$ durch γ und setzt*) die neuen Coordinaten.

$$\alpha_1 = \alpha\cos\gamma + \beta\sin\gamma$$
$$\beta_1 = \beta\cos\gamma - \alpha\sin\gamma$$

so folgt:

$$\alpha_1 = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\cos(\varphi-\gamma) + r\cos\left(\frac{R+r}{r}\varphi - \gamma\right)\right]$$
$$\beta_1 = \frac{R}{R+2r}\left[(R+r)\sin(\varphi-\gamma) + r\sin\left(\frac{R+r}{r}\varphi - \gamma\right)\right]$$

oder wenn man

$$\frac{R^2}{R+2r} = R_1,\ \frac{Rr}{R+2r} = r_1$$

also

$$\frac{R(R+r)}{R+2r} = R_1 + r_1;$$

ferner

$$\varphi - \gamma = \varphi_1;\ \gamma = \frac{r}{R}\pi$$

$$\varphi - \frac{r}{R}\pi = \varphi_1;\ \varphi = \frac{r}{R}\pi + \varphi_1$$

$$\frac{R+r}{r}\varphi - \gamma = \frac{R+r}{r}\left(\frac{r}{R}\pi + \varphi_1\right) - \frac{r}{R}\pi = \frac{R+r}{r}\varphi_1 + \pi$$

setzt, so wird

$$\alpha_1 = (R_1+r_1)\cos\varphi_1 - r_1\cos\frac{R_1+r_1}{r_1}\varphi_1$$
$$\beta_1 = (R_1+r_1)\sin\varphi_1 - r_1\sin\frac{R_1+r_1}{r_1}\varphi_1$$

Man ersieht hieraus, dass die Evolute der Epicycloide wiederum eine Epicycloide ist, bei welcher sich $R_1 : r_1 = R : r$ verhält.

2) Setzt man in den Gl. (1) $R = r$, so folgt:

$$x = 2R\cos\varphi - R\cos 2\varphi$$
$$y = 2R\sin\varphi - R\sin 2\varphi,$$

und hieraus $\quad x^2 + y^2 = 5R^2 - 4R^2\cos\varphi$

oder da $\quad \cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$

also $\quad x = 2R\cos\varphi - 2R\cos^2\varphi + R$

somit $\quad \cos\varphi = \dfrac{R \pm \sqrt{3R^2 - 2Rx}}{2R}$

ist; auch $\quad x^2 + y^2 = 3R^2 \mp 2R\sqrt{3R^2 - 2Rx}$

o[illegible] $\quad y^4 + 2(x^2 - 3R^2)y^2 + x^4 - 6R^2x^2 + 8R^3x - 3R^4 = 0.$

[illegible]gt man nun den Coordinatenanfang von A nach B und ändert zugleich die R[illegible] der XAchse, setzt also $R - x$ statt x, so geht vorstehende Gleichung über in:

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

[illegible]r Uebereinstimmung dieser Gleichung mit der Cardioidengleichung ergibt sich, d[illegible] $R = r$ die Epicycloide in die Cardioide übergeht.

[illegible]mein Lehrb. der ebenen Polygonometrie §. 8, (4).

3) Setzt man für R und r bezüglich $\frac{r}{2}$ und $\frac{r}{4}$, so geht die Gleichung der Epicycloide über in:

$$x = \frac{3r}{4} \cos\varphi - \frac{r}{4} \cos 3\varphi$$

$$y = \frac{3r}{4} \sin\varphi - \frac{r}{4} \sin 3\varphi.$$

Nun ist aber $$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

also $$y = r\sin^3\varphi \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

Ferner erhält man aus obigen Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{8} r^2 - \frac{3r^2}{8} \cos 2\varphi = \frac{r^2}{4} + \frac{3r^2}{4} \sin^2\varphi$$

also $$4(x^2 + y^2) - r^2 = 3r^2 \sin^2\varphi \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

Aus (a) und (b) folgt daher:

$$[4(x^2 + y^2) - r^2]^3 = 27(r^2\sin^2\varphi)^3 = 27r^4y^2$$

und aus der Vergleichung dieses Resultates mit der in §. 73, Beisp. 8 gewonnenen Gleichung ergibt sich unmittelbar, dass die daselbst untersuchte Brennlinie eine **Epicycloide** ist.

4) Setzt man $$r = nR, \quad \frac{r}{R} = n,$$

so ergibt sich aus (1):

$$\begin{aligned}
\frac{x}{R} &= (1+n)\cos\varphi - n\cos\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi \\
&= (1+n)\cos\varphi - n\left(\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{n} - \sin\varphi\sin\frac{\varphi}{n}\right) \\
&= \left[1 + n\left(1 - \cos\frac{\varphi}{n}\right)\right]\cos\varphi + n\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{n} \\
&= \left(1 + 2n\sin^2\frac{\varphi}{2n}\right)\cos\varphi + n\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{n} \\
&= \left[1 + \frac{2n\varphi^2}{4n^2}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}}\right)^2\right]\cos\varphi + \varphi\sin\varphi\,\frac{\sin\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\frac{y}{R} &= (1+n)\sin\varphi - n\sin\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi \\
&= \left[1 + \frac{2n\varphi^2}{4n^2}\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2n}}{\frac{\varphi}{2n}}\right)^2\right]\sin\varphi - \varphi\cos\varphi\,\frac{\sin\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}}.
\end{aligned}$$

Für $n = \infty$ hat man daher:

$$\frac{x}{R} = \cos\varphi + \varphi\sin\varphi\,;\quad x = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi$$

$$\frac{y}{R} = \sin\varphi - \varphi\cos\varphi\,;\quad y = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi$$

Wir schliessen hieraus, dass für $r = \infty$ die Epicycloide in die Evolvente des Grundkreises übergeht.*)

Fig. 99.

*) Denn ist (Fig. 99) P ein Punkt der Kreisevo.

$$BP = R\varphi \quad \measuredangle BOX = \measuredangle PBC = \varphi,$$

so wird

$$OA = x = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi$$

$$PA = y = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi.$$

5) Analog wie bei der gemeinen Cycloide gibt es auch eine **gestreckte** und eine **verschlungene Epicycloide.**

6) Für $R = \infty$ geht die Epicycloide in eine gemeine Cycloide über.

Denn verlegen wir den Ursprung nach B, die Abscissenachse nach der Tangente BX, so wird

$$\begin{aligned} BH = x &= (R + r) \sin\varphi - r \cos(\psi - (90 - \varphi)) \\ &= (R + r) \sin\varphi - r \sin(\varphi + \psi) \\ B'H = y &= (R + r) \cos\varphi - R - r \cos(\varphi + \psi) \end{aligned}$$

oder da $\varphi = \frac{r}{R}\psi = n\psi$ ist, wenn man $\frac{r}{R} = n$ setzt, auch

$$\frac{x}{r} = \left(\frac{1}{n} + 1\right) \sin n\psi - \sin(n + 1)\psi$$

$$\frac{y}{r} = -\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + 1\right) \cos n\psi - \cos(n + 1)\psi.$$

Wird nun $R = \infty$, so nähert sich n der Null und es geht

$$\left(\frac{1}{n} + 1\right) \sin n\psi = \psi \frac{\sin n\psi}{n\psi} + \sin n\psi \text{ über in } \psi,$$

und
$$-\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} + 1\right) \cos n\psi = -\frac{1}{n}(1 - \cos n\psi) + \cos n\psi =$$

$$\cos n\psi - \frac{2\sin^2\frac{n\psi}{2}}{n} \text{ in } 1,$$

da, für ein unendlich klein werdendes n, $\lim \frac{\sin n\psi}{n} = \psi$

und
$$\lim \frac{2\sin^2\frac{n\psi}{2}}{n} = \lim \frac{n^2\psi^2}{2n} = 0 \text{ ist.}$$

Man hat daher:

$$\frac{x}{r} = \psi - \sin\psi \,;\; \frac{y}{r} = 1 - \cos\psi$$

oder
$$x = r(\psi - \sin\psi) \,;\; y = r(1 - \cos\psi)$$

und aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit den in der Anmerkung zur Aufg. 4 gefundenen, geht unmittelbar die Richtigkeit obiger Behauptung hervor.

7) Rollt ein Kreis auf der **concaven** Seite eines anderen Kreises, so beschreibt ein Punkt der Peripherie eine **Hypocycloide.** Man erhält deren Gleichung und Eigenschaften, wenn man in obigen Entwickelungen für die Epicycloide $-r$ statt r setzt. Für $r = \frac{R}{2}$ geht die Hypocycloide in eine gerade Linie über.

6) Eine Curve, bei welcher das Product der Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von zwei festen Punkten A und B constant ist, heisst **Lemniscate.** (F[illegible]).) Man soll die E[illegible]schaften dieser Curve u[illegible]chen, wenn der Mittelp[illegible] der Strecke AB Coord[illegible]ursprung, das cons[illegible] Product $= c^2$ ist und vorausgesetzt wird, dass $2c$ der Abstand d[illegible] festen Punkte sei.

Fig. 100.

Aufl. 1) Gleichung: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, wo $a^2 = 2c^2$.
Polargleichung: $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2) Subtangente $= -\dfrac{y^2(a^2 + 2x^2 + 2y^2)}{x^2(a^2 - 2x^2 - 2y^2)} = a \cot 2\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}$.

3) Subnormale $= \dfrac{x(a^2 - 2x^2 - 2y^2)}{a^2 + 2x^2 + 2y^2} = \dfrac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

4) Tangente $= -\dfrac{a^2 y \sqrt{x^2 + y^2}}{x(a^2 - 2x^2 - 2y^2)} = \dfrac{a\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sin 2\varphi}$.

5) Normale $= \dfrac{a^2 \sqrt{x^2 + y^2}}{a^2 + 2x^2 + 2y^2} = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

6) Krümmungshalbmesser $= \dfrac{a^2}{3\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{a}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}$.

7) Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\alpha = \frac{x(a^2 + x^2 + y^2)}{3(x^2 + y^2)} = \frac{2a \cos^3\varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

$$\beta = -\frac{y(a^2 - x^2 - y^2)}{3(x^2 + y^2)} = \frac{2a \sin^3\varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

8) Gleichung der Evolute: $(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}})(\alpha^{\frac{4}{3}} - \beta^{\frac{4}{3}}) = \dfrac{4a^2}{9}$.

9) Punkt C ist ein Doppelpunkt.

Andeut. 1) Es sei $AP \,.\, PB = c^2$, so ist:
$[(c + x)^2 + y^2][(c - x)^2 + y^2] = c^4$; $(c^2 + x^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 = c^4$ u. s. w.

Um die Polargleichung zu erhalten, setze man:

$$AP^2 = c^2 + r^2 + 2cr\cos\varphi$$
$$BP^2 = c^2 + r^2 - 2cr\cos\varphi$$

also
$$c^4 = (c^2 + r^2)^2 - 4c^2r^2\cos^2\varphi$$
oder
$$r^2 + 2c^2(1 - 2\cos^2\varphi) = 0$$
$$r^2 = 2c^2\cos 2\varphi = a^2 \cos 2\varphi.$$

2—7)
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(x^2 + y^2) - a^2x}{2y(x^2 + y^2) + a^2y}; \quad \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

Nach §. 77 (A) wird

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi} = -\cot 3\varphi$$

also
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d\dfrac{dy}{dx}}{d\varphi}}{\dfrac{dx}{d\varphi}} = -\frac{3\sqrt{\cos 2\varphi}}{a \sin^3 3\varphi}.$$

8) Um in 7) φ zu eliminiren, setze man der Kürze wegen:

$$\cos\varphi = m, \; \sin\varphi = n, \; \frac{2a}{3} = b,$$

also
$$\alpha = \frac{bm^3}{\sqrt{m^2 - n^2}}, \; \beta = b\frac{n^3}{\sqrt{m^2 - n^2}} \quad \ldots\ldots \quad (\mu)$$

so wird
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{m^2}{n^2},\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} + 1 = \frac{1}{n^2}$$

oder
$$\frac{\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{n^2},\ \frac{\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}}}{\beta^{\frac{2}{3}}} = \frac{m^2 - n^2}{n^2}$$

somit
$$n^2 = \frac{\beta^{\frac{2}{3}}}{\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}},\ m^2 - n^2 = \frac{\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}}}{\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}}.$$

In (μ) substituirt u. s. w.

9) Aus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ findet man:
$$2x\,(x^2 + y^2) - a^2x = 0$$
$$2y\,(x^2 + y^2) + a^2y = 0$$
und als Werthe, welche diesen Gleichungen und
$$(x^2 + y^2)^2 - a^2\,(x^2 - y^2) = 0$$
genügen, erhält man: $x = 0,\ y = 0.$

Für diese Coordinaten wird nun:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -3a^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a^2,$$

also
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0^2 = -4a^4.$$

Der Punkt ist daher ein Doppelpunkt. Die Gleichung
$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)_0 t + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 t^2 = 0$$
zur Bestimmung der Neigungswinkel der Berührenden gegen die XAchse wird daher $t^2 - 1 = 0$, woraus sich für $t = \pm 1$ ergibt.

Anmerk. 1) Bezeichnet γ den Winkel, welchen die Normale eines Punktes mit dem Radius vector bildet, so ist
$$tg\,\gamma = \frac{\text{Subnormale}}{\text{Rad. vector}} = \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = tg\,2\varphi$$
also
$$\gamma = 2\varphi$$

2) Die Lemniscate ist auch der geometrische Ort aller Fusspunkte der vom Mittelpunkte einer gleichseitigen Hyperbel aus auf deren Tangenten gefällten Perpendikel.

7) Man soll die logarithmische oder logistische Linie, deren Gleichung
$$x = a\,ly \text{ oder } y = e^{\frac{x}{a}}$$
ist, untersuchen.

Aufl. 1) Subtangente $= a$, also constant.

Subnormale $= \frac{1}{a}\,e^{\frac{2x}{a}}$.

Tangente $= \sqrt{e^{\frac{2x}{a}} + a^2}$.

Normale $= \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a}\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} + a^2}$.

5) Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\alpha = x - \frac{a^2 + e^{\frac{2x}{a}}}{a},$$

$$\beta = \frac{2e^{\frac{2x}{a}} + a^2}{e^{\frac{x}{a}}}.$$

6) Gleichung der Evolute:

$$\alpha = al\left[\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 8a^2}}{4}\right] - a - \frac{1}{a}\left(\frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 8a^2}}{4}\right)^2.$$

8) Die Curve, deren Polargleichung

$$r = a^{\varphi}$$

ist, heisst **logarithmische Spirale**. Man soll diese einer Untersuchung unterwerfen.

Aufl. 1) Für $\varphi = 0, 1, 2, 3, \ldots$ werden die Windungen immer grösser, für $\varphi = -1, -2, -3, \ldots$ immer kleiner und kommen dem Pole immer näher; dieser ist also ein asymptotischer Punkt.

2) Subtangente $= \frac{a^{\varphi}}{la} = \frac{r}{la}$.

3) Subnormale $= a^{\varphi}\, la = r\, la$.

4) Tangente $= \frac{a^{\varphi}}{la} \sqrt{1 + l^2 a} = \frac{r}{la} \sqrt{1 + l^2 a}$.

5) Normale $= a^{\varphi} \sqrt{1 + l^2 a} = r \sqrt{1 + l^2 a}$.

6) Krümmungshalbmesser $= a^{\varphi} \sqrt{1 + l^2 a} =$ Normale.

7) Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\alpha = -a^{\varphi}\, la \sin\varphi$$

$$\beta = a^{\varphi}\, la \cos\varphi.$$

8) Die Tangenten bilden mit dem Radius vector einen constanten Winkel α.

9) Die Evolute ist wiederum eine der gegebenen congruente logarithmische Spirale von gleichem Pole.

Andeut. 1—7) $x = r\cos\varphi = a^{\varphi} \cos\varphi$;

$$y = a^{\varphi} \sin\varphi.$$

Nach §. 77 (Δ) ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi\, la + \cos\varphi}{\cos\varphi\, la - \sin\varphi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{\frac{d\varphi}{\frac{dx}{d\varphi}}} = \frac{1 + l^2a}{a^{\varphi}(-\sin\varphi + la\cos\varphi)^3}$$

8) $$tg\,\alpha = \frac{\text{Subtangente}}{\text{Rad. vector}} = \frac{1}{la}$$

9) Setzt man nach 7:

$$\alpha = a^{\varphi}\, la \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

$$\beta = a^{\varphi}\, la \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right),$$

so folgt, da $a^{\varphi}la$ wesentlich positiv ist, für den Abstand des Krümmungsmittelpunktes vom Pole:

$$r_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = a^{\varphi}\, la$$

und für den zugehörigen Drehungswinkel

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi.$$

also

$$r_1 = a^{\varphi_1 - \frac{\pi}{2}}\, la = a^{\varphi_1}\frac{la}{a^{\frac{\pi}{2}}}.$$

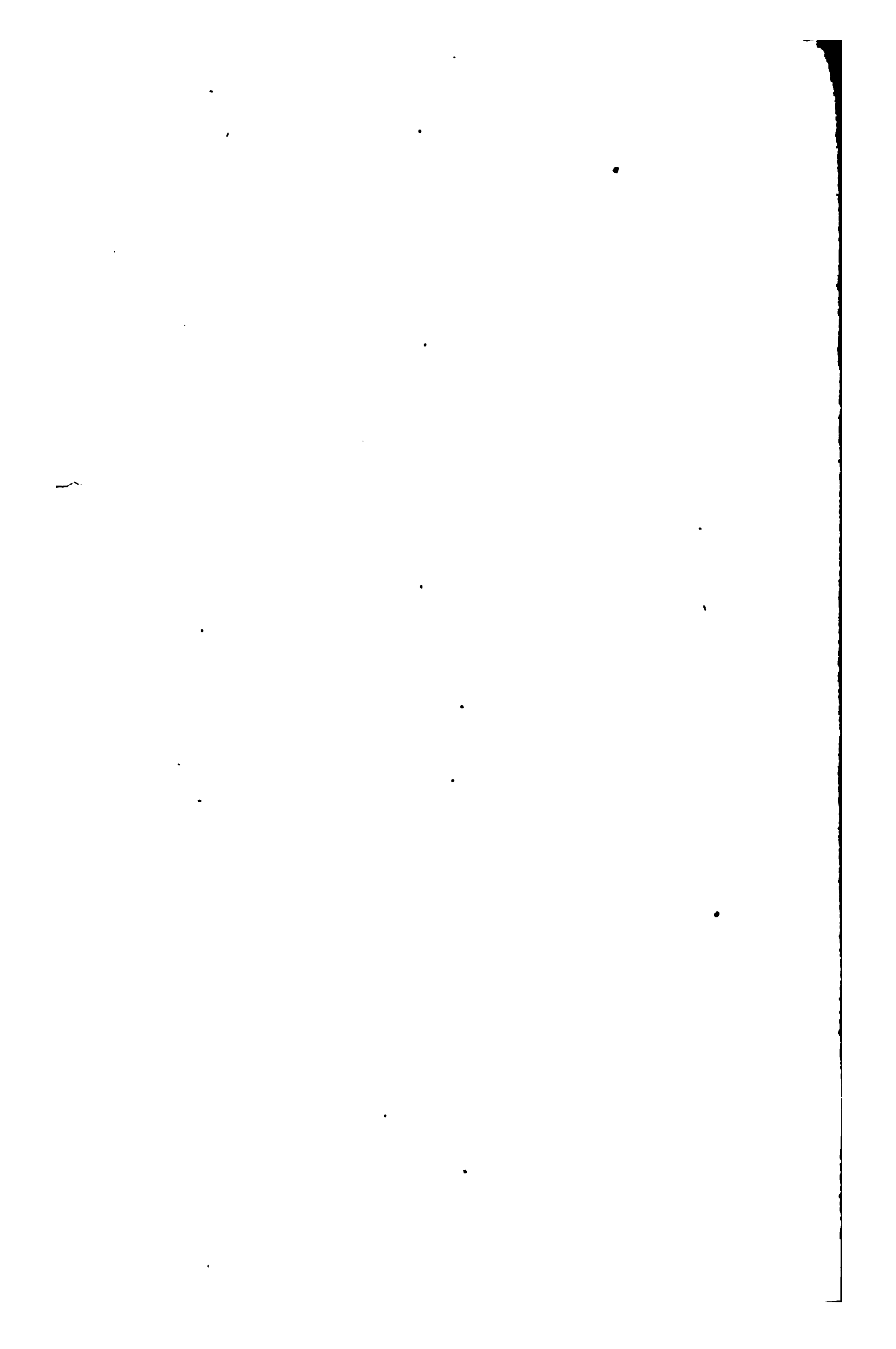
Zählt man aber φ_1 von einer anderen Achse aus, bezeichnet den Winkel, welchen die neue Achse mit der alten bildet, durch ψ und setzt $\varphi_1 - \psi = \varphi_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + \psi$, so wird

$$r_1 = a^{\varphi_2 + \psi}\frac{la}{a^{\frac{\pi}{2}}}$$

Bestimmt man nun ψ so, dass $a^{\psi}\frac{la}{a^{\frac{\pi}{2}}} = 1$ wird, so erhält man:

$$r_1 = a^{\varphi_2}$$

als Gleichung der Evolute. Diese ist somit wieder eine logarithmische Spirale etc.



Neunter Abschnitt.

Grundbegriffe.

§. 82. Unbestimmte Integrale.

1) In der Differentialrechnung wird gezeigt, wie man für eine gegebene Function $F(x)$, deren Differentialquotient $f(x)$ findet, die Integralrechnung dagegen hat die umgekehrte Aufgabe zu ihrem Gegenstande und lehrt, wie man aus der abgeleiteten Function $f(x)$ die ursprünglichen Functionen finden kann. Während nämlich zu einer eindeutigen stetigen Function $F(x)$ nur eine und zwar ebenfalls eindeutige Function $f(x)$ als abgeleitete Function gehört, so entsprechen einer Function $f(x)$ unendlich viele ursprüngliche Functionen. Es sei y eine solche*), so ist

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ und } \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

woraus durch Subtraction folgt:

$$d\left(\frac{y - Fx}{dx}\right) = 0.$$

Nach §. 9, α) muss daher

$$y - F(x) = C$$

sein, wo C eine von x unabhängige Constante bedeutet.

Jede ursprüngliche Function von $f(x)$ hat daher die Form F [illegible] $- C$, wenn $F(x)$ irgend eine derselben bezeichnet.

Die Operation der Auffindung der ursprünglichen Function nennt n[illegible] Integriren; die ursprüngliche Function selbst heisst das u[illegible]mmte Integral und man bezeichnet dieses dadurch, dass man

*) [illegible] es wenigstens eine solche Function geben muss, ergibt sich mit Leichtigk[illegible].

hinter die zu integrirende Function das Differential der unabhängigen Variabeln x nämlich dx und vor die Funktion das Summationszeichen $\int$ setzt. Der Grund dieser Bezeichnung wird sich später ergeben.

Man schreibt daher, wenn

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

ist, für die ursprüngliche Function

$$F(x) = \int f(x)\, dx + C$$

und da zwei entgegengesetzte Operationen einander aufheben, so folgt unmittelbar:

$$\frac{d\int f(x)\, dx}{dx} = f(x).$$

3) Die bei der Integration auftretende willkürliche Constante C kann stets bestimmt werden, wenn man für ein bestimmtes x den Werth des Integrales kennt. Weiss man nämlich, dass z. B. für $x = a$ das Integral

$$\int f(x)\, dx = A$$

wird, so folgt aus

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C$$

unmittelbar: $$F(a) + C = A$$

und hieraus $$C = A - F(a)$$

Für $A = 0$ erhält man hiernach:

$$\int f(x)\, dx = F(x) - F(a).$$

Diesen Werth bezeichnet man insbesondere durch $\int_a^x f(x)\, dx$ und setzt also:

$$\int_a^x f(x)\, dx = F(x) - F(a).$$

für einen bestimmten Werth von x z. B. für $x = b$ folgt hieraus sofort:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Ein solches Integral heisst ein **bestimmtes**, a die **untere** und b die **obere Grenze** desselben.

4) Setzen wir $$\int f(x)\, dx = y,$$

also $$f(x) = \frac{dy}{dx}$$

so ist $$Cf(x) = C\frac{dy}{dx} = \frac{dCy}{dx}$$

und somit $$\int Cf(x)\, dx = Cy = C\int f(x)\, dx$$

d. h. **die constanten Factoren kann man sogleich vor das Integralzeichen setzen.**

5) Sind u, v, w Functionen von x in endlicher Anzahl und ist

$$\int udx = U; \int vdx = V; \int wdx = W;$$

also

$$u = \frac{dU}{dx}; v = \frac{dV}{dx}; w = \frac{dW}{dx},$$

so folgt:

$$u \pm v \pm w = \frac{dU}{dx} \pm \frac{dV}{dx} \pm \frac{dW}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}(U \pm V \pm W),$$

und hieraus die Gleichung:

$$\int (u \pm v \pm w)\, dx = U \pm V \pm W,$$

$$= \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx$$

d. h. **das Integral einer algebraischen Summe ist gleich der entsprechenden algebraischen Summe der Integrale der einzelnen Summanden.**

6) Sind u und v reelle Functionen der Variabeln x, so bedeutet $\int (u + iv)\, dx$ diejenige Function, deren Differentialquotient $u + iv$ ist. Man erhält daher:

$$\int (u + iv)\, dx = \int udx + i \int vdx,$$

denn nach §. 49 ist:

$$\frac{d}{dx}\left\{\int udx + i\int vdx\right\} = \frac{d}{dx}\int udx + i\frac{d}{dx}\int vdx = u + iv.$$

7) Da die Differentialquotienten complexer Ausdrücke, wie in §. 49 gelehrt wurde, nach denselben Regeln gebildet werden wie diejenigen reeller Functionen, so ist es bei der Integration einer complexen Function nicht nöthig, derselben zuerst die Form $u + iv$ zu geben, sondern man kann sogleich die Regeln der Integration, wie sie in Folgendem vorgetragen werden, in Anwendung bringen; geschieht aber jenes, so erhält man Ausdrücke, welche sich mit den auf die andere Weise erhaltenen als identisch herausstellen, wenn man die in §. 48 festgestellte Bedeutung complexer Ausdrücke zu Grunde legt.

Zehnter Abschnitt.

Integration einfacher Functionionen.

§. 83. Tafel der einfachen Integralformeln und deren Anwendung.

Aus der Zusammenstellung der Formeln zur Bestimmung der Differentialquotienten der einfachsten Functionen in §. 30 erhalten wir unmittelbar folgende Integralformeln:

$$1)\int u^n \frac{du}{dx}\,dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$\alpha)\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

$$\beta)\int \frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{dx}\,dx = 2\sqrt{u} + C.$$

$$\gamma)\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C.$$

$$2)\int a^u \frac{du}{dx}\,dx = \frac{a^u}{la} + C.$$

$$\alpha)\int e^u \frac{du}{dx}\,dx = e^u + C.$$

$$\beta)\int a^x\,dx = \frac{a^x}{la} + C.$$

$$\gamma)\int e^x\,dx = e^x + C.$$

$$3)\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\,dx = lu + C.$$

$$\alpha)\int \frac{dx}{x} = lx + C.$$

4) $\int \cos u \frac{du}{dx} dx = \sin u + C.$

α) $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

β) $\int \frac{\sin u}{\cos^2 u} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{\cos u} + C.$

γ) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + C.$

5) $\int \sin u \frac{du}{dx} dx = - \cos u + C.$

α) $\int \sin x \, dx = - \cos x + C.$

β) $\int \frac{\cos u}{\sin^2 u} \frac{du}{dx} dx = - \frac{1}{\sin u} + C.$

γ) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = - \frac{1}{\sin x} + C.$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 u} \frac{du}{dx} dx = tg u + C.$

α) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg x + C.$

7) $\int \frac{1}{\sin^2 u} \frac{du}{dx} dx = - \cot u + C.$

α) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = - \cot x + C.$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{du}{dx} dx = \arcsin u + C.$

$= - \arccos u + C.$

α) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

$= - \arccos x + C.$

$\frac{1}{1 + u^2} \frac{du}{dx} dx = arc tg u + C.$

$= - arc \cot u + C.$

α) $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arc tg x + C.$

$= - arc \cot x + C.$

Beispiele.

1) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$ . . . . (1.α)*)

2) $\int \left(\frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{x^4}\right) dx = \frac{5}{3} \int x^{\frac{2}{3}} dx - 3 \int x^{-4} dx =$

$\frac{\frac{5}{3} x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \frac{3x^{-3}}{-3} = x^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{x^3} + C$ . . . . (1.α)

3) $\int (2\cos x - 3\sin x)\, dx = 2\int \cos x\, dx - 3\int \sin x\, dx$

$= 2\sin x + 3\cos x + C$ . . . . (4.α und 5.α)

4) Um $\int (x^3 + 7x^2)^m (3x^2 + 14x)\, dx$ zu bestimmen, berücksichtige man, dass

$$3x^2 + 14x = \frac{d}{dx}(x^3 + 7x^2),$$

also gesetzt werden kann:

$$\int (x^3 + 7x^2)^m (3x^2 + 14x)\, dx = \int (x^3 + 7x^2)^m \frac{d}{dx}(x^3 + 7x^2)\, dx.$$

Man hat alsdann

$$\int (x^3 + 7x^2)^m (3x^2 + 14x)\, dx = \frac{(x^3 + 7x^2)^{m+1}}{m+1} + C \quad . . . (1)$$

5) $\int (e^x + x^2)^6 (e^x + 2x)\, dx = \int (e^x + x^2)^6 \frac{d}{dx}(e^x + x^2)\, dx$

$= \frac{1}{7}(e^x + x^2)^7 + C$ . . . . (1)

6) $\int \frac{\cos x + \frac{1}{x}}{\sqrt{\sin x + lx}}\, dx = \int \frac{\frac{d}{dx}(\sin x + lx)}{\sqrt{\sin x + lx}}\, dx =$

$= 2\sqrt{\sin x + lx} + C$ . . . . (1.β)

7) $\int a^{\sin x + xlx} (\cos x + 1 + lx)\, dx =$

$\int a^{\sin x + xlx} \frac{d}{dx}(\sin x + xlx)\, dx = \frac{a^{\sin x + xlx}}{la} + C$. (2)

8) $\int e^{x \sin x} (\sin x + x\cos x)\, dx = \int e^{x \sin x} \frac{d}{dx}(x \sin x)\, dx$

$= e^{x \sin x} + C$ . . . . a)

9) $\int \cos(ax^2 + b)\, x\, dx = \frac{1}{2a}\int \cos(ax^2 + b) \frac{d}{dx}(ax^2 + b)$ =

$\frac{1}{2a} \sin(ax^2 + b) + C$ . . . . 4)

*) Diese Nummern beziehen sich bei nachfolgenden 23 Aufgaben auf vors ... de Integralformeln.

$$10)\int\frac{dx}{xlx\sqrt{l^2x-1}}=\int\frac{\frac{1}{x}}{l^2x\sqrt{1-\frac{1}{l^2x}}}dx=$$

$$-\int\frac{\frac{d}{dx}\frac{1}{lx}}{\sqrt{1-\frac{1}{l^2x}}}dx=arc\cos\frac{1}{lx}+C\quad.\;.\;.\;.\;.\quad(8)$$

$$11)\int(x^2+3x-7)^2\left(x+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int(x^2+3x-7)^2(2x+3)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int(x^2+3x-7)^2\frac{d}{dx}(x^2+3x-7)\,dx=\frac{1}{6}(x^2+3x-7)^3+C\quad(1)$$

$$12)\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}=\int\frac{\frac{d}{dx}(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}dx=$$

$$=arc\sin(x-1)+C\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(8)$$

$$13)\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=\int\frac{\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2+1}dx$$

$$=arc\,tg\,(x+1)+C\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(9)$$

$$14)\int\sin x\cos x\,dx=\int\sin x\frac{d\sin x}{dx}dx=\frac{\sin^2x}{2}+C\quad.\;.\;.\quad(1)$$

$$15)\int tg\,x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{\frac{d\cos x}{dx}}{\cos x}dx=-l\cos x+C\quad(3)$$

$$16)\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{\frac{d\sin x}{dx}}{\sin x}dx=l\sin x+C\quad.\;.\quad(3)$$

$$17)\int\frac{dx}{\sin x\cos x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}dx=\int\frac{\frac{d\,tg\,x}{dx}}{tg\,x}dx=l\,tg\,x+C\quad.\quad(3)$$

$$18)\int\frac{1}{\sin u}\frac{du}{dx}dx=\int\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}}\frac{du}{dx}dx=$$

$$\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{u}{2}}}{2\,tg\,\frac{u}{2}}\frac{du}{dx}dx=\int\frac{\frac{d}{dx}tg\,\frac{u}{2}}{tg\,\frac{u}{2}}dx=l\,tg\,\frac{u}{2}+C.\quad.\;.\quad(3)$$

Anmerk. Für $u = x$ folgt hieraus

$$\int \frac{dx}{\sin x} = l\,tg\,\frac{x}{2} + C.$$

19) $$\int \frac{1}{\cos u}\frac{du}{dx}\,dx = \int \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}\frac{du}{dx}\,dx = -\int \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}\,dx$$

oder nach Aufgabe 18:

$$\int \frac{1}{\cos u}\frac{du}{dx}\,dx = -\,l\,tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) = l\,\frac{1}{tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)}$$

$$= l\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) = l\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) + C.$$

Anmerk. Für $u = x$ ergibt sich hiernach

$$\int \frac{dx}{\cos x} = l\,tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

20) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{\frac{d}{dx}(a^2 + x^2)}{2\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \sqrt{a^2 + x^2} + C \quad . \quad (1.\beta)$$

21) $$\int \frac{\sin x\,dx}{a + b\cos x} = -\frac{1}{b}\int \frac{\frac{d}{dx}(a + b\cos x)}{a + b\cos x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{b}\,l\,(a + b\cos x) + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

22) $$\int \frac{dx}{a + b + ax^2} = \frac{1}{a + b}\int \frac{dx}{1 + \frac{a}{a + b}x^2} =$$

$$\frac{\sqrt{\frac{a + b}{a}}}{a + b}\int \frac{\frac{d}{dx}\left(x\sqrt{\frac{a}{a + b}}\right)}{1 + \frac{a}{a + b}x^2}\,dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a\,(a + b)}}\,arc\,tg\left(x\sqrt{\frac{a}{a + b}}\right) + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

23) $$\int \frac{b\,dx}{\cos^2(a + bx)} = \int \frac{\frac{d}{dx}(a + bx)}{\cos^2(a + bx)}\,dx = tg\,(a + bx) + C \quad (6)$$

§. 84. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int x^4\,dx = ?$ Aufl. $\frac{x^5}{5} + C.$

2) $\int \frac{dx}{x^5} = ?$ Aufl. $-\frac{1}{4x^4} + C.$

3) $\int \sqrt[3]{x}\,dx = ?$ Aufl. $\frac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x} + C.$

4) $\int \left(3x^2 + \frac{7}{x^5}\right) dx = ?$ Aufl. $x^3 - \frac{7}{4x^4} + C.$

5) $\int \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = ?$ Aufl. $\frac{x^3}{3} - lx + C.$

6) $\int (2x + 1)^3\,dx = ?$ Aufl. $\frac{1}{8}(2x + 1)^4 + C.$

7) $\int \frac{9x^2 - 10x + 7}{3x^3 - 5x^2 + 7x + 5}\,dx = ?$

Aufl. $l\,(3x^3 - 5x^2 + 7x + 5) + C.$

8) $\int (3x + 5)^6\,dx = ?$ Aufl. $\frac{(3x + 5)^7}{21} + C.$

Andeut. Setze $(3x + 5)^6 = \frac{1}{3}(3x + 5)^6 \frac{d}{dx}(3x + 5).$

9) $\int (x^4 + 5)^3\,x^3\,dx = ?$ Aufl. $\frac{(x^4 + 5)^4}{16} + C.$

Andeut. Setze $(x^4 + 5)^3\,x^3 = \frac{1}{4}(x^4 + 5)^3 \frac{d}{dx}(x^4 + 5).$

10) $\int (2x^3 + 5)^7\,x^2\,dx = ?$ Aufl. $\frac{1}{48}(2x^3 + 5)^8 + C.$

11) $\int (x^2 - 5x + 2)(2x - 5)\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 2)^2 + C.$

12) $\int e^{ax^2 + bx}(2ax + b)\,dx = ?$

Aufl. $e^{ax^2 + bx} + C.$

13) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = ?$ Aufl. $\frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a} + C.$

Andeut. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx.$

$\int \frac{dx}{1 + a^2x^2} = ?$ Aufl. $\frac{1}{a}\,arctg\,(ax) + C.$

Andeut. $\int \frac{dx}{1 + a^2x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{d}{dx}(ax)}{1 + (ax)^2}\, dx.$

15) $\int \frac{lx}{x}\, dx = ?$ Aufl. $\frac{1}{2} l^2 x + C.$

Andeut. $\frac{lx}{x} = lx \frac{d\,lx}{dx}.$

16) $\int (1 + lx + e^x) \sin (x\,lx + e^x)\, dx = ?$

Aufl. $-\cos (xlx + e^x) + C.$

17) $\int \frac{x^2}{\cos^2 (x^3 + 1)}\, dx = ?$ Aufl. $\frac{1}{3} tg\, (x^3 + 1) + C.$

Andeut. $\int \frac{x^2}{\cos^2 (x^3 + 1)}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{d}{dx}(x^3 + 1)}{\cos^2 (x^3 + 1)}\, dx.$

18) $\int \cos ax\, dx = ?$ Aufl. $\frac{1}{a} \sin ax + C.$

19) $\int \sin ax\, dx = ?$ Aufl. $-\frac{1}{a} \cos ax + C.$

20) $\int \frac{x^3}{\sin^2 (x^4 - 1)}\, dx = ?$ Aufl. $-\frac{1}{4} \cot (x^4 - 1) + C.$

21) $\int \frac{\sin (3x + 4)}{\cos^2 (3x + 4)}\, dx = ?$ Aufl. $\frac{1}{3\cos (3x + 4)} + C.$

Andeut. $\int \frac{\sin (3x + 4)}{\cos^2 (3x + 4)}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{\sin (3x + 4)}{\cos^2 (3x + 4)} \cdot \frac{d\,(3x + 4)}{dx}\, dx$ etc. [§. 83. 4. γ].

22) $\int \frac{\cos (5x + 8)}{\sin^2 (5x + 8)}\, dx = ?$ Aufl. $-\frac{1}{5 \sin (5x + 8)} + C.$

Andeut. Vergl. §. 83. 5. β.

23) $\int \sin^2 x \cos x\, dx = ?$ Aufl. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C.$

24) $\int \cos^3 x \sin x\, dx = ?$ Aufl. $-\frac{1}{4} \cos^4 x + C.$

25) $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - l^2 x}} = ?$ Aufl. $arc \sin lx.$

Andeut. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1 - l^2 x}} = \int \frac{\frac{dlx}{dx}}{\sqrt{1 - l^2 x}}\, dx$ [§. 83. 8.]

26) $\int \frac{dx}{a^2 + (bx + c)^2} = ?$

Aufl. $\frac{1}{ab}\, arc\, tg \frac{bx + c}{a}.$

Andeut. $\int \frac{dx}{a^2 + (bx + c)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{bx + c}{a}\right)^2} =$

$$\frac{1}{a^2} \frac{a}{b} \int \frac{\frac{b}{a}\, dx}{1 + \left(\frac{bx + c}{a}\right)^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{bx + c}{a}\right)}{1 + \left(\frac{bx + c}{a}\right)^2}\, dx \text{ [§. 83. 9.]}$$

27) $\int \frac{x dx}{x^2 + b^2} = ?$ **Aufl.** $\frac{1}{2}\, l\,(x^2 + b^2) + C.$

Andeut. $\int \frac{x dx}{x^2 + b^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{d}{dx}(x^2 + b^2)}{x^2 + b^2}\, dx.$

28) $\int \frac{dx}{ax + b} = ?$ **Aufl.** $\frac{1}{a}\, l\,(ax + b) + C.$

29) $\int \frac{x\, dx}{ax^2 + b} = ?$ **Aufl.** $\frac{1}{2a}\, l\,(ax^2 + b) + C.$

30) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$ **Aufl.** $-\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

31) $\int \frac{e^x\, dx}{1 + e^{2x}} = ?$ **Aufl.** $arctg\, e^x + C.$

32) $\int x^n (a + bx^{n+1})^m\, dx = ?$

Aufl. $\frac{(a + bx^{n+1})^{m+1}}{b\,(n + 1)\,(m + 1)} + C.$

33) $\int \frac{x^n\, dx}{ax^{n+1} + b} = ?$ **Aufl.** $\frac{l\,(ax^{n+1} + b)}{a\,(n + 1)} + C.$

34) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$ **Aufl.** $arcsin\, \frac{x}{a} + C.$

Andeut. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\, dx$ u. s. w.

35) $\int \frac{dx}{ax^2 + b} = ?$ **Aufl.** $\frac{1}{\sqrt{ab}}\, arc\,tg\left(x \sqrt{\frac{a}{b}}\right) + C.$

Andeut. $\int \frac{dx}{ax^2 + b} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{\frac{a}{b} x^2 + 1} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}}}{b} \int \frac{\frac{d}{dx}\left(x \sqrt{\frac{a}{b}}\right)}{\frac{a}{b} x^2 + 1}\, dx$ u. s. w.

$\frac{dx}{- bx^2} = ?$ **Aufl.** $\frac{1}{\sqrt{b}}\, arc\, sin\left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \int \frac{\frac{d}{dx}\left(x \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{b}{a} x^2}}\, dx$ u. s. w.

§. 85. Theilweise Integration und Integration durch Umformung.

Kann ein Integral nicht unmittelbar nach einer der in §. 83 aufgestellten Integralformeln bestimmt werden, so hat man zu untersuchen, ob dasselbe nicht mittelst einer besonderen Operation auf eine oder mehre der in jenem Paragraphen enthaltenen Formeln zurückzuführen ist. Diese Zurückführung geschieht vorzüglich durch zwei Methoden, von welchen die eine die Integration durch Theile oder die theilweise Integration, die andere die Integration durch Umformung genannt wird.

a) Theilweise Integration.

Wie wir in §. 16 gesehen haben, ist

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

also

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx \quad \ldots \ldots (1)$$

Um die Anwendung dieser Gleichung auf die Integration zu zeigen, lösen wir nachstehend einige

Beispiele.

1) Zur Bestimmung des Integrales $\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ setze man in (1):

$$u = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{dv}{dx} = 1,$$

also

$$\frac{du}{dx} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \quad v = \int dx = x$$

so folgt:

$$\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{dx}{1+x^2} - 2\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

und hieraus:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x}{2(1+x^2)} + \tfrac{1}{2}\,arc\,tg\,x + C.$$

2) Um $\int lx\,dx$ zu bestimmen, setze man in Gl. (1):

$$u = lx\,;\ \frac{dv}{dx} = 1$$

also
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\,;\ v = \int dx = x,$$

so folgt:

$$\int lx\,dx = xlx - \int dx = xlx - x = x\,(lx - 1) + C.$$

3) Zur Ermittelung von $\int xe^x\,dx$, setze man

$$u = x\,;\ \frac{dv}{dx} = e^x,$$

also
$$\frac{du}{dx} = 1\,;\ v = \int e^x\,dx = e^x,$$

so folgt:

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x = (x - 1)\,e^x + C.$$

4) Soll $\int x^2lx\,dx$ entwickelt werden, so setze man

$$u = lx\,;\ \frac{dv}{dx} = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\,;\ v = \int x^2dx = \frac{x^3}{3}.$$

Man erhält alsdann:

$$\int x^2lx\,dx = \frac{x^3lx}{3} - \frac{1}{3}\int x^2dx = \frac{x^3lx}{3} - \frac{x^3}{9} = \frac{x^3}{3}\left(lx - \frac{1}{3}\right) + C.$$

5) Um nach dieser Methode $\int \frac{lx}{x}\,dx$ zu bestimmen *), setze

$$u = lx\,,\ \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

so folgt:

$$\int \frac{lx}{x}\,dx = lx\,.\,lx - \int \frac{lx}{x}\,dx$$

und hieraus:

$$\int \frac{lx}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}\,l^2x + C.$$

[illegible]m $\int \frac{dx}{(x^2+1)^m}$ zu ermitteln, setze man

$$u = (x^2+1)^{-m}\,,\ \frac{dv}{dx} = 1$$

s[illegible]

---

*) [illegible] einem anderen Wege wurde dieses Integral bereits §. 84, Aufgabe 15

[illegible]

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^m} = \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{m+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{m+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^m} + 2m\int \frac{dx}{(x^2+1)^m} - 2m\int \frac{dx}{(x^2+1)^{m+1}}$$

oder, wenn man m statt $m+1$, also $m-1$ statt m einführt,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{m-1}} = \frac{x}{(x^2+1)^{m-1}} + 2(m-1)\int \frac{dx}{(x^2+1)^{m-1}}$$

$$- 2(m-1)\int \frac{dx}{(x^2+1)^m}$$

und hieraus:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^m} = \frac{x}{2(m-1)(x^2+1)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{m-1}}.$$

Hierdurch ist die Bestimmung des vorgelegten Integrales zurückgeführt auf die eines anderen von gleicher Art, dessen Nenner um einen Grad niedriger ist. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel gelangt man daher schliesslich, wenn m eine positive ganze Zahl ist, zu dem Integrale

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = arc\,tg\,x.$$

Anmerk. Man nennt diese Art der Bestimmung eines Integrales die Methode der Recursion.

b) Integration durch Umformung.

Diese Methode besteht darin, dass man das Integral $\int f(x)\,dx$ mittelst einer Gleichung $x = \varphi(z)$ in ein anderes nach z zu integrirendes Integral verwandelt.

Ist z. B. $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

also $$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

und man setzt hierin

$$x = \varphi(z),$$

wo φ eine beliebige Function bedeutet, so folgt nach §. 8 (3):

$$f[\varphi(z)] = \frac{\frac{dF(x)}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{\frac{dF[\varphi(z)]}{dz}}{\frac{d\varphi(z)}{dz}}$$

und hieraus: $$\frac{d\varphi(z)}{dz} f[\varphi(z)] = \frac{dF[\varphi(z)]}{dz}.$$

Man hat daher:

$$\int f[\varphi(z)] \frac{d\varphi(z)}{dz} dz = F[\varphi(z)] + C.$$

und wenn sich also das Integral $\int f[\varphi(z)] \frac{d\varphi(z)}{dz} dz$ bestimmen lässt und man setzt x statt $\varphi(z)$ in dem Resultate $F[\varphi(z)]$, so ist auch $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ gefunden.

Man wird demnach jederzeit von dieser Methode Gebrauch machen, wenn die Substitution auf ein anderes Integral führt, welches nach früher schon vorgekommenen Formeln leicht bestimmbar ist.

Beispiele.

1) Um $\int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx$ zu bestimmen, setze man

$(x-\alpha)^2+\beta^2 = z$, also $x-\alpha = \sqrt{z-\beta^2}$; $\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{z-\beta^2}}$,

so folgt:

$$\int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx = \int \frac{\sqrt{z-\beta^2}}{z} \cdot \frac{dz}{2\sqrt{z-\beta^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} lz + C$$

$$= \frac{1}{2} l[(x-\alpha)^2+\beta^2] + C.$$

2) Soll $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$ bestimmt werden, so setze man zuerst

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}$$

und nun $\frac{x-\alpha}{\beta} = z$, $\frac{dx}{dz} = \beta$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{\beta dz}{z^2+1} = \frac{1}{\beta}\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} z = \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$

3) Um $\int \frac{x-\gamma}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m} dx$ zu ermitteln, setze man

$$(x-\gamma)^2+\delta^2 = z,$$

so [b]ei 1):

$$[\int] \frac{x-\gamma}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^m} = -\frac{1}{2(m-1)z^{m-1}}$$

$$= -\frac{1}{2(m-1)[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{m-1}} + C$$

Anmerk. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass bei einiger Uebung diese Umformung in vielen Fällen ganz umgangen werden kann, wie solches in mehren der Beispiele des §. 84 geschehen ist. So hätte man z. B. auch vorstehendes Beisp. 1 nach §. 83 auf folgende Art lösen können:

$$\int \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}[(x-\alpha)^2+\beta^2]}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{1}{2}\,l\,[(x-\alpha)^2+\beta^2] + C.$$

Statt der obigen Lösung des Beisp. 2 hätte man auch unmittelbar setzen können:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\int \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{\beta}\,arc\,tg\,\frac{x-\alpha}{\beta} + C$$

und ebenso statt der Auflösung zu 3:

$$\int \frac{x-\gamma}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{d}{dx}[(x-\gamma)^2+\delta^2]}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2(m-1)\,[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{m-1}} + C.$$

4) Um $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}}$ zu bestimmen, setze man

$$x\sqrt{\frac{b}{a}} = z\ ,\ x = z\sqrt{\frac{a}{b}}\ ,\ \frac{dx}{dz} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

so folgt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}\int \frac{dz}{\sqrt{a(1-z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\,arc\,sin\,z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}\,arc\,sin\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Einen zweiten Ausdruck erhält man für vorstehendes Integral, wenn man $\sqrt{a-bx^2} = xz\ ,\ x^2 = \frac{a}{b+z^2}\ ,\ \frac{dx}{dz} = -\frac{az}{x(b+z^2)^2}$ setzt.

Es wird alsdann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = -\int \frac{dz}{b+z^2} = -\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc\,tg\,\frac{z}{\sqrt{b}} =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{a-bx^2}}{x\sqrt{b}} + C \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

Anmerk. Die Gl. (α) wird auch erhalten, wenn man $x\sqrt{\frac{a}{b}}$ statt x in §. 83. 8. α einführt. Eine directe Herleitung derselben ist in §. 84, Aufg. 36 en.

5) Zur Bestimmung von $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ setze

$$\sqrt{x^2+1} = x+z\ ;\ x = \frac{1-z^2}{2z}$$

also

$$x+z = \frac{1+z^2}{2z}\ ,\ \frac{dx}{dz} = -\frac{z^2+1}{2z^2}\ ,$$

so wird

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = 2\int \frac{dz}{z^2-1} = \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) dz$$

$$= l(z-1) - l(z+1) = l\frac{z-1}{z+1}$$

$$= l\frac{x+1-\sqrt{x^2+1}}{x-1-\sqrt{x^2+1}} = l\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + C^{*})$$

6) Um $\int f(e^{ax})\,dx$ zu bestimmen, setze man

$$e^{ax} = z\ ;\ ax = lz\ ;\ \frac{dx}{dz} = \frac{1}{az},$$

so folgt:

$$\int f(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{f(z)}{z}\,dz$$

So ist z. B. $\int \frac{dx}{e^{ax}+1} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z(z+1)} = \frac{1}{a}\left[\int \frac{dz}{z} - \int \frac{dz}{z+1}\right]$

$$= \frac{1}{a}\,l\,\frac{e^{ax}}{e^{ax}+1} + C.$$

7) Um $\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx$ zu ermitteln, setze man

$$\frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} - 1 = z^2\ ,\ \frac{a}{x} = z^2+1\ ,\ \frac{x}{a} = \frac{1}{z^2+1};$$

also

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{2az}{(z^2+1)^2},$$

so folgt:

$$\int \sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx = -2a\int \frac{z^2}{(z^2+1)^2}\,dz = -2a\int \frac{z^2+1-1}{(z^2+1)^2}\,dz$$

$$= -2a\left[\int \frac{dz}{z^2+1} - \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}\right] = -2a\left[arctg\,z - \int \frac{dz}{(z^2+1)^2}\right]$$

Zur Auffindung von $\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}$ berücksichtige man, dass

$$\frac{d}{dz}\frac{z}{z^2+1} = \frac{1-z^2}{(z^2+1)^2} = -\frac{z^2+1-2}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{z^2+1} + \frac{2}{(z^2+1)^2}$$

also

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{2(z^2+1)}\right] + \frac{1}{2(z^2+1)}$$

ist so folgt:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+1}$$

$$= \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\,arc\,tg\,z$$

---

*) ...enn man nämlich den Nenner rational macht.

und man hat daher:

$$\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx = -2a\,arc\,tg\,z + \frac{az}{z^2+1} + a\,arc\,tg\,z$$

$$= \frac{az}{z^2+1} - a\,.\,arc\,tg\,z$$

oder wenn man wieder den Werth von z einführt,

$$\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}\,dx = \sqrt{x\,(a-x)} - a\,arc\,tg\sqrt{\frac{a-x}{x}}.$$

8) Soll $\int\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{b^2-x^2}}$ ermittelt werden, so setze:

$$x = b\cos\varphi\;;\;\frac{dx}{d\varphi} = -b\sin\varphi;$$

alsdann wird

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{b^2-x^2}} = -\int\frac{d\varphi}{a^2-b^2\cos^2\varphi}$$

$$= -\int\frac{d\varphi}{a^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)-b^2\cos^2\varphi} = -\int\frac{d\varphi}{a^2\sin^2\varphi+(a^2-b^2)\cos^2\varphi}$$

$$= -\int\frac{d\varphi}{a^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi}$$

wo $a^2 - b^2 = c^2$ gesetzt ist.

Da nun $-\int\frac{d\varphi}{a^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi} = -\int\frac{\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{c^2+a^2tg^2\varphi}$

$$= -\frac{1}{ac}\int\frac{\frac{d\,\frac{a}{c}\,tg\,\varphi}{d\varphi}\,d\varphi}{1+\left(\frac{a}{c}\,tg\,\varphi\right)^2} = \frac{1}{ac}\,arc\,cot\left(\frac{a}{c}\,tg\,\varphi\right),$$

so erhält man schliesslich durch Einführung der betreffenden Werthe:

$$\int\frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}\,arc\,cot\,\frac{a\sqrt{b^2-x^2}}{x\sqrt{a^2-b^2}} + C$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}\,arc\,tg\,\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2-x^2}} + C.$$

§. 86. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int x\sin x\,dx = ?$

Aufl. $\sin x - x\cos x + C.$

Andeut. Setze $u = x$, $\frac{dv}{dx} = \sin x.$

2) $\int x \cos x \, dx = ?$

Aufl. $x \sin x + \cos x + C.$

3) $\int x^2 e^x \, dx = ?$

Aufl. $(x^2 - 2x + 2) e^x + C.$

Andeut. Setze $u = x^2$, $\frac{dv}{dx} = e^x$ und benütze obiges Beisp. 3.

4) $\int \arcsin x \, dx = ?$

Aufl. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$

Andeut. Setze $u = \arcsin x$, $\frac{dv}{dx} = 1.$

5) $\int \arccos x \, dx = ?$

Aufl. $x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C.$

6) $\int \operatorname{arctg} x \, dx = ?$

Aufl. $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} l (x^2 + 1) + C.$

7) $\int x^n lx \, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^{n+1} lx}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(lx - \frac{1}{n+1}\right) + C.$

Andeut. Setze $u = lx$; $\frac{dv}{dx} = x^n.$

Elfter Abschnitt.

Integration der rationalen gebrochenen Functionen.

§. 87. Erklärungen.

1) Kommt in einer rationalen Function die Veränderliche nur im Zähler und nur mit positiven Exponenten versehen vor, so heisst dieselbe eine ganze Function. Die allgemeine Form einer solchen ist daher

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \dots$$

Bezeichnen nun $f(x)$ und $F(x)$ zwei ganze rationale Functionen, so wird jede Function von der Form $\frac{f(x)}{F(x)}$ eine rationale gebrochene Function genannt.

2) Ohne der Allgemeinheit zu schaden, kann man annehmen, dass hierin $f(x)$ von niedrigerem Grade sei als $F(x)$; denn im anderen Falle lässt sich aus dem Bruche $\frac{f(x)}{F(x)}$ eine ganze Function $\varphi(x)$ herausziehen, so dass man setzen kann:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \varphi(x) + \frac{\psi(x)}{F(x)}$$

also auch:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \int \left[\varphi(x) + \left[\frac{\psi(x)}{F(x)}\right]\right] dx$$

wo nun $\psi(x)$ wenigstens um einen Grad niedriger ist als $F(x)$.

Das Integral $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$ zerfällt somit in dem bezeichneten lle in die zwei Integrale $\int \varphi(x) dx$ und $\int \frac{\psi(x)}{F(x)} dx$, wovon das erst ch

den früheren Regeln bestimmt werden kann und das zweite von der bemerkten Eigenschaft ist.

§. 88. Zerlegung echtgebrochener Functionen in Partialbrüche.

Enthält $F(x)$ nur Zahlencoefficienten, so lässt sich diese Function in ein Product von Factoren zerlegen, von welchen jeder der Form nach mit einer der vier allgemeinen Formen

$$x - a\,;\ (x - b)^m\,;\ (x - \alpha)^2 + \beta^2\,;\ [(x - \gamma)^2 + \delta^2]^p$$

übereinstimmt.

Man kann alsdann $\frac{f(x)}{F(x)}$ stets in eine algebraische Summe von Brüchen zerlegen, wobei man für jeden Factor von der Form $x - a$ einen Bruch von der Form $\frac{A}{x-a}$, für jeden Factor von der Form $(x - b)^m$ die Summe

$$\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_3}{(x-b)^3} + \cdots + \frac{B_m}{(x-b)^m},$$

für jeden von der Form $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ einen Bruch von der Form $\frac{Px + Q}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$ und endlich für jeden Factor von der Form

$$[(x - \gamma)^2 + \delta^2]^p$$

die Summe

$$\frac{R_1 x + S_1}{(x-\gamma)^2 + \delta^2} + \frac{R_2 x + S_2}{[(x-\gamma)^2 + \delta^2]^2} + \cdots + \frac{R_p x + S_p}{[(x-\gamma)^2 + \delta^2]^p}$$

zu setzen hat.

Man nennt dieses Verfahren das Zerlegen gebrochener Functionen in Partialbrüche.

Die Richtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung ergibt sich aus nachstehender Betrachtung.

Erster Fall. $F(x)$ enthalte nur ungleiche Factoren. Ist $(x - a_1)$ einer dieser Factoren und $F(x) = (x - a_1)\,\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ für $x = a_1$ nicht Null ist, und wir nehmen also an, es bestehe die identische Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x - a_1)\,\varphi(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

wo $f(x)$ von gleichem oder niedrigerem Grade wie $\varphi(x)$ ist, so folgt

$$f(x) = A_1 \varphi(x) + (x - a_1)\,\psi(x)$$

mach für $x = a_1$:

$$f(a_1) = A_1 \varphi(a_1)\,;\ A_1 = \frac{f(a_1)}{\varphi(a_1)}$$

n man berücksichtigt, dass wegen

$$F(x) = (x - a_1)\,\varphi(x)$$

auch $\qquad F'(x) = (x - a_1)\,\varphi'(x) + \varphi(x)$,
also für $x = a_1$: $\qquad F'(a_1) = \varphi(a_1)$
gesetzt werden kann:

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{F'(a_1)}$$

Subtrahirt man den Werth $\dfrac{\frac{f(a_1)}{\varphi(a_1)}}{x - a_1}$ von dem gegebenen Bruche, so wird der Nenner der Differenz jedenfalls um einen Grad niedriger, indem man bekommt

$$\frac{f(x)}{(x - a_1)\,\varphi(x)} - \frac{\frac{f(a_1)}{\varphi(a_1)}}{x - a_1} = \frac{f(x) - \frac{f(a_1)}{\varphi(a_1)}\,\varphi(x)}{(x - a_1)\,\varphi(x)}$$

für $x = a_1$ wird aber der Zähler dieses Bruches Null *), woraus hervorgeht, dass derselbe durch $(x - a_1)$ theilbar ist und $= (x - a_1)\,f_1(x)$ gesetzt werden kann, wo $f_1(x)$ wenigstens um einen Grad niedrigerer ist als $\varphi(x)$. Führt man die Division aus, so resultirt die echt gebrochene Function $\dfrac{f_1(x)}{\varphi(x)}$ und man kann daher schreiben:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{f(a_1)}{\varphi(a_1)}}{x - a_1} + \frac{f_1(x)}{\varphi(x)}$$

wo sich nun hinsichtlich des Bruches $\dfrac{f_1(x)}{\varphi(x)}$ analoge Schlüsse ziehen lassen wie eben für $\dfrac{f(x)}{F(x)}$, so dass man erhält:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_2}{x - a_2} + \frac{f_2(x)}{\varphi_1(x)}\,;\quad \frac{f_2(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{A_3}{x - a_3} + \frac{f_3(x)}{\varphi_2(x)} \text{ u. s. w.}$$

und hiernach:

$$A_2 = \frac{f_1(a_2)}{\varphi'(a_2)} = \frac{f(a_2)}{F'(a_2)}\text{**)}\,;\quad A_3 = \frac{f(a_3)}{F'(a_3)} \text{ u. s. w.}$$

Ist a_1 von der Form $\alpha + \beta i$, also a_2 von der Form $\alpha - \beta i$, so überzeugt man sich leicht, dass alsdann für die Zähler A_1 und A_2 der

*) Der Zähler kann nicht identisch Null sein, weil alsdann $f(x)$ du[illegible] (x) theilbar sein müsste.

**) Denn es ist $F(x) = (x - a_1)\,\varphi(x)$, $F'(x) = (x - a_1)\,\varphi'(x) + \varphi($[illegible]lso für $x = a_2$, da $\varphi(a_2)$ Null ist; $F'(a_2) = (a_2 - a_1)\,\varphi'(a_2)$. Aus

$$f(x) - \frac{f(a_1)}{\varphi(a_1)}\,\varphi(x) = (x - a_1)\,f_1(x)$$

folgt ferner für $x = a_2$: $f(a_2) = (a_2 - a_1)\,f_1(a_2)$.

entsprechenden Partialbrüche conjugirte Werthe gefunden werden und dass man je zwei solcher Brüche in einen von der Form

$$\frac{Px + Q}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

zusammenziehen kann.

Beispiele.

1) Um $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{2x^2 + 6x + 10}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}$ zu zerlegen, setze man

$$f(x) = 2x^2 + 6x + 10,$$
$$F(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x+3)(x+1),$$
$$F'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$
$$a_1 = 2,\ a_2 = -3,\ a_3 = -1,$$

so wird

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{F'(a_1)} = \frac{30}{15} = 2;\ A_2 = \frac{f(a_2)}{F'(a_2)} = 1;\ A_3 = \frac{f(a_3)}{F'(a_3)} = -1$$

und demnach

$$\frac{2x^2 + 6x + 10}{x^3 + 2x^2 - 5x - 10} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{x+1}$$
$$= \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+1}.$$

Anmerk. Aus der Gleichung

$$\frac{2x^2 + 6x + 10}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+3} + \frac{A_3}{x+1}$$

können die Werthe für A_1, A_2, A_3 auch nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten*) bestimmt werden. Denn beseitigt man die Nenner, so folgt

$$2x^2 + 6x + 10 = A_1(x^2 + 4x + 3) + A_2(x^2 - x - 2) + A_3(x^2 + x - 6)$$
$$= (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (4A_1 - A_2 + A_3)x + 3A_1 - 2A_2 - 6A_3$$

und aus den Gleichungen

$$A_1 + A_2 + A_3 = 2$$
$$4A_1 - A_2 + A_3 = 6$$
$$3A_1 - 2A_2 - 6A_3 = 10$$

oder dadurch, dass man in vorstehender Beziehung der Reihe nach

$$x = 2,\ x = -3,\ x = -1$$

setzt, ergeben sich für A_1, A_2, A_3 wieder die schon oben gefundenen Werthe.

2) Ist $\frac{1}{x^4 - 1}$ zu zerlegen, so setze man:

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$$
$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{1}{4x^3};\ a_1 = 1;\ a_2 = -1;\ a_3 = i;\ a_4 = -i.$$

wird alsdann:

$$A_1 = \frac{f(a_1)}{F'(a_1)} = \frac{1}{4};\ A_2 = \frac{f(a_2)}{F'(a_2)} = -\frac{1}{4}$$
$$A_3 = \frac{f(a_3)}{F'(a_3)} = \frac{i}{4};\ A_4 = \frac{f(a_4)}{F'(a_4)} = -\frac{i}{4}$$

*) §. 18 des 2. Theiles meines Lehrbuches der allgem. Arithmetik.

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{i}{x-i} - \frac{i}{x+i}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+1}\right).$$

Anmerk. Um zur Bestimmung der Zähler in diesem Falle den Satz der unbestimmten Coefficienten anzuwenden, setze man nach Obigem

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{Px+Q}{x^2+1}$$

beseitige nun die Nenner, setze alsdann die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x in dieser Gleichung einander gleich und bestimme hieraus die 4 unbekannten Grössen.

Zweiter Fall. $F(x)$ enthalte gleiche Factoren. Ist z. B. $(x-a)^m$ Factor von $F(x)$, also $F(x) = (x-a)^m \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ für $x = a$ nicht Null wird, und wir nehmen wieder an, es bestehe die identische Gleichung

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^m \varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{\psi(x)}{(x-a)^{m-1}\varphi(x)}$$

so folgt daraus:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A + \frac{(x-a)\psi(x)}{\varphi(x)}$$

und hiernach für $x = a$, da $\varphi(a)$ nicht Null ist:

$$A = \frac{f(a)}{\varphi(a)}.$$

Da nun

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m \varphi(x)} - \frac{\dfrac{f(a)}{\varphi(a)}}{(x-a)^m} = \frac{f(x) - \dfrac{f(a)}{\varphi(a)}\varphi(x)}{(x-a)^m \varphi(x)}$$

und der Zähler dieses Bruches für $x = a$ Null wird, derselbe also durch $(x-a)$ theilbar ist, und somit $= (x-a) f_1(x)$ gesetzt werden kann, so ergibt sich

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m \varphi(x)} = \frac{\dfrac{f(a)}{\varphi(a)}}{(x-a)^m} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{m-1}\varphi(x)}.$$

Wendet man nun auf die echtgebrochene Function $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{m-1}\varphi(x)}$ wiederholt dieselbe Schlussfolgerung an, wie eben für $\frac{f(x)}{F(x)}$ oder

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m \varphi(x)}$$

so ergibt sich daraus auch für vorliegenden Fall die Richtigkeit der Behauptung.

Sind unter den gleichen Factoren imaginäre, ist z. B.

$$F(x) = [(x-\gamma)^2 + \delta^2]^m \varphi(x)$$

und man setzt

$$\frac{f(x)}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m \varphi(x)} = \frac{Rx+S}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m} + \frac{\psi(x)}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{m-1}\varphi(x)}$$

also
$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = Rx + S + [(x-\gamma)^2+\delta^2]\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

wo $\varphi(\gamma \pm \delta i)$ nicht Null ist, so ergibt sich hieraus für $x = \gamma + \delta i$:

$$\frac{f(\gamma+\delta i)}{\varphi(\gamma+\delta i)} = R(\gamma+\delta i) + S = h + ki$$

und für $x = \gamma - \delta i$:

$$\frac{f(\gamma-\delta i)}{\varphi(\gamma-\delta i)} = R(\gamma-\delta i) + S = h - ki$$

Aus
$$R\gamma + S = h \text{ und } R\delta = k$$
ergibt sich leicht:

$$R = \frac{k}{\delta}; \; S = h - \frac{k}{\delta}\gamma.$$

Nun ist identisch

$$\frac{f(x)}{F(x)} - \frac{\frac{k}{\delta}x + h - \frac{k}{\delta}\gamma}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m} = \frac{f(x) - \left[\frac{k}{\delta}x + \frac{h\delta - k\gamma}{\delta}\right]\varphi(x)}{F(x)}.$$

Setzt man im Zähler dieses Bruches $x = \gamma \pm \delta i$, so geht derselbe über in:

$$f(\gamma \pm \delta i) - \left[\frac{k}{\delta}(\gamma \pm \delta i) + \frac{h\delta - k\gamma}{\delta}\right]\varphi(\gamma \pm \delta i)$$

$$= \left[h \pm ki - \frac{k}{\delta}\gamma \mp ki - h + \frac{k}{\delta}\gamma\right]\varphi(\gamma \pm \delta i) = 0$$

und ist somit durch $(x-\gamma)^2+\delta^2$ theilbar. Man kann daher schreiben:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{k}{\delta}x + h - \frac{k}{\delta}\gamma}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m} + \frac{f_1(x)}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{m-1}\varphi(x)}$$

woraus sich die Richtigkeit auch für gleiche imaginäre Factoren erkennen lässt.

Um ein Verfahren zu ermitteln, die Zähler der Partialbrüche im Falle der Nenner des vorgelegten Bruches g l e i c h e Factoren hat, rasch zu bestimmen, sei wieder $F(x) = (x-b)^m \varphi(x)$.

:tzt man nun

$$\frac{f}{)} = \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \frac{B_3}{(x-b)^3} + \cdots + \frac{B_m}{(x-b)^m} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

hiernach

$$x) = \varphi(x)\,[B_m + B_{m-1}(x-b) + B_{m-2}(x-b)^2 + \cdots$$
$$+ B_1(x-b)^{m-1}] + (x-b)^m\psi(x),$$

-t durch Differentiation und Einführung von b statt x:

$$f(b) = \varphi(b) B_m$$
$$f'(b) = \varphi'(b) B_m + \varphi(b) B_{m-1}$$
$$f''(b) = \varphi''(b) B_m + 2\varphi'(b) B_{m-1} + 2\varphi(b) B_{m-2}$$
$$f'''(b) = \varphi'''(b) B_m + 3\varphi''(b) B_{m-1} + 6\varphi'(b) B_{m-2} + 6\varphi(b) B_{m-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f^r(b) = \varphi^{(r)}(b) B_m + r\varphi^{(r-1)}(b) B_{m-1} + r(r-1)\varphi^{(r-2)}(b) B_{m-2} + \ldots$$

durch welche Gleichungen die Zähler $B_m, B_{m-1}, \ldots B_1$, der Reihe nach bestimmt sind.

Beispiel.

Es sei $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{-3x^3 + 10x^2 - 10x}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$ der zu zerlegende Bruch.

Da $$F(x) = (x - 2)(x - 1)^3$$

ist, so setze man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$$

und entwickle hieraus:

$$f(x) = A(x-1)^3 + (x-2)\left[B_3 + B_2(x-1) + B_1(x-1)^2\right],$$

so folgt, da

$$f(x) = -3x^3 + 10x^2 - 10x \;;\; f(b) = f(1) = -3$$
$$f'(x) = -9x^2 + 20x - 10 \;;\; f'(b) = f'(1) = 1$$
$$f''(x) = -18x + 20 \;;\; f''(b) = f''(1) = 2$$
$$\varphi(x) = x - 2 \;;\; \varphi(b) = \varphi(1) = -1$$
$$\varphi'(x) = 1 \;;\; \varphi'(b) = 1$$
$$\varphi''(x) = 0 \;;\; \varphi''(b) = 0$$

ist:

$$-3 = -B_3 \;;\; B_3 = 3$$
$$1 = B_3 - B_2 \;;\; B_2 = 2$$
$$2 = 2B_2 - 2B_1 \;;\; B_1 = 1$$

Um nun noch A zu finden, setzen wir in obiger Gleichung $x = 2$, so folgt dafür aus

$$f(x) = A(x-1)^3$$

sofort:

$$-4 = A$$

Man hat daher:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = -\frac{4}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$$

Anmerk. Auch in vorliegendem Falle kann man die Bestimmung der Zähler nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten vornehmen, im Allgemeinen ist jedoch dieses Verfahren viel weitläufiger, als das oben vorgetragene.

§. 89. Aufgaben zur Uebung.

1) $\frac{-3x^2+23x-32}{x^3-5x^2-2x+24} = \frac{2}{x-4} - \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-3}.$

2) $\frac{x-3}{2x^2+13x-7} = \frac{2}{3(x+7)} - \frac{1}{3(2x-1)}.$

3) $\frac{2x^2-3x+1}{x^4-7x^3+9x^2+27x-54} = -\frac{3}{25(x+2)}$

$$+\frac{3}{25(x-3)} + \frac{7}{5(x-3)^2} + \frac{2}{(x-3)^3}.$$

4) $\frac{4x^2-12x+12}{x^3-5x^2+9x-5} = \frac{2}{x-1} + \frac{1+i}{x-2+i} + \frac{1-i}{x-2-i}$

$$= \frac{2}{x-1} + \frac{2x-2}{x^2-4x+5}.$$

5) $\frac{2x^4-6x^3+x^2+11x-9}{x^5-6x^4+14x^3-16x^2+9x-2} = \frac{1}{x-1}$

$$+\frac{3}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{x-2}.$$

6) $\frac{6x^3+6x^2+22x-6}{x^4+2x^2-4x+8} = \frac{5x-1}{x^2-2x+2} + \frac{x-1}{x^2+2x+4}.$

7) $\frac{x^5-2x^3+3x+1}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{4x}{(x^2+1)^2} + \frac{6x+1}{(x^2+1)^3}.$

§. 90. Integration der rationalen gebrochenen Functionen mittelst Zerlegung in Partialbrüche.

1) Wie wir oben in §. 89 gesehen haben, kann mittelst Zerlegung in Partialbrüche, die Integration einer rationalen gebrochenen Function auf die Bestimmung einer Anzahl von Integralen zurückgeführt werden, welche der Form nach enthalten sind in den Ausdrücken:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx\,;\ \int \frac{B}{(x-a)^m}\,dx\,;$$

$$\int \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx\,;\ \int \frac{Rx+S}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}\,dx.$$

Was die Bestimmung der zwei ersten dieser Integrale betrifft, ...lche bereits in dem Früheren enthalten; denn man hat

$$\ldots = A\int \frac{\frac{d}{dx}(x-a)}{x-a}\,dx = Al(x-a) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$f(b) = \varphi(b)\, B_m$$
$$f'(b) = \varphi'(b)\, B_m + \varphi(b)\, B_{m-1}$$
$$f''(b) = \varphi''(b)\, B_m + 2\varphi'(b)\, B_{m-1} + 2\varphi(b)\, B_{m-2}$$
$$f'''(b) = \varphi'''(b) B_m + 3\varphi''(b) B_{m-1} + 6\varphi'(b) B_{m-2} + 6\varphi(b) B_{m-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^r(b) = \varphi^{(r)}(b) B_m + r\varphi^{(r-1)}(b) B_{m-1} + r(r-1)\varphi^{(r-2)}(b) B_{m-2} + \ldots$$

durch welche Gleichungen die Zähler B_m, B_{m-1}, ... B_1, der Reihe nach bestimmt sind.

Beispiel.

Es sei $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{-3x^3 + 10x^2 - 10x}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}$ der zu zerlegende Bruch.

Da $\qquad F(x) = (x-2)(x-1)^3$

ist, so setze man

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_3}{(x-1)^3}$$

und entwickle hieraus:

$$f(x) = A(x-1)^3 + (x-2)\,[B_3 + B_2(x-1) + B_1(x-1)^2],$$

so folgt, da

$$f(x) = -3x^3 + 10x^2 - 10x\ ;\ f(b) = f(1) = -3$$
$$f'(x) = -9x^2 + 20x - 10\ ;\ f'(b) = f'(1) = 1$$
$$f''(x) = -18x + 20\ ;\ f''(b) = f''(1) = 2$$
$$\varphi(x) = x - 2\ ;\ \varphi(b) = \varphi(1) = -1$$
$$\varphi'(x) = 1\ ;\ \varphi'(b) = 1$$
$$\varphi''(x) = 0\ ;\ \varphi''(b) = 0$$

ist:

$$-3 = -B_3\ ;\ B_3 = 3$$
$$1 = B_3 - B_2\ ;\ B_2 = 2$$
$$2 = 2B_2 - 2B_1\ ;\ B_1 = 1$$

Um nun noch A zu finden, setzen wir in obiger Gleichung $x = 2$, so folgt dafür aus

$$f(x) = A(x-1)^3$$

sofort: $\qquad -4 = A$

Man hat daher:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = -\frac{4}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3}$$

Anmerk. Auch in vorliegendem Falle kann man die Bestimmung der nach dem Satze der unbestimmten Coefficienten vornehmen, im Allgemeinen ist dieses Verfahren viel weitläufiger, als das oben vorgetragene.

§. 89. Aufgaben zur Uebung.

1) $\frac{-3x^2+23x-32}{x^3-5x^2-2x+24}=\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x-3}$.

2) $\frac{x-3}{2x^2+13x-7}=\frac{2}{3(x+7)}-\frac{1}{3(2x-1)}$.

3) $\frac{2x^2-3x+1}{x^4-7x^3+9x^2+27x-54}=-\frac{3}{25(x+2)}$
$+\frac{3}{25(x-3)}+\frac{7}{5(x-3)^2}+\frac{2}{(x-3)^3}$.

4) $\frac{4x^2-12x+12}{x^3-5x^2+9x-5}=\frac{2}{x-1}+\frac{1+i}{x-2+i}+\frac{1-i}{x-2-i}$
$=\frac{2}{x-1}+\frac{2x-2}{x^2-4x+5}$.

5) $\frac{2x^4-6x^3+x^2+11x-9}{x^5-6x^4+14x^3-16x^2+9x-2}=\frac{1}{x-1}$
$+\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^4}+\frac{1}{x-2}$.

6) $\frac{6x^3+6x^2+22x-6}{x^4+2x^2-4x+8}=\frac{5x-1}{x^2-2x+2}+\frac{x-1}{x^2+2x+4}$.

7) $\frac{x^5-2x^3+3x+1}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{4x}{(x^2+1)^2}+\frac{6x+1}{(x^2+1)^3}$.

§. 90. Integration der rationalen gebrochenen Functionen mittelst Zerlegung in Partialbrüche.

1) Wie wir oben in §. 89 gesehen haben, kann mittelst Zerlegung in Partialbrüche, die Integration einer rationalen gebrochenen Function auf die Bestimmung einer Anzahl von Integralen zurückgeführt werden, welche der Form nach enthalten sind in den Ausdrücken:

$$\int\frac{A}{x-a}\,dx\,;\int\frac{B}{(x-a)^m}\,dx\,;$$
$$\int\frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx\,;\int\frac{Rx+S}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}\,dx.$$

Was die Bestimmung der zwei ersten dieser Integrale betrifft, ›lche bereits in dem Früheren enthalten; denn man hat

$$:=A\int\frac{\frac{d}{dx}(x-a)}{x-a}\,dx=Al(x-a)+C\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;(1)$$

und $\int \frac{B}{(x-a)^m}\,dx = B\int (x-a)^{-m}\frac{d}{dx}(x-a)\,dx$

$$= \frac{B(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = -\frac{B}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C \quad . \quad (2)$$

3) Um das dritte Integral zu bestimmen, setze man

$$\int \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \int \frac{P(x-\alpha)+P\alpha+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$$

$$= \int \frac{P(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx + \int \frac{P\alpha+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx$$

so folgt nach §. 85 b. Beisp. 1 und 2:

$$\int \frac{Px+Q}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{P}{2}\,l\,[(x-\alpha)^2+\beta^2] +$$

$$\frac{P\alpha+Q}{\beta}\,arc\,tg\,\frac{x-\alpha}{\beta} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

4) Um endlich das vierte Integral zu finden, setze man

$$\int \frac{Rx+S}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}\,dx = \int \frac{R(x-\gamma)+R\gamma+S}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}\,dx$$

$$= R\int \frac{(x-\gamma)}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}\,dx + (R\gamma+S)\int \frac{dx}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}$$

oder nach §. 85. b. Beisp. 3:

$$= -\frac{R}{2(m-1)[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{m-1}} + (R\gamma+S)\int \frac{dx}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m}$$

Es handelt sich also noch um die Bestimmung dieses letzten Integrales.

Setzt man zu diesem Ende

$$\int \frac{dx}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m} = \frac{1}{\delta^{2m}}\int \frac{dx}{\left[\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^2+1\right]^m}$$

und hierin $\frac{x-\gamma}{\delta} = z$,

so erhält man:

$$\int \frac{dx}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^m} = \frac{1}{\delta^{2m-1}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^m}$$

und die Bestimmung des vorgelegten Integrales ist nun auf die von $\int \frac{dz}{(z^2+1)^m}$ zurückgeführt. Der Werth dieses Integrales wu[rde schon] [o]ber bereits in §. 85. a. Beisp. 6 aufgesucht.

Anmerk. Sind $\alpha+\beta i$ und $\alpha-\beta i$ zwei conjugirte imaginäre einfache [Wu]rzeln der Gleichung $F(x)=0$, so findet man für die denselben entsprechenden Partia[lbrü]che:

$$\frac{a+bi}{x-\alpha-\beta i} \text{ und } \frac{a-bi}{x-\alpha+\beta i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die entsprechenden Integrale werden daher:

$$(a + bi)\, l\,(x - \alpha - \beta i) + (a - bi)\, l\,(x - \alpha + \beta i).$$

Nun ist aber nach §. 48. 4

$$l\,(x - \alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2}\, l\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + i\psi$$

wo ψ der kleinste Winkel ist, welcher die Bedingungen

$$\cos\psi = \frac{x - \alpha}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + \beta^2}};\quad \sin\psi = \frac{\beta}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + \beta^2}}$$

genügt. Hieraus folgt:

$$tg\,\psi = \frac{\beta}{x - \alpha},\ \text{also}\ \psi = arc\,tg\,\frac{\beta}{x - \alpha}$$

oder

$$\psi = arc\,tg\,\frac{\beta}{x - \alpha} + \pi.$$

Man darf daher, da immer eine Constante beizufügen ist, setzen:

$$l\,(x - \alpha + \beta i) = \tfrac{1}{2}\, l\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + i\,arc\,tg\,\frac{\beta}{x - \alpha}$$

$$l\,(x - \alpha - \beta i) = \tfrac{1}{2}\, l\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2] - i\,arc\,tg\,\frac{\beta}{x - \alpha}$$

Die Summe der beiden Integrale wird daher:

$$(a + bi)\,(L - iM) + (a - bi)\,(L + iM) = 2\,(aL + bM)$$

$$= a l\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + 2b\,arc\,tg\,\frac{\beta}{x - \alpha},$$

wenn man nämlich der Kürze halber

$$L = \tfrac{1}{2}\, l\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2]\ \text{und}\ M = arc\,tg\,\frac{\beta}{x - \alpha}$$

setzt.

Die Partialbrüche (1) vereinigt geben den reellen Bruch

$$\frac{(a + bi)\,(x - \alpha + \beta i) + (a - bi)\,(x - \alpha - \beta i)}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{2a\,(x - \alpha) - 2b\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

welcher auf die gewöhnliche Weise integrirt das Resultat liefert:

$$a l\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2] - 2b\,arc\,tg\,\frac{x - \alpha}{\beta} + C$$

oder

$$a l\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + 2b\,arc\,tg\,\frac{\beta}{x - \alpha} + C.$$

So könnte man in allen Fällen durch Zerlegung der gebrochenen Function in Partialbrüche von den beiden Formen

$$\frac{A}{x - a}\ \text{und}\ \frac{B}{(x - a)^m}$$

wo a auch imaginär sein kann, das Integral finden; müsste aber dann, um dasselbe auf eine reelle Form zu bringen, für die imaginären Logarithmen, deren in §. 48 festgestellte Bedeutung einführen.

Beispiele.

1) Um $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 9x + 20}\, dx$ zu bestimmen, setze man

$$\frac{2x - 5}{x^2 - 9x + 20} = \frac{A_1}{x - 5} + \frac{A_2}{x - 4},$$

besti Hieraus $A_1 = 5$; $A_2 = -3$, so folgt:

$$\int \frac{2x - 5}{x^2 - 9x + 20}\, dx = \int \frac{5}{x - 5}\, dx - \int \frac{3}{x - 4}\, dx$$

$$= 5l\,(x - 5) - 3l\,(x - 4) + C.$$

$$= l\,\frac{(x - 5)^5}{(x - 4)^3} + C.$$

2) Soll $\int \frac{dx}{a - bx^2}$ bestimmt werden, so setze man

$$\frac{1}{a - bx^2} = \frac{A_1}{\sqrt{a} + x\sqrt{b}} + \frac{A_2}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$$

und entwickele hieraus $A_1 = A_2 = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Man hat alsdann:

$$\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{a} + x\sqrt{b}} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{b}} + x} + \frac{1}{2\sqrt{ab}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \left[l\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + x\right) - l\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - x\right)\right] + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}}\, l \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}}\, l \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + C.$$

Hieraus folgt unmittelbar, wenn man $b = 1$ setzt:

$$3) \int \frac{dx}{a - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\, l \frac{\sqrt{a} + x}{\sqrt{a} - x} + C.$$

4) Es sei $\int \frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 1}\, dx$ zu ermitteln.

Setzt man $\frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \frac{B_1}{x - 1} + \frac{B_2}{(x - 1)^2}$

so folgt $B_1 = 2$; $B_2 = -1$, also

$$\int \frac{2x - 3}{x^2 - 2x + 1}\, dx = \int \frac{2}{x - 1}\, dx - \int \frac{1}{(x - 1)^2}\, dx$$

$$= 2l(x - 1) + \frac{1}{x - 1} + C.$$

5) Ist $\int \frac{3x + 7}{x^2 - 2x + 6}\, dx = \int \frac{3x + 7}{(x - 1)^2 + 5}\, dx$ zu bestimmen, so setze man in Gl. (3) des §. 90

$$P = 3\,,\ Q = 7\,,\ \alpha = 1\,,\ \beta^2 = 5.$$

Man erhält alsdann:

$$\int \frac{3x + 7}{x^2 - 2x + 6}\, dx = \frac{3}{2}\, l\,[(x - 1)^2 + 5] + \frac{10}{\sqrt{5}}\, arctg\, \frac{x -}{\sqrt{5}} \qquad C$$

$$= \frac{3}{2}\, l\,[(x - 1)^2 + 5] + 2\sqrt{5}\, arctg\, \frac{x - 1}{\sqrt{5}} + C.$$

6) Um $\int \frac{z^2 dz}{(z^2-1)^2}$ zu bestimmen, setze

$$\frac{z^2}{(z^2-1)^2} = \frac{z^2}{(z+1)^2(z-1)^2} = \frac{B_1}{z-1} + \frac{B_2}{(z-1)^2} + \frac{B_3}{z+1} + \frac{B_4}{(z+1)^2}$$

und entwickle hieraus die Werthe von B_1, B_2, B_3, B_4. Man erhält alsdann:

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}\right) dz$$

$$= \frac{1}{4}\left[l(z-1) - \frac{1}{z-1} - l(z+1) - \frac{1}{z+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[l\frac{z-1}{z+1} - \frac{2z}{z^2-1}\right] + C.$$

7) Soll $\int \frac{dz}{z^2-3}$ bestimmt werden, so setze

$$\frac{1}{z^2-3} = \frac{A_1}{z-\sqrt{3}} + \frac{A_2}{z+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{z-\sqrt{3}} - \frac{1}{z+\sqrt{3}}\right).$$

Man erhält alsdann

$$\int \frac{dz}{z^2-3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\int \frac{dz}{z-\sqrt{3}} - \int \frac{dz}{z+\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\frac{z-\sqrt{3}}{z+\sqrt{3}} + C.$$

8) $$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 12x - 2}{x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9}\, dx = \int \frac{3x-1}{(x-1)^2+2}\, dx + \int \frac{x+1}{[(x-1)^2+2]^2}\, dx$$

Nach Gl. (3) des §. 90 ist aber

$$\int \frac{3x-1}{(x-1)^2+2}\, dx = \frac{3}{2}\, l[(x-1)^2+2] + \sqrt{2}\, arc\, tg \frac{x-1}{\sqrt{2}}.$$

Um nun noch $\int \frac{x+1}{[(x-1)^2+2]^2}\, dx$ zu bestimmen, verfahre man auf die [illegible] §. 90 angegebene Weise und setze darum

$$\int \frac{x+1}{[(x-1)^2+2]^2}\, dx = \int \frac{x-1+2}{[(x-1)^2+2]^2}\, dx$$

$$= \int \frac{x-1}{[(x-1)^2+2]^2}\, dx + 2\int \frac{dx}{[(x-1)^2+2]^2}.$$

Nun ist aber, wenn man $x - 1 = y$ setzt,

$$\int \frac{x-1}{[(x-1)^2+2]^2}\,dx = \int \frac{y}{(y^2+2)^2}\,dy = \frac{1}{2}\int (y^2+2)^{-2}\frac{d}{dy}(y^2+2)dy$$

$$= -\frac{1}{2(y^2+2)} = -\frac{1}{2[(x-1)^2+2]}$$

und wenn man für $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = z$ einführt,

$$2\int \frac{dx}{[(x-1)^2+2]^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^2},$$

also nach §. 85. b. Beisp. 7:

$$\int \frac{x+1}{[(x-1)^2+2]^2}\,dx = -\frac{1}{2[(x-1)^2+2]} + \frac{x-1}{2[(x-1)^2+2]}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{x-1}{\sqrt{2}}.$$

Es ist somit endlich:

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 12x - 2}{x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9}\,dx = \frac{3}{2}\,l\,[(x-1)^2+2] +$$

$$\frac{5}{2\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-2}{2[(x-1)^2+2]} + C.$$

9) $$\int \frac{x^7}{2x^3+1}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x + \frac{\frac{1}{4}x}{2x^3-1}\right)dx$$

$$= \frac{x^5}{10} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{2x^3+1}.$$

Um nun $\int \frac{x\,dx}{2x^3+1}$ zu bestimmen, setze man

$$\frac{x}{2x^3+1} = \frac{A}{x\sqrt[3]{2}+1} + \frac{Px+Q}{x^2\sqrt[3]{4} - x\sqrt[3]{2} + 1}$$

und suche hieraus $A = -\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$; dann wird

$$\frac{Px+Q}{x^2\sqrt[3]{4} - x\sqrt[3]{2} + 1} = \frac{x}{2x^3+1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{2}\,(x\sqrt[3]{2}+1)} =$$

$$\frac{3x\sqrt[3]{2} + x^2\sqrt[3]{4} - x\sqrt[3]{2} + 1}{(2x^3+1)\,3\sqrt[3]{2}} = \frac{(x\sqrt[3]{2}+1)^2}{(x\sqrt[3]{2}+1)\,(x^2\sqrt[3]{4} - x\sqrt[3]{2}+1)\,3\sqrt[3]{2}}$$

$$= \frac{x\sqrt[3]{2}+1}{(x^2\sqrt[3]{4} - x\sqrt[3]{2}+1)\,3\sqrt[3]{2}}$$

Es ist somit:

$$\int \frac{x\,dx}{2x^3+1} = -\int \frac{dx}{(x\sqrt[3]{2}+1)\,3\sqrt[3]{2}} + \int \frac{x\sqrt[3]{2}+1}{(x^2\sqrt[3]{4}-x\sqrt[3]{2}+1)\,3\sqrt[3]{2}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\,l\,(x\sqrt[3]{2}+1)$$

$$+\frac{1}{6\sqrt[3]{4}}\left[\int \frac{2x\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{x^2\sqrt[3]{4}-x\sqrt[3]{2}+1}\,dx + \int \frac{3\sqrt[3]{2}}{x^2\sqrt[3]{4}-x\sqrt[3]{2}+1}\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}\,l\,(x\sqrt[3]{2}+1) + \frac{1}{6\sqrt[3]{4}}\,l\,(x^2\sqrt[3]{4}-x\sqrt[3]{2}+1)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{4}-x\sqrt[3]{2}+1}$$

oder da

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{4}-x\sqrt[3]{2}+1} = \int \frac{dx}{(x\sqrt[3]{2}-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{4}{3}\,dx}{\left(\frac{2x\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{2}\,.\,\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{2x\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{3}}$$

so wird das verlangte Integral

$$\int \frac{x^7}{2x^3+1}\,dx = \frac{x^5}{10} - \frac{x^2}{8} - \frac{1}{12\sqrt[3]{4}}\,l\,(x\sqrt[3]{2}+1)$$

$$+\frac{1}{24\sqrt[3]{4}}\,l\,(x^2\sqrt[3]{4}-x\sqrt[3]{2}+1) + \frac{1}{4\sqrt[6]{432}}\,arc\,tg\,\frac{2x\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

§. 91. Bestimmung des Integrales

$$\int \frac{x^m\,dx}{(a+bx+cx^2)^p}.$$

1) Um dieses Integral zu entwickeln, gehen wir zunächst von dem einfacheren $\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$ aus und schreiben dafür:

$$\frac{1}{c}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4c^2}},$$

sc für $4ac > b^2$ oder $4ac - b^2 > 0$ unmittelbar nach §. 90 (3),

w ‑n daselbst

$$\alpha = -\frac{b}{2c}\,,\ \beta = \frac{1}{2c}\sqrt{4ac-b^2}\,,\ P = 0\,,\ Q = 1$$

s(

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{2c}{\sqrt{4ac - b^2}} \, arctg \, \frac{2cx + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C \; . \quad (1)$$

2) Ist $4ac < b^2$, also $4ac - b^2 < 0$, so schreibe

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4c^2}} = 4c \int \frac{dx}{(2cx + b)^2 - (b^2 - 4ac)}$$

und setze $\qquad 2cx + b = y \, ; \, b^2 - 4ac = \alpha.$

Man erhält alsdann:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = 2 \int \frac{dy}{y^2 - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \, l \, \frac{\sqrt{\alpha} - y}{\sqrt{\alpha} + y}$$

und hiernach durch Einführung der betreffenden Werthe von α und y:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \, l \, \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - 2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac} + 2cx + b} + C \quad . \quad (2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \, l \, \frac{2cx + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2cx + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} + C \quad . \quad (3)$$

wenn man nämlich berücksichtigt, dass $\frac{dl(-u)}{dx} = \frac{dlu}{dx}$ ist.

3) Ist $4ac = b^2$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{c} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2} = 4c \int \frac{dx}{(2cx + b)^2}$$

oder wenn man $2cx + b = y$ setzt,

$$\int \frac{dx}{a + bx + cx^2} = 2 \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{2}{y} = -\frac{2}{2cx + b} + C \; . \quad (4)$$

4) Aus $l\,(a + bx + cx^2) = \int \frac{b + 2cx}{a + bx + cx^2} \, dx$

$$= \int \frac{bdx}{a + bx + cx^2} + 2c \int \frac{xdx}{a + bx + cx^2}$$

fliesst unmittelbar die Gleichung:

$$\int \frac{xdx}{a + bx + cx^2} = \frac{1}{2c} \, l\,(a + bx + cx^2) - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{a + bx + cx^2} \quad . \quad (5)$$

und ist somit auf das vorige zurückgeführt.

5) Um $\int \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^p}$ zu bestimmen, setzen wir de ze halber

$$a + bx + cx^2 = X,$$

so folgt aus

$$\frac{d}{dx} \frac{b + 2cx}{X^{p-1}} = \frac{2cX - (p - 1)(b + 2cx)^2}{X^p}$$

oder da $(b + 2cx)^2 = 4cX + b^2 - 4ac$ ist, aus

$$\frac{d}{dx}\frac{b+2cx}{X^{p-1}} = \frac{2cX - 4c\,(p-1)\,X - (p-1)\,(b^2-4ac)}{X^p}$$

$$= -\frac{2c\,(2p-3)}{X^{p-1}} - \frac{(p-1)\,(b^2-4ac)}{X^p}$$

unmittelbar:

$$\frac{b+2cx}{X^{p-1}} = -2c\,(2p-3)\int\frac{dx}{X^{p-1}} - (p-1)\,(b^2-4ac)\int\frac{dx}{X^p}$$

oder

$$\int\frac{dx}{X^p} = \frac{b+2cx}{(p-1)\,(4ac-b^2)\,X^{p-1}} + \frac{2c\,(2p-3)}{(p-1)\,(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{X^{p-1}} \quad (6)$$

6) Da ferner

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{m-1}}{X^{p-1}} = \frac{X\,(m-1)\,x^{m-2} - (p-1)\,x^{m-1}\,(2cx+b)}{X^p}$$

$$= (m-2p+1)\,\frac{cx^m}{X^p} + (m-p)\,\frac{bx^{m-1}}{X^p} + (m-1)\,\frac{ax^{m-2}}{X^p}$$

so ergibt sich hieraus:

$$\int\frac{x^m\,dx}{X^p} = \frac{x^{m-1}}{c\,(m-2p+1)\,X^{p-1}} - \frac{b\,(m-p)}{c\,(m-2p+1)}\int\frac{x^{m-1}}{X^p}\,dx$$

$$- \frac{a\,(m-1)}{c\,(m-2p+1)}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{X^p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Mittelst der Reductionsformeln (6) und (7) kann nun leicht jedes Integral von der Form

$$\int\frac{A + Bx + Cx^2 + \ldots + Mx^m}{(a+bx+cx^2)^p}\,dx$$

bestimmt werden.

7) Setzt man $-m+2$ statt m in Gl. (7), so ergibt sich daraus:

$$\int\frac{dx}{x^m X^p} = -\frac{1}{a\,(m-1)\,x^{m-1}\,X^{p-1}} - \frac{b\,(p+m-2)}{a\,(m-1)}\int\frac{dx}{x^{m-1}\,X^p}$$

$$- \frac{c\,(2p+m-3)}{a\,(m-1)}\int\frac{dx}{x^{m-2}\,X^p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Für $m = 1$ ist diese Formel nicht anwendbar.

Um das Integral $\int\frac{dx}{x\,X^p}$ zu bestimmen, setze man $x = \frac{1}{y}$. Man erh[illegible]n:

$$\frac{dy}{{}_2}\cdot y\cdot\frac{1}{\left(a+\frac{b}{y}+\frac{c}{y^2}\right)^p} = -\int\frac{dy}{y}\cdot\frac{y^{2p}}{(ay^2+by+c)^p}$$

$$= -\int\frac{y^{2p-1}\,dy}{(ay^2+by+c)^p}.$$

Dieses Integral kann man nun mittelst (6) und (7) leicht bestimmen. Für y hat man schliesslich $\frac{1}{x}$ zu setzen.

Anmerk. Der Herleitung zufolge sind die Reductionsformeln (6) und (7) für jeden Werth von m und p giltig, sie liefern jedoch nur dann brauchbare Resultate, wenn m und p ganze positive Zahlen bezeichnen. Reductionsformeln, für gebrochene Werthe von m und p sich eignend, werden wir später kennen lernen.

§. 92. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int \frac{8x - 17}{x^2 - 5x + 4} dx = ?$

Aufl. $3l(x-1) + 5l(x-4) = l[(x-1)^3(x-4)^5] + C.$

Andeut. $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4).$

2) $\int \frac{11x - 57}{x^2 - 12x + 27} dx = ?$

Aufl. $4l(x-3) + 7l(x-9) = l[(x-3)^4(x-9)^7] + C.$

3) $\int \frac{15 - 2x}{x^2 - x - 12} dx = ?$

Aufl. $l(x - 4) - 3l(x + 3) = l\frac{x - 4}{(x + 3)^3} + C.$

4) $\int \frac{x + 52}{x^2 - 4x - 32} dx = ?$

Aufl. $5l(x - 8) - 4l(x + 4) = l\frac{(x - 8)^5}{(x + 4)^4} + C.$

5) $\int \frac{4x^2 - 48x + 90}{x^3 - 6x^2 - 9x + 54} dx = ?$

Aufl. $l(x - 3) - 2l(x - 6) + 5l(x + 3)$

$$= l\frac{(x - 3)(x + 3)^5}{(x - 6)^2} + C.$$

Andeut. $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = (x - 3)(x - 6)(x + 3).$

6) $\int \frac{10x^2 - 23x - 7}{x^3 - 13x + 12} dx = ?$

Aufl. $2l(x - 1) + l(x - 3) + 7l(x + 4)$

$$= l[(x - 1)^2(x - 3)(x + 4)^7] + C.$$

7) $\int \frac{12x^2 + 17x - 5}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx = ?$

Aufl. $4l(x - 1) + 5l(x + 1) + 3l(x + 2)$

$$= l[(x - 1)^4(x + 1)^5(x + 2)^3] +$$

8) $\int \frac{10x^3 - 70x^2 + 150x - 96}{x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24} dx = ?$

Aufl. $l(x - 1)(x - 2)^2(x - 3)^3(x - 4)^4 +$

9) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 6}{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1} dx = ?$

Aufl. $l(x-1) - \frac{5}{x-1} - \frac{7}{(x-1)^2} - \frac{4}{3(x-1)^3}$

$= l(x-1) - \frac{15x^2 - 9x - 2}{3(x-1)^3} + C.$

Andeut. $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = (x-1)^4.$

10) $\int \frac{6x^2 - 11x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx = ?$

Aufl. $-\frac{4}{x-1} + 3l(x-1)(x-2) + C.$

Andeut. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2).$

11) $\int \frac{-x^3 + 9x^2 - 25x + 19}{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12} dx = ?$

Aufl. $-\frac{3}{x-2} + l\frac{x-2}{(x-1)(x-3)} + C.$

Andeut. $x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = (x-2)^2(x-1)(x-3).$

11a) $\int \frac{2x+3}{x^2(1+x)} dx = ?$

Aufl. $-lx - \frac{3}{x} + l(1+x) = -\frac{3}{x} + l\frac{1+x}{x} + C.$

Andeut. $\frac{2x+3}{x^2(1+x)} = \frac{2(x+1)+1}{x^2(1+x)} = \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2(1+x)}$

und $\frac{1}{x^2(1+x)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}$ u. s. w.

12) $\int \frac{3x^3 - 4x^2 - 17x + 54}{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9} dx = ?$

Aufl. $l[(x+1)^2(x-3)] - \frac{7x-9}{(x+1)(x-3)} + C.$

Andeut. $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9 = (x+1)^2(x-3)^2.$

13) $\int \frac{3x-5}{x^2 + 6x + 11} dx = ?$

Aufl. $\frac{3}{2} l(x^2 + 6x + 11) - 7\sqrt{2}\, arctg \frac{x+3}{\sqrt{2}} + C.$

Andeut. $\int \frac{3x-5}{x^2+6x+11} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6) - 14}{x^2+6x+11} dx$

$= \frac{3}{2} l(x^2 + 6x + 11) - 14 \int \frac{dx}{(x+3)^2 + 2}$ u. s. w.

$\int \frac{-x^2 + 3x - 17}{x^3 - 4x^2 + 9x - 10} dx = ?$

Aufl. $l\frac{x^2 - 2x + 5}{(x-2)^3} + \frac{3}{2} arctg \frac{x-1}{2} + C.$

Andeut. $\int \frac{x^2 - 3x + 17}{x^3 - 4x^2 + 9x - 10} dx = \int \frac{2x + 1}{(x - 1)^2 + 4} dx - 3\int \frac{dx}{x-2}$

$= \int \frac{2(x - 1) + 3}{(x - 1)^2 + 4} dx - 3\int \frac{dx}{x - 2} = l[(x - 1)^2 + 4] - 3l(x - 2)$

$+ 3\int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 4}$ u. s. w.

15) $\int \frac{5x^2 + 15x + 22}{x^3 + 5x^2 + 11x + 7} dx = ?$

Aufl. $3l(x + 1) + l[(x + 2)^2 + 3] - \sqrt{3}\, arctg \frac{x + 2}{\sqrt{3}} + C$

$= l[(x + 1)^3 (x^2 + 4x + 7)] - \sqrt{3}\, arctg \frac{x + 2}{\sqrt{3}} + C.$

Andeut. $\int \frac{5x^2 + 15x + 22}{x^3 + 5x^2 + 11x + 7} dx = \int \frac{3dx}{x + 1} + \int \frac{2x + 1}{(x + 2)^2 + 3} dx$

$= 3\int \frac{dx}{x + 1} + \int \frac{2(x + 2) - 3}{(x + 2)^2 + 3} dx$

$= 3l(x + 1) + l[(x + 2)^2 + 3] - 3\int \frac{dx}{(x + 2)^2 + 3}$ u. s. w.

16) $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 13x + 2}{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16} dx = ?$

Aufl. $l[(x + 1)^2 + 3] - \frac{11}{6\sqrt{3}} arctg \frac{x + 1}{\sqrt{3}}$

$- \frac{5x + 14}{6[(x + 1)^2 + 3]} + C.$

Andeut. $\int \frac{2x^3 + 5x^2 + 13x + 2}{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16} dx = \int \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 + 3} dx +$
$\int \frac{3x - 2}{[(x + 1)^2 + 3]^2} dx$; $\int \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 + 3} dx = \int \frac{2(x + 1)}{(x + 1)^2 + 3} dx$

$- \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 3} = l[(x + 1)^2 + 3] - \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x + 1}{\sqrt{3}}$;

$\int \frac{3x - 2}{[(x + 1)^2 + 3]^2} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x + 1)}{[(x + 1)^2 + 3]^2} dx - 5\int \frac{dx}{[(x + 1)^2 + 3]^2}$

$= -\frac{3}{2}\frac{1}{(x + 1)^2 + 3} - 5\int \frac{dx}{[(x + 1)^2 + 3]^2}$; $\int \frac{dx}{[(x + 1)^2 + 3]^2} = \int \frac{dz}{(z^2 + 3)^2}$

$= \frac{z}{6(z^2 + 3)} + \frac{1}{6\sqrt{3}} arctg \frac{z}{\sqrt{3}}$ u. s. w.

17) $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x - 5}{x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4} dx = ?$

Aufl. $l[(x + 1)^2 + 1] - 5 arctg(x + 1) - \frac{4x + 5}{2[(x + 1)^2 + 1]} + C$

Andeut. $\int \frac{2x^3+3x^2+3x-5}{x^4+4x^3+8x^2+8x+4}\,dx = \int \frac{2x-1}{(x+1)^2+1}\,dx + \int \frac{x-3}{[(x+1)^2+1]^2}\,dx = \int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}\,dx - 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{[(x+1)^2+1]^2}\,dx - 4\int \frac{dx}{[(x+1)^2+1]^2} = l\,[(x+1)^2+1] - 3\,arctg\,(x+1) - \frac{1}{2\,[(x+1)^2+1]} - 4\left[\frac{x+1}{2\,[(x+1)^2+1]} + \frac{1}{2}\,arctg\,(x+1)\right]$

u. s. w.

18) $\int \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\,l\,\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$

Andeut. Setze $\frac{1-x^2}{1-x^2+x^4} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2-3x^2} = \frac{P_1x+Q_1}{1+x\sqrt{3}+x^2} + \frac{P_2x+Q_2}{1-x\sqrt{3}+x^2}$; bestimme $P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $P_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}$ u. s. w.

19) $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}.$

Andeut. Setze

$$\frac{1-x^2}{1+x^4} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2-2x^2} = \frac{P_1x+Q_1}{1+x\sqrt{2}+x^2} + \frac{P_2x+Q_2}{1-x\sqrt{2}+x^2}$$

bestimme $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $P_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}$ u. s. w.

20) $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$

Andeut. Setze

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1+x^2}{(x^2+1)^2-2x^2} = \frac{P_1x+Q_1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{P_2x+Q_2}{x^2-x\sqrt{2}+1},$$

bestimme $P_1 = P_2 = 0,\ Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2},$

so wird

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{(x\sqrt{2}+1)^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{(x\sqrt{2}-1)^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,[arctg\,(x\sqrt{2}+1) + arctg\,(x\sqrt{2}-1)]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,arctg\,\frac{2x\sqrt{2}}{1-(2x^2-1)}$$ u. s. w.

21) $\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}.$

Andeut. Setze $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x+x^2} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x+x^2}$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\frac{2}{3}}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

so wird

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(arc\,tg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + arc\,tg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{\frac{4x}{\sqrt{3}}}{1-\frac{4x^2-1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,arc\,tg\,\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$$

22) $\int \frac{1+x^2+x^6+x^8}{1+x^{10}}\,dx$

Aufl. $\frac{1}{\sqrt{5}}\,arc\,tg\,\frac{x(1-x^2)\sqrt{5}}{x^4-3x^2+1}.$

Andeut. Setze

$$\frac{1+x^2+x^6+x^8}{1+x^{10}} = \frac{(1+x^2)(1+x^6)}{(1+x^2)(1-x^2+x^4-x^6+x^8)}$$

$$= \frac{1+x^6}{1-x^2+x^4-x^6+x^8} = \frac{1+x^6}{(x^4-\alpha x^2+1)(x^4-\beta x^2+1)} = \frac{Z}{N}$$

wo $\alpha+\beta = 1$, $\alpha\beta = -1$; $\alpha = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$; $\beta = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$
so wird

$$x^4-\alpha x^2+1 = (x^2-1)^2+\beta^2x^2$$

$$x^4-\beta x^2+1 = (x^2-1)^2+\alpha^2x^2$$

und man erhält wie in vorhergehendem Beispiele:

$$\frac{Z}{N} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\beta(x^2+1)}{x^4-\alpha x^2+1} - \frac{\alpha(x^2+1)}{x^4-\beta x^2+1}\right]$$

$$\int \frac{Z}{N}\,dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(arc\,tg\,\frac{x^2-1}{\alpha x} - arc\,tg\,\frac{x^2-1}{\beta x}\right) \quad \ldots\ldots (\mu)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\,arc\,tg\,\frac{\frac{x^2-1}{\alpha x}-\frac{x^2-1}{\beta x}}{1+\frac{(x^2-1)^2}{\alpha\beta x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,arc\,tg\,\frac{(1-x^2)\,x\sqrt{5}}{x^4-3x^2+1}$$

23) $\int \frac{(1-x^6)\,dx}{1+x^2+x^4+x^6+x^8} = ?$

Aufl. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\,l\,\frac{(x^2+1)^2+x^2+x(x^2+1)\sqrt{5}}{(x^2+1)^2+x^2-x(x^2+1)\sqrt{5}}.$

Andeut. Setze

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 = (x^4 + \alpha x^2 + 1)(x^4 + \beta x^2 + 1)$$

wo

$$\alpha + \beta = 1 \ ; \ \alpha\beta = -1,$$

also $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \ ; \ \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \ ; \ \alpha^2 = 2 - \beta \ ; \ \beta^2 = 2 - \alpha,$

so wird

$$x^4 + \alpha x^2 + 1 = (x^2 + \beta x + 1)(x^2 - \beta x + 1)$$

$$x^4 + \beta x^2 + 1 = (x^2 + \alpha x + 1)(x^2 - \alpha x + 1)$$

und aus

$$\frac{1 - x^6}{1 - x^2 + x^4 + x^6 + x^8} = \frac{Z}{N} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4 + \alpha x^2 + 1} + \frac{A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1}{x^4 + \beta x^2 + 1}$$

folgt:

$$A = A_1 = 0 \ ; \ B = \frac{\beta}{\sqrt{5}} \ ; \ B_1 = -\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$$

$$C = C_1 = 0 \ ; \ D = -\frac{\beta}{\sqrt{5}} \ ; \ D_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$$

Daher ist

$$\frac{Z}{N} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{\beta(x^2 - 1)}{x^4 + \alpha x^2 + 1} - \frac{\alpha(x^2 - 1)}{x^4 + \beta x^2 + 1}\right]$$

Ferner ist

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + \alpha x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2 + (\alpha - 2)x^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2 - \beta^2 x^2}$$

$$= \frac{P_1x + Q_1}{x^2 + \beta x + 1} + \frac{P_2x + Q_2}{x^2 - \beta x + 1} = \frac{\alpha x - \frac{1}{2}}{x^2 + \beta x + 1} - \frac{\alpha x + \frac{1}{2}}{x^2 - \beta x + 1}$$

$$= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{2x + \beta}{x^2 + \beta x + 1} - \frac{2x - \beta}{x^2 - \beta x + 1}\right)$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^4 + \beta x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2 - (2 - \beta)x^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2 - \alpha^2 x^2}$$

$$= \frac{\beta}{2}\left(\frac{2x + \alpha}{x^2 + \alpha x + 1} - \frac{2x - \alpha}{x^2 - \alpha x + 1}\right)$$

Daher

$$\int \frac{Z}{N}\,dx = \frac{\alpha\beta}{2\sqrt{5}}\, l\, \frac{(x^2 + \beta x + 1)(x^2 - \alpha x + 1)}{(x^2 - \beta x + 1)(x^2 + \alpha x + 1)} \text{ u. s. w.}$$

Zwölfter Abschnitt.

Integration irrationaler Functionen.

§. 93. Erklärungen.

1) Ist eine irrationale Function zur Integration vorgelegt, so hat man zunächst zu untersuchen, ob dieselbe nicht durch eine geschickt gewählte Substitution rational gemacht werden kann. Gelingt solches, so kann das Integral nach den früheren Regeln bestimmt werden. Die Auffindung einer passenden Substitution ist oft mit Schwierigkeiten verknüpft und für viele Functionen gelingt die Zurückführung auf eine rationale Form gar nicht.

2) Ist in den einzelnen Gliedern des Zählers und Nenners einer gebrochenen Function die Veränderliche mit negativen oder gebrochenen Exponenten versehen, so können diese immer leicht entfernt werden.

Beispiele.

1) $\int \frac{2x^{-3} + 3x^{-2}}{x^{-1} + x^{-2}} dx$ sei das vorgelegte Integral.

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit x^3, so folgt aus

$$\frac{2 + 3x}{x^2 + x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x + 1}$$

$$A_1 = 2 \,, A_2 = 1$$

also ist

$$\int \frac{2 + 3x}{x^2 + x} dx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x + 1}$$

$$= 2lx + l\,(x + 1) = lx^2\,(x + 1) +$$

2) Um $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx$ zu bestimmen, setze man $x = z^6$, so geht das vorgelegte Integral über in:

$$\int \frac{z^3+z^2}{z^3+1} \cdot 6z^5\,dz = 6\int \frac{z^8+z^7}{z^3+1}\,dz$$

$$= 6\int (z^5+z^4-z^2-z)\,dz + 6\int \frac{z^2+z}{z^3+1}\,dz$$

$$= z^6 + \frac{6}{5}z^5 - 2z^3 - 3z^2 + 6\int \frac{z\,dz}{z^2-z+1}$$

Nun ist aber

$$\int \frac{z\,dz}{z^2-z+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2z-1+1}{z^2-z+1}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\,l\,(z^2-z+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2-z+1}$$

und

$$\int \frac{dz}{z^2-z+1} = \int \frac{dz}{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{4}{3}\,dz}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dz}{\left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$$

also

$$6\int \frac{z\,dz}{z^2-z+1} = 3l\,(z^2-z+1) + 2\sqrt{3}\,arctg\,\frac{2z-1}{\sqrt{3}}$$

und somit das verlangte Integral

$$= x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 3l\,(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{6}} + 1)$$

$$+ 2\sqrt{3}\,arctg\,\frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}}.$$

3) Soll $\int (a+bx)^{\frac{m}{n}}\,dx$ bestimmt werden, so setze man

$$a + bx = z\,;\ \frac{dx}{dz} = \frac{1}{b}.$$

Dann wird

$$\int (a+bx)^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{1}{b}\int z^{\frac{m}{n}}\,dz = \frac{1}{b}\,\frac{z^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1}$$

$$= \frac{n}{b\,(m+n)}\,(a+bx)^{\frac{m}{n}+1} + C,$$

3) Hat das Integral die Form $\int f(x, \sqrt[n]{a+bx})\,dx$, wo f eine rationale Function von x und $\sqrt[n]{a+bx}$ bezeichnet, so setze man

$$a + bx = z^n,$$

um dasselbe rational zu machen.

Beispiele.

1) Um $\int \frac{dx}{m + n\sqrt{a+bx}}$ zu bestimmen, setze

$$a + bx = z^2, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2z}{b},$$

so folgt:

$$\int \frac{dx}{m + n\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{bn}\int \frac{nz\,dz}{nz+m} = \frac{2}{bn}\int \frac{nz + m - m}{nz+m}\,dz$$

$$= \frac{2}{bn}\int\left(1 - \frac{m}{nz+m}\right)dz = \frac{2}{bn}\left[z - \frac{m}{n}\,l\,(nz+m)\right]$$

$$= \frac{2}{bn}\sqrt{a+bx} - \frac{2m}{bn^2}\,l\left(m + n\sqrt{a+bx}\right) + C.$$

2) Ist $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x}}$ zu bestimmen, so setze

$$2 + x = z^2, \quad \frac{dx}{dz} = 2z$$

dann folgt:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x}} = 2\int \frac{dz}{z^2-1} = \int\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)dz$$

$$= l\,\frac{z-1}{z+1} = l\,\frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{2+x}+1} + C.$$

3) Soll $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$ bestimmt werden, so setze $x + 1 = z^3$, dann wird

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = 3\int \frac{z^2\,dz}{z+1} = 3\int \frac{z^2 - 1 + 1}{z+1}\,dz$$

$$= 3\int\left(z - 1 + \frac{1}{z+1}\right)dz = 3\left[\frac{z^2}{2} - z + l\,(z+1\right.$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 3l\,(1 + \sqrt[3]{x+1})$$

4) Hat das Integral die Form

$$\int f(x, \sqrt{a + bx}, \sqrt{a_1 + b_1 x})\, dx$$

wo f eine rationale Function von $x, \sqrt{a + bx}$ und $\sqrt{a_1 + b_1 x}$ bezeichnet, so setze man

$$\sqrt{a_1 + b_1 x} = z \; ; \; x = \frac{z^2 - a_1}{b_1} \; ; \; \frac{dx}{dz} = \frac{2z}{b_1};$$

dann geht dasselbe über in:

$$\frac{2}{b_1} \int f\left(\frac{z^2 - a_1}{b_1}, \sqrt{\frac{ab_1 - a_1 b + bz^2}{b_1}}, z\right) zdz$$

und wenn man nun nochmals transformirt, wird das Integral rational.

Beispiele.

1) $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x + 1}}\, dx$ sei das vorgelegte Integral, Setzt man

$$\sqrt{x} = z \; ; \; x = z^2 \; ; \; \frac{dx}{dz} = 2z$$

so wird

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x + 1}}\, dx = 2 \int \frac{1 + z}{1 + \sqrt{z^2 + 1}}\, zdz$$

und wenn man hierin

$$\sqrt{z^2 + 1} = z + y \; ; \; z = \frac{1 - y^2}{2y} \; ; \; 1 + z = \frac{1 + 2y - y^2}{2y};$$

also

$$\sqrt{z^2 + 1} = z + y = \frac{1 + y^2}{2y} \; ; \; \frac{dz}{dy} = -\frac{y^2 + 1}{2y^2}$$

substituirt,

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x + 1}}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{-y^5 + 3y^4 - 2y^3 + 2y^2 - y - 1}{y^4 + y^3}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(-y + 4 - \frac{6y^3 - 2y^2 + y + 1}{y^3(y + 1)}\right) dy$$

$$= -\frac{y^2}{4} + 2y - \frac{1}{2} \int \frac{6y^3 - 2y^2 + y + 1}{y^3(y + 1)}\, dy$$

oder da

$$\int \frac{6y^3 - 2y^2 + y + 1}{y^3(y + 1)}\, dy = \int \left(\frac{8}{y + 1} + \frac{1}{y^3} - \frac{2}{y}\right) dy$$

$$= 8l(y + 1) - \frac{1}{2y^2} - 2ly$$

is

$$\frac{- \sqrt{x}}{\sqrt{\;\;} + 1}\, dx = -\frac{y^2}{4} + 2y - 4l(y + 1) + \frac{1}{4y^2} + ly$$

$$= l\, \frac{y}{(y + 1)^4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{y^2} - y^2\right) + 2y.$$

Führt man nun wieder $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $\frac{1}{y} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$, also $\frac{1}{y^2} - y^2 = 4\sqrt{x(x+1)}$ ein, so resultirt:

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x+1}} dx = l \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{(1+\sqrt{x+1}-\sqrt{x})^4} + \sqrt{x(x+1)}$$
$$+ 2(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$$

2) Ist $\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x}} dx$ zu bestimmen, so erhält man auf ganz analoge Weise wie vorhin:

$$\int \frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{1+\sqrt{z^2+1}}{1-z} zdz$$
$$= -2\int \frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z-1}(z-1+1)\, dz$$
$$= -2\int (1+\sqrt{z^2+1})\left(1+\frac{1}{z-1}\right) dz$$
$$= -2\int (1+\sqrt{z^2+1})\, dz - 2\int \frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z-1} dz$$
$$= -2z - 2\int \sqrt{z^2+1}\, dz - 2\int \frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z-1} dz$$
$$= -2z - z\sqrt{z^2+1} - l(z+\sqrt{z^2+1}) - 2\int \frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z-1} dz.$$

Setzt man nun wieder $\sqrt{z^2+1} = z + y$, so wird

$$2\int \frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z-1} dz = \int \frac{y^4+2y^3+2y^2+2y+1}{y^4+2y^3-y^2} dy$$
$$= y + \int \frac{3y^2+2y+1}{y^2(y^2+2y-1)} dy$$
$$= y - \int \left(\frac{4}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{4y+4}{y^2+2y-1} - \frac{8}{y^2+2y-1}\right) dy$$
$$= y - 4ly + \frac{1}{y} + 2l(y^2+2y-1) + 8\int \frac{dy}{(y+1)^2-2}$$

oder da

$$\frac{1}{(y+1)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{y+1+\sqrt{2}}\right)$$

also

$$8\int \frac{dy}{(y+1)^2-2} = \frac{8}{2\sqrt{2}}\, l\, \frac{y+1-\sqrt{2}}{y+1+\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\, l\, \frac{y+1-}{y+1+}$$

und $2\int \frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z-1} dz = y - 4ly + \frac{1}{y} + 2l(y^2+2y-1)$

$$+ 2\sqrt{2}\, l\, \frac{y+1-\sqrt{2}}{y+1+\sqrt{2}}$$

Das zu suchende Integral ist daher

$$= -2z - z\sqrt{z^2+1} - l(z+\sqrt{z^2+1}) - y + 4ly$$
$$-\frac{1}{y} - 2l(y^2+2y-1) - 2\sqrt{2}\, l\frac{y+1-\sqrt{2}}{y+1+\sqrt{2}}$$

worin nun noch $z = \sqrt{x}$ und $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ zu setzen ist.

3) Ist $\int \frac{\sqrt{x}}{x+r}\,dx$ zu bestimmen, so setze $\sqrt{x} = z$; $x = z^2$, dann geht das Integral über in:

$$2\int \frac{z^2}{z^2+r}\,dz = 2\int \frac{z^2+r-r}{z^2+r}\,dz = 2z - 2r\int \frac{dz}{r+z^2}$$
$$= 2z - 2\sqrt{r}\, arctg \frac{z}{\sqrt{r}} = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{r}\, arctg \sqrt{\frac{x}{r}} + C$$

§. 94. Bestimmung des Integrales $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

1) Es sei $c = 0$.

Setzt man
$$\sqrt{a+bx} = z,$$
also
$$x = \frac{z^2-a}{b}\ ;\ \frac{dx}{dz} = \frac{2z}{b},$$
so folgt:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\int dz = \frac{2}{b}\,z = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Anmerk. Um $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{a+bx}}$ zu ermitteln, setze man $\sqrt[n]{a+bx} = z$ und verfahre analog wie oben.

2) Es sei $c > 0$.

Setzt man, im Falle a positiv ist,
$$\sqrt{a+bx+cx^2} = xz - \sqrt{a}$$
also
$$b + cx = xz^2 - 2z\sqrt{a}\ ;\ x = \frac{b+2z\sqrt{a}}{z^2-c}$$
$$\frac{dx}{dz} = -\frac{2(z^2\sqrt{a}+bz+c\sqrt{a})}{(z^2-c)^2},$$
$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{z^2\sqrt{a}+bz+c\sqrt{a}}{z^2-c}$$
so
$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -2\int \frac{dz}{z^2-c} = 2\int \frac{dz}{c-z^2}$$
od nach §. 50, Beisp. 3
$$2\int \frac{dz}{c-z^2} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\frac{\sqrt{c}+z}{\sqrt{c}-z}$$

und
$$z = \frac{\sqrt{a + bx + cx^2} + \sqrt{a}}{x}$$
ist, auch
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\, \frac{x\sqrt{c} + \sqrt{a} + \sqrt{a + bx + cx^2}}{x\sqrt{c} - \sqrt{a} - \sqrt{a + bx + cx^2}} + C. \quad (2)$$

Um einen anderen Ausdruck, welcher sich für $a < 0$ zur Bestimmung des Integrales eignet, zu erhalten, setze man
$$\sqrt{a + bx + cx^2} = z - x\sqrt{c},$$
also
$$a + bx = z^2 - 2xz\sqrt{c}\,,\quad x = \frac{z^2 - a}{2z.\sqrt{c} + b},$$
$$\frac{dx}{dz} = \frac{2\,(z^2\sqrt{c} + bz + a\sqrt{c})}{(2z\sqrt{c} + b)^2}.$$
$$\sqrt{a + bx + cx^2} = \frac{z^2\sqrt{c} + bz + a\sqrt{c}}{2z\sqrt{c} + b}$$
so folgt:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = 2\int \frac{dz}{2z\sqrt{c} + b} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\,(2z\sqrt{c} + b)$$
oder wenn man den Werth von z einführt,
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\,[b + 2cx + 2\sqrt{c\,(a + bx + cx^2)}] + C \quad (3)$$

Für $a = 0$ folgt hieraus:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\,[b + 2cx + 2\sqrt{c\,(bx + cx^2)}] + C \;.\;.\;. \quad (3a)$$
was auch direct erhalten wird, wenn man $\sqrt{bx + cx^2} = xz$ setzt:

Anmerk. Führt man in die Gleichung (1) $-\frac{1}{x}$ statt x, $-b$ statt b und c statt a ein, so erhält man:
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{bx + cx^2}} = -\frac{2}{bx}\sqrt{bx + cx^2} + C \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3b)$$

3) Es sei $c < 0$.

Setzt man wieder, im Falle a positiv ist,
$$\sqrt{a + bx + cx^2} = xz - \sqrt{a}$$
so folgt wie bei 3)
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -2\int \frac{dz}{z^2 - c}.$$

Nehmen wir an, es sei $c = -\gamma^2$, so wird
$$-2\int \frac{dz}{z^2 - c} = -2\int \frac{dz}{z^2 + \gamma^2} = -\frac{2}{\gamma}\, arctg\, \frac{z}{\gamma}$$
oder, wenn man statt z seinen Werth einführt,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{2}{\sqrt{-c}}\, arc\,tg\, \frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+bx+cx^2}}{x\sqrt{-c}} + C \; (4)$$

Um jedoch auch in diesem Falle einen zweiten Ausdruck zu entwickeln, sei wieder $c = -\gamma^2$. Man erhält alsdann:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-\gamma^2 x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a-(\gamma^2 x^2 - bx)}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{a-\left(\gamma x - \frac{b}{2\gamma}\right)^2 + \frac{b^2}{4\gamma^2}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4c}-\left(\gamma x - \frac{b}{2\gamma}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\gamma}\, arc\,sin \left(\frac{\gamma x - \frac{b}{2\gamma}}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4c}}}\right)$$

oder

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}}\, arc\,sin\left(-\frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C \ldots (5)$$

Setzt man in (3) und (5) $-\frac{1}{x}$ statt x, also $\frac{dx}{x^2}$ statt dx und zuletzt statt a, b, c bezüglich c, $-b$, a, so folgt:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\, \frac{2\sqrt{a(a+bx+cx^2)}-(2a+bx)}{x} + C \quad (6)$$

und

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}}\, arc\,sin\, \frac{2a+bx}{x\sqrt{(b^2-4ac)}} + C \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

Für $b = 0$, $c = 1$, geht (3) über in:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = l2\,(x+\sqrt{a+x^2}) + C.$$

oder wenn man sich $l2$ mit C vereinigt denkt, in:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = l\,(x+\sqrt{a+x^2}) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

...t man in (7) $x\sqrt{b}$ statt x, also $\sqrt{b}\,dx$ statt dx, so folgt:

$$\sqrt{b}\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = l\,(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})$$

...eraus:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\, l\,(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}) + C. \quad . \quad (7a)$$

4) Es seien a und c negativ.

Bezeichnen w_1 und w_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$-a + bx - cx^2 = 0,$$

welche hier offenbar als reell vorausgesetzt werden dürfen, so setze man

$$\sqrt{-a+bx-cx^2} = \sqrt{-c(x-w_1)(x-w_2)}$$
$$= \sqrt{c(x-w_1)(w_2-x)} = (x-w_1)\,z$$

also

$$c(x-w_1)(w_2-x) = (x-w_1)^2 z^2$$
$$c(w_2-x) = (x-w_1)\,z^2$$
$$x = \frac{w_1 z^2 + c w_2}{z^2+c}$$
$$\frac{dx}{dz} = \frac{2cz(w_1-w_2)}{(z^2+c)^2}.$$

Man erhält alsdann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-a+bx-cx^2}} = \int \frac{2(w_1-w_2)}{(w_2-w_1)(z^2+c)}\,dz = -2\int \frac{dz}{z^2+c}$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{c}}\,arc\,tg\,\frac{z}{\sqrt{c}} = -\frac{2}{\sqrt{c}}\,arc\,tg\left(\sqrt{\frac{w_2-x}{x-w_1}}\right) + C \quad . \quad (8)$$

5) Dieselben Substitutionen, welche $\sqrt{a+bx+cx^2}$ rational machten, können auch in Anwendung gebracht werden, wenn es sich darum handelt, irgend eine ungerade Potenz dieses Wurzelausdruckes rational zu machen, wie sich schon daraus ergibt, dass man setzen kann:

$$(a+bx+cx^2)^{\frac{2n+1}{2}} = (a+bx+cx^2)^n\,(a+bx+cx^2)^{\frac{1}{2}}$$

6) Das Integral einer Function von der Form

$$f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})$$

wo f eine rationale Function von x und $\sqrt{a+bx+cx^2}$ ist, lässt sich immer rational machen.

Ist z. B. $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ zu bestimmen und man berücksichtigt, dass

$$\frac{d}{dx}\left(x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}\right) = (m-1)\,x^{m-2}\sqrt{a+bx+cx^2}$$
$$+ x^{m-1}\,\frac{b+2cx^2}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$= (m-1)\,a\,\frac{x^{m-2}}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + \frac{(2m-1)\,b}{2}\cdot\frac{x^{m-1}}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$+ mc\,\frac{x^m}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

so folgt für

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{a + bx + cx^2}}{mc} -$$

$$\frac{(m-1)\,a}{mc}\int \frac{x^{m-2}\, dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} - \frac{(2m-1)\,b}{2mc}\int \frac{x^{m-1}\, dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung gelangt man zuletzt zu dem Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$.

Setzt man in obiger Recursionsformel $m = 1$, so folgt:

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{c}\sqrt{a + bx + cx^2} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

für $m = 2$ erhält man:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{x}{2c}\sqrt{a + bx + cx^2} - \frac{a}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

$$- \frac{3b}{4c}\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

$$= \frac{2cx - 3b}{4c^2}\sqrt{a + bx + cx^2} + \frac{3b^2 - 4ac}{8c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} \text{ u. s. w.}$$

3) Um $\int \sqrt{a + bx + cx^2}\, dx$ zu bestimmen, setze man in §. 85. (1)

$$u = \sqrt{a + bx + cx^2}\,,\ \frac{du}{dx} = \frac{b + 2cx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}\,,\ \frac{dv}{dx} = 1\,,\ v = x\,,$$

so folgt:

$$\int \sqrt{a + bx + cx^2}\, dx = x\sqrt{a + bx + cx^2} - \int \frac{(b + 2cx)\, x}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a + bx + cx^2} - \int \frac{2\,(a + bx + cx^2) - 2a - bx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{a + bx + cx^2} - \int \sqrt{a + bx + cx^2}\, dx + \int \frac{2a + bx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}\, dx$$

und hieraus:

$$2\int \sqrt{a + bx + cx^2}\, dx = x\sqrt{a + bx + cx^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2a + bx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}\, dx$$

$$= \quad \overline{+ bx + cx^2} + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{b}{2c}(b + 2cx) + \frac{4ac - b^2}{2c}}{\sqrt{a + bx + cx^2}}\, dx$$

$$= \quad \overline{+ bx + cx^2} + \frac{b}{2c}\int \frac{b + 2cx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}} + \frac{4ac - b^2}{4c}\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

$$= \quad \overline{+ bx + cx^2} + \frac{b}{2c}\sqrt{a + bx + cx^2} + \frac{4ac - b^2}{4c}\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

wodurch das vorgelegte Integral auf ein bekanntes einfacheres zurückgeführt ist.

4) Kommt x unter dem Wurzelzeichen in den oben aufgeführten Fällen in einer höheren als der zweiten Potenz vor, so lässt sich im Allgemeinen die Integration mittelst elementarer Functionen nicht mehr in endlicher Form ausführen.

§. 95. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = ?$

Aufl. $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6l(\sqrt[6]{x} + 1) + C.$

Andeut. Setze $x = z^6$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = 6\int \frac{z^3 dz}{z + 1}$

$= 6\int \left(z^2 - z + 1 - \frac{1}{z + 1}\right) dz$ u. s. w.

2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{12}{13} x^{\frac{13}{12}} + x - \frac{12}{11} x^{\frac{11}{12}} + \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} +$

$\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - \frac{12}{7} x^{\frac{7}{12}} + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5} x^{\frac{5}{12}} + 3x^{\frac{1}{3}} -$

$4x^{\frac{1}{4}} + 6x^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{12}} + l(1 + \sqrt[12]{x}) + C.$

Andeut. Setze $x = z^{12}$, $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx = 12\int \frac{z^{14}}{z + 1}\, dz$, dividire nun u. s. w.

3) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 (1 + \sqrt[6]{x})}\, dx = ?$

Aufl. $lx + \frac{6}{\sqrt[6]{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} - 6l(1 + \sqrt[6]{x}) + C.$

Andeut. Setze $x = z^6$, $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 (1 + \sqrt[6]{x})}\, dx = 6\int \frac{dz}{z^5 (1 + z)}$ und zerlege nun in Partialbrüche u. s. w.

4) $\int \frac{x}{\sqrt{2 + x}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{2}{3}(2 + x)^{\frac{3}{2}} - 4(2 + x)^{\frac{1}{2}} + C.$

Andeut. Setze $\sqrt{2 + x} = z$.

5) $\int \frac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{3}{5}(1-x)^{\frac{5}{3}} - 3(1-x)^{\frac{2}{3}} + C.$

Andeut. Setze $\sqrt[3]{1-x} = z.$

6) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}\,dx = ?$

Aufl. $12 l \frac{\sqrt[12]{x}+1}{\sqrt[12]{x}} - \frac{12}{\sqrt[12]{x}} + C.$

Andeut. $x = z^{12}$ gesetzt.

7) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{4} l \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1} - \frac{\sqrt{2x+1}}{4x} + C.$

Andeut. Setze $2x+1 = z^2$, so wird $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}\,dx = 4\int \frac{z^2 dz}{(z^2-1)^2}$

$$= \int \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}\right] dz$$

8) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = ?$

Aufl. $2\sqrt{x+1} + l \frac{x+2(1-\sqrt{x+1})}{x} + C.$

Andeut. Setze $x+1 = z^2$, so folgt: $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\,dx = 2\int \frac{z^2}{z^2-1}\,dz$

$$= 2\int \left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right) dz \text{ u. s. w.}$$

9) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx = ?$

Aufl. $3\sqrt[3]{x+1} + l(\sqrt[3]{x+1} - 1) - \frac{1}{2} l [\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1] - \sqrt{3}\, arctg \frac{2\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{3}} + C.$

t. Setze $x+1 = z^3$, so wird $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x}\,dx = \int \frac{3z^3 dz}{z^3-1}$

$$\frac{-1+1}{z^3-1}\,dz = 3z + 3\int \left[\frac{1}{3(z-1)} - \frac{z+2}{3(z^2+z+1)}\right] dz \text{ u. s. w.}$$

10) $\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} = ?$

Aufl. $\frac{2}{3}\, l(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{3}\, l(x-\sqrt{x}+1)$

$$+ \frac{2}{\sqrt{3}}\, arctg\, \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Andeut. Setzt man $x = z^2$, so wird

$$\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} = 2\int \frac{dz}{z^3+1} = 2\int \left[\frac{1}{3\,(z+1)} + \frac{2-z}{3\,(z^2-z+1)}\right] dz$$
$$= \frac{2}{3}\, l\,(z+1) - \frac{1}{3}\int \frac{2z-4}{z^2-z+1}\, dz$$
$$= \frac{2}{3}\, l\,(z+1) - \frac{1}{3}\int \frac{2z-1}{z^2-z+1}\, dz + \int \frac{dz}{z^2-z+1}$$
$$= \frac{2}{3}\, l\,(z+1) - \frac{1}{3}\, l\,(z^2-z+1) + 4\int \frac{dz}{(2z-1)^2+3} \text{ u. s. w.}$$

11) $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{6}{7}\, x^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}\, x^{\frac{5}{6}} - \frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}}$

$$- 6l\,(x^{\frac{1}{6}} - 1) + C.$$

Andeut. Setze $x = z^6$, so wird

$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\, dx = -6\int \frac{z^8+z^5}{z^2-1}\, dz \text{ u. s. w.}$$

12) $\int \frac{x^2+1}{1-\sqrt{x}}\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{2}{5}\, x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\, x^2 - \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} - x - 4x^{\frac{1}{2}} - 2lx + C.$

Andeut. Setze $x = z^2$ u. s. w.

13) $\int \frac{x}{1-\sqrt[3]{x}}\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4}\, x^{\frac{4}{3}} - x - \frac{3}{2}\, x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - lx + C.$

Andeut. Setze $x = z^3$ u. s. w.

14) $\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3} - (1+x) + C.$

Andeut. Wird $\sqrt{1+x} = z$ gesetzt, so folgt:

$$\int \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\, dx = 2\int \frac{z\,(z^2-1)}{1+z}\, dz = 2\int (z^2-z)\, dz \text{ u. s. w.}$$

15) $\int \frac{\sqrt{2+x}}{3+2\sqrt{2+x}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2+x} + \frac{9}{4}\, l\,(3 + 2\sqrt{2+x}) + C.$

Andeut. Setze $\sqrt{2+x} = z$, so folgt:

$$\int \frac{\sqrt{2+x}}{3+2\sqrt{2+x}}\, dx = \int \frac{2z^2}{2z+3}\, dz = \int \left(z - \frac{3}{2} + \frac{9}{2\,(2z+3)}\right) dz$$
$$= \frac{z^2}{2} - \frac{3}{2}\, z + \frac{9}{4}\int \frac{2dz}{2z+3} \text{ u. s. w.}$$

16) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-6x}} = ?$

Aufl. $-\frac{1}{4}\sqrt[3]{(5-6x)^2} + C.$

Andeut. Setze $\sqrt[3]{5-6x} = z$ u. s. w.

17) $\int \frac{dx}{x+2\sqrt{1+x}} = ?$

Aufl. $l\,(x + 2\sqrt{1+x}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{1+x}} + C.$

Andeut. Setze $\sqrt{1+x} = z$, $x = z^2 - 1$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{x+2\sqrt{1+x}} = \int \frac{2z}{z^2+2z-1}\, dz = \int \frac{2z+2}{z^2+2z-1}\, dz - \int \frac{2dz}{z^2+2z-1}$$
$$= l\,(z^2+2z-1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{z+1-\sqrt{2}}{z+1+\sqrt{2}} \text{ u. s. w.}$$

18) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt[3]{x}}\, dx = ?$

Aufl. $2\sqrt{x} + 6\left[\frac{2+\sqrt{2}}{8}\, l\,(\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{8x} + 1) + \right.$

$\frac{2-\sqrt{2}}{8}\, l\,(\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{8x} + 1) - \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(arctg\,(\sqrt[6]{8x} + 1)\right.$

$\left.\left. + \, arctg\,(\sqrt[6]{8x} - 1)\right)\right].$

Andeut. $x = z^6$ gesetzt, gibt:

$$6\int \frac{z^8+z^5}{z^6+z^2}\, dz = 6\int \left(z^2 + \frac{z^3-z^2}{z^4+1}\right) dz = 2z^3 + 6\int \frac{z^3-z^2}{z^4+1}\, dz.$$

nun

$$\frac{\ldots - z^2}{\ldots 1} = \frac{z^3-z^2}{(z^2+1)^2 - 2z^2} = \frac{P_1 z + Q_1}{z^2+1+z\sqrt{2}} + \frac{P_2 z + Q_2}{z^2+1-z\sqrt{2}} \text{ u. s. w.}$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x+x^2}} = ?$

Aufl. $l\,(x - 2 + \sqrt{3-4x+x^2}) + C.$

Andeut. Setze nach §. 94. 2:

$$\sqrt{3 - 4x + x^2} = z - x$$

also $x = \frac{z^2 - 3}{2z - 4}$, $\frac{dx}{dz} = \frac{z^2 - 4z + 3}{2(z-2)^2}$, $\sqrt{3 - 4x + x^2} = \frac{z^2 - 4z + 3}{2z - 4}$,

so folgt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 4x + x^2}} = \int \frac{dz}{z - 2} = l\,(z - 2) \text{ u. s. w.}$$

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 5x + x^2}} = ?$

Aufl. $l\,(2x - 5 + 2\sqrt{4 - 5x + x^2}) + C.$

Andeut. Nach §. 94.

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{-2 + 3x - x^2}} = ?$

Aufl. $-2\, arctg \sqrt{\frac{2 - x}{x - 1}} + C.$

Andeut. Setze in §. 94. 4: $w_1 = 1$, $w_2 = 2$,
also

$$\sqrt{-2 + 3x - x^2} = \sqrt{-(x-1)(x-2)} = \sqrt{(x-1)(2-x)} = (x-1)z,$$

$$x = \frac{z^2 + 2}{z^2 + 1},\ \frac{dx}{dz} = -\frac{2z}{(z^2 + 1)^2},$$

so folgt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2 + 3x - x^2}} = -\int \frac{2\,dz}{z^2 + 1} = -2 arctg\, z \text{ u. s. w.}$$

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{-6 + 5x - x^2}} = ?$

Aufl. $2 arctg \sqrt{\frac{x - 3}{2 - x}} + C.$

Andeut. Vergl. die vorhergehende Aufgabe.

23) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 3x + 2x^2}} = ?$

Aufl. $\frac{1}{\sqrt{2}}\, l\,[-3 + 4x + 2\sqrt{2(1 - 3x + 2x^2)}] + C.$

Andeut. Vergleiche §. 94. 2. (3)

24) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x + x^2}} = ?$

Aufl. $l\,[2 + 2x + 2\sqrt{3 + 2x + x^2}] + C$

oder wenn man $l2$ mit C zusammenfasst,

$$l\,(1 + x + \sqrt{3 + 2x + x^2}) + C.$$

25) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x+2x^2}} = ?$

Aufl. $\frac{1}{\sqrt{2}}\, l\,[-3+4x+2\sqrt{2(1-3x+2x^2)}]+C.$

26) $\int \frac{dx}{1-x-\sqrt{4-5x+x^2}} = ?$

Aufl. $\frac{1}{3}(-x+\sqrt{4-5x+x^2})$

$+\frac{1}{2}\, l\,(-2x+5+2\sqrt{4-5x+x^2})+C.$

Andeut. Setze $\sqrt{4-5x+x^2} = x+z$, also

$$x = \frac{4-z^2}{2z+5},\quad 1-x = \frac{z^2+2z+1}{2z+5}$$

$$x+z = \frac{z^2+5z+4}{2z+5},\quad \frac{dx}{dz} = -\frac{2(z^2+5z+4)}{(2z+5)^2}$$

so wird

$$\int \frac{dx}{1-x-\sqrt{4-5x+x^2}} = \frac{2}{3}\int \frac{z+4}{2z+5}\,dz = \frac{1}{3}\int \frac{2z+5+3}{2z+5}\,dz$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(1+\frac{3}{2z+5}\right)dz = \frac{1}{3}z+\frac{1}{2}\, l\,(2z+5) \text{ u. s. w.}$$

27) $\int \frac{dx}{x-1+\sqrt{3-4x+x^2}} = ?$

Aufl. $-\frac{1}{2}(-x+\sqrt{3-4x+x^2})$

$-\frac{1}{2}\, l\,(2-x+\sqrt{3-4x+x^2})+C.$

Andeut. Setze $\sqrt{3-4x+x^2} = x+z$, so geht das Integral über in

$$-\frac{1}{2}\int \frac{z+3}{z+2}\,dz = -\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{z+2}\right)dz = -\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}\, l\,(z+2) \text{ u. s. w.}$$

28) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2-3x+x^2}} = ?$

Aufl. $\frac{1}{3}(x-\sqrt{2-3x+x^2})+\frac{4}{9}\, l\,(-3x+4+$

$3\sqrt{2-3x+x^2})-\frac{1}{2}\, l\,(-2x+3+2\sqrt{2-3x+x^2})+C.$

Andeut. Setzt man $\sqrt{2-3x+x^2} = x+z$, so geht das Integral über in

$$\frac{1}{3}\int \frac{6z^2+18z+12}{6z^2+17z+12}\,dz = -\frac{1}{3}\int\left(1+\frac{z}{6z^2+17z+12}\right)dz =$$

$$-\frac{1}{3}z-\frac{1}{3}\int \frac{z}{6z^2+17z+12}\,dz.$$

$\frac{z}{6z^2+17z+12}$ in Partialbrüche unter Berücksichtigung, dass

$$6z^2+17z+12 = (3z+4)(2z+3) \text{ u. s. w.}$$

29) $\int \frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{x}}\, dx = ?$

Aufl. $3l\,(6 + 2x + 2\sqrt{6x + x^2}) + \sqrt{6x + x^2} + C.$

Andeut. Setze

$$\int \frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{x}}\, dx = 6\int \frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}} + \int \frac{x\,dx}{\sqrt{6x+x^2}}$$

Führt man nun zur Bestimmung des zweiten Integrales in §. 94. 2. die betreffenden Werthe ein, so folgt:

$$\int \frac{\sqrt{6+x}}{\sqrt{x}}\, dx = 6\int \frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}} + \sqrt{6x+x^2} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}}$$

$$= 3\int \frac{dx}{\sqrt{6x+x^2}} + \sqrt{6x+x^2}$$

oder nach §. 94. ($3a$)

$$= 3l\,(6 + 2x + 2\sqrt{6x + x^2}) + \sqrt{6x + x^2}.$$

30) $\int \frac{x^2 dx}{3\sqrt[3]{x+3}} = ?$

Aufl. $\left[\frac{1}{8}(x+3)^2 - \frac{6}{5}(x+3) + \frac{9}{2}\right] \sqrt[3]{(x+3)^2} + C.$

Andeut. Setzt man $\sqrt[3]{x+3} = z$, $x = z^3 - 3$, $\frac{dx}{dz} = 3z^2$, so folgt:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x+3}} = \int (z^6 - 6z^3 + 9)\, z dz \text{ u. s. w.}$$

Dreizehnter Abschnitt.

Binomische Integrale.

§. 96. Erklärung.

Ein Integral von der Form

$$\int x^m (ax^n + b)^p \, dx,$$

wo m, n, p ganz oder gebrochen, positiv oder negativ sein können, heisst im Allgemeinen ein binomisches.

Die directe Bestimmung eines solchen gelingt, sobald wir im Stande sind, die vorgelegte Form rational zu machen.

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, dürfen wir m und n als ganze Zahlen und n als positiv voraussetzen. Denn ist zunächst bei positivem n:

$$m = \frac{r}{s}, \; n = \frac{t}{s},$$

wo r eine positive oder negative, dagegen t und s positive ganze Zahlen bezeichnen, und man setzt $x = z^s$ also $x^m = z^r$ und $x^n = z^t$, so folgt: $\int x^m (ax^n + b)^p \, dx = s \int z^{r+s-1} (az^t + b)^p \, dz.$

Nehmen wir ferner an, es sei n negativ, so wird

$$\int x^m (ax \;\; + b)^p \, dx = \int x^{m+np} (a + bx^{-n})^p \, dx \quad . \; . \quad (\alpha)$$

und das Integral entspricht nun der gemachten Voraussetzung.

Ist p eine ganze Zahl, so lässt sich daher das Integral rational machen.

Um noch andere Fälle für ein gebrochenes p aufzufinden, setze man, wenn $p = \frac{r}{q}$ ist,

$$ax^n + b = z^q$$

als

$$x = \left(\frac{z^q - b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}; \; \frac{dx}{dz} = \left(\frac{z^q - b}{a}\right)^{\frac{1}{n} - 1} \frac{qz^{q-1}}{na}$$

so

$$x^m (ax^n + b)^p \, dx = \int \left(\frac{z^q - b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n} - 1} \frac{qz^{r+q-1}}{na} \, dz.$$

Das letztere Integral wird daher rational ausfallen, sobald $\frac{m+1}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Setzt man, um noch einen anderen Fall der Rationalität für $p = \frac{r}{q}$ zu entwickeln,

$$ax^n + b = z^q x^n$$

also

$$x = \left(\frac{b}{z^q - a}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad \frac{dx}{dz} = -\frac{qb^{\frac{1}{n}} z^{q-1}}{n(z^q - a)^{\frac{1}{n}+1}}$$

so folgt:

$$\int x^m (ax^n + b)^p \, dx = -\int \frac{qb^{\frac{r}{q}+\frac{m+1}{n}} z^{r+q-1}}{n(z^q - a)^{\frac{r}{q}+\frac{m+1}{n}+1}} dz$$

woraus hervorgeht, dass das vorgelegte Integral auch dann rational wird, wenn $\frac{r}{q} + \frac{m+1}{n} = \frac{m+np+1}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Man gelangt zu diesem Resultate auch dadurch, dass man dem Integrale die Form $\int x^{m+np} (a + bx^{-n})^p \, dx$ gibt, denn alsdann ersieht man nach der ersten Regel, dass dieses rational wird, wenn $\frac{m+np+1}{-n}$ also auch wenn $\frac{m+np+1}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Ist p gebrochen, so kann nur einer der Ausdrücke $\frac{m+1}{n}$ und $\frac{m+1}{n} + p$ ganz sein, denn im andern Falle wäre ihre Differenz, also p eine ganze Zahl, was mit der Annahme im Widerspruche stände.

Gelingt es nicht, den gegebenen Ausdruck rational zu machen, so sucht man das Integral auf ein einfacheres zurückzuführen. Es geschieht dieses mittelst der sogenannten Reductionsformeln, zu deren Entwickelung wir nun übergehen.

§. 97. Reductionsformeln für das binomische Integral $\int x^m (ax^n + b)^p \, dx$.

1) Setzt man in der bekannten Reductionsformel (1) des

$$u = (ax^n + b)^p; \quad \frac{dv}{dx} = x^m$$

$$\frac{du}{dx} = nap (ax^n + b)^{p-1} x^{n-1}; \quad v = \int x^m \, dx = \frac{x^{m+}}{m+}$$

so wird

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{(ax^n + b)^p\, x^{m+1}}{m+1} - \frac{nap}{m+1}\int x^{m+n} (ax^n + b)^{p-1}\, dx \quad (1).$$

2) Setzt man hierin

$$x^{m+n} = x^m x^n = x^m \left(\frac{ax^n + b}{a} - \frac{b}{a}\right)$$

also

$$\int x^{m+n} (ax^n + b)^{p-1}\, dx = \int x^m (ax^n + b)^{p-1} \left(\frac{ax^n + b}{a} - \frac{b}{a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{a}\int x^m (ax^n + b)^p\, dx - \frac{b}{a}\int x^m (ax^n + b)^{p-1}\, dx,$$

so ergibt sich aus der resultirenden Gleichung:

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{(ax^n + b)^p\, x^{m+1}}{m + np + 1}$$

$$+ \frac{nbp}{m + np + 1}\int x^m (ax^n + b)^{p-1}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3) Führt man in diese Gleichung $p + 1$ statt p ein, so erhält man leicht aus der betreffenden Gleichung:

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx = -\frac{(ax^n + b)^{p+1}\, x^{m+1}}{nb\,(p+1)}$$

$$+ \frac{m + n + np + 1}{nb\,(p+1)}\int x^m (ax^n + b)^{p+1}\, dx \quad . \quad (3)$$

4) Bestimmt man aus der ersten Formel

$$\int x^{m+n} (ax^n + b)^{p-1}\, dx = \frac{(ax^n + b)^p\, x^{m+1}}{nap} - \frac{m+1}{nap}\int x^m (ax^n + b)^p\, dx$$

und setzt hierin m statt $m + n$, p statt $p - 1$, so folgt:

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{(ax^n + b)^{p+1}\, x^{m-n+1}}{na\,(p+1)}$$

$$- \frac{m - n + 1}{na\,(p+1)}\int x^{m-n} (ax^n + b)^{p+1}\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

5) Setzt man hierin

$$\int x^{m-n} (ax^n + b)^{p+1}\, dx = \int x^{m-n} (ax^n + b)^p (ax^n + b)\, dx$$

$$= a\int x^m (ax^n + b)^p\, dx + b\int x^{m-n} (ax^n + b)^p\, dx,$$

so erhält man aus der betreffenden Gleichung:

$$\int x^m (ax^n + b)^p\, dx = \frac{(ax^n + b)^{p+1}\, x^{m-n+1}}{a\,(m + np + 1)}$$

$$- \frac{b\,(m - n + 1)}{a\,(m + np + 1)}\int x^{m-n} (ax^n + b)^p\, dx \quad . \quad (5)$$

Bestimmt man hieraus $\int x^{m-n} (ax^n + b)^p\, dx$ und setzt in der e ‑n Gleichung m statt $m - n$, so folgt:

$$\int x^m (ax^n + b)^p\,dx = \frac{(ax^n + b)^{p+1}\,x^{m+1}}{b\,(m+1)}$$
$$- \frac{a\,(m + n + np + 1)}{b\,(m+1)} \int x^{m+n} (ax^n + b)^p\,dx \quad . \quad . \quad (6)$$

Anmerk. Die Formeln (2), (4), (6) erhält man auch, indem man bezüglich (1), (2), (3) auf die Form (α) des §. 96 bringt und darauf jene Integrale anwendet.

7) Eine etwas nähere Betrachtung der so eben entwickelten 6 Reductionsformeln lässt sofort erkennen, dass von denselben dient

die erste, um m zu vergrössern und p zu verkleinern,
die zweite, um p zu verkleinern,
die dritte, um p zu vergrössern,
die vierte, um m zu verkleinern und p zu vergrössern,
die fünfte, um m zu verkleinern,
die sechste, um m zu vergrössern;

ferner, dass nicht anwendbar sind:

die erste und sechste, wenn $m + 1 = 0$,
die dritte und vierte, wenn $p + 1 = 0$,
die zweite und fünfte, wenn $m + np + 1 = 0$.

Im ersten und zweiten dieser Fälle ist bezüglich $\frac{m+1}{n}$ und $\frac{m + np + 1}{n} = 0$ also eine ganze Zahl und im dritten Falle ist p eine solche.

In diesen drei Fällen lässt sich aber, wie oben gezeigt wurde, der vorgelegte Ausdruck rational machen.

In allen übrigen Fällen lässt sich das binomische Integral auf ein anderes reduciren, in welchem

$\frac{m}{n}$ und p zwischen $-\frac{1}{2}$ und $+\frac{1}{2}$ liegen.

8) Setzt man in Gleichung (5):

$$a = -1\,,\ b = a\,,\ n = 2\,,\ p = -\tfrac{1}{2}\,,$$

so geht dieselbe über in:

$$\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a - x^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{a - x^2}}{m} - \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{a - x^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Mittelst dieser Formel gelangt man, wenn m eine positive ganze Zahl ist, zuletzt auf das Integral

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a - x^2}} = -\sqrt{a - x^2} + C.$$

oder auf
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - x^2}} = arc\sin \frac{x}{\sqrt{a}} + C.$$

je nachdem m ungerade oder gerade ist.

9) Setzt man in (6) $a = -1$, $b = a$, $n = 2$, $p = -$ ‹ ›d $-m$ statt m, so resultirt:

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{a - x^2}} = -\frac{\sqrt{(a - x^2)}}{a\,(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{m-2}{a\,(m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a -}} \quad 8)$$

Nun ist aber nach §. 94 (6):

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,\frac{2\sqrt{a(a-x^2)}-2a}{x} + C = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,\frac{\sqrt{a-x^2}-\sqrt{a}}{x} + C$$

somit lassen sich die aufeinander folgenden Integrale sämmtlich bestimmen:

Setzt man ferner in (6):

$$p = -\tfrac{1}{2}\;,\; n = 2\,,\; -m \text{ statt } m,\; b = -1$$

und in (5):

$$n = 2\;,\; b = -1\;,\; p = -\tfrac{1}{2},$$

so erhält man:

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{ax^2-1}} = \frac{\sqrt{ax^2-1}}{(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{a\,(m-2)}{m-1}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{ax^2-1}} \quad . \quad (9)$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{ax^2-1}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{ax^2-1}}{am} + \frac{m-1}{am}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{ax^2-1}} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Die Reductionsformeln führen schliesslich auf die nach §. 94 ($6a$) und ($7a$) bekannten Integrale:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2-1}} = arc\,sin\,\frac{1}{x\sqrt{a}} + C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,[x\sqrt{a}+\sqrt{ax^2-1}] + C. \quad . \; . \quad (12)$$

10) Ist das Integral von der Form

$$\int x^m\,(ax^v + bx^w)^p,$$

so setze man dafür

$$\int x^{m+vp}\,(a + bx^{w-v})^p\,dx$$

um ihm die binomische Form zu geben.

So hat man z. B.

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int x^{m-\frac{1}{2}}\,(2a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

und wenn man nun in (5)

$$m-\tfrac{1}{2} \text{ statt } m\;,\; a = -1\;,\; n = 1\;,\; b = 2a\;,\; p = -\tfrac{1}{2}$$

setzt,

$$\int\frac{x^m\,dx}{\quad - x^2} = -\frac{x^{m-\frac{1}{2}}\sqrt{2a-x}}{m} + \frac{2a\,(m-\frac{1}{2})}{m}\int x^{m-\frac{3}{2}}(2a-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$\frac{x^{m-1}\sqrt{2ax-x^2}}{m} + \frac{a\,(2m-1)}{m}\int\frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \quad . \; . \quad (13)$$

t man hierin $-m+1$ statt m, so folgt:

$$\int\frac{dx}{\;?ax-x^2} = \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{(m-1)\,x^m} + \frac{a\,(2m-1)}{m-1}\int\frac{dx}{x^m\,\sqrt{2ax-\;^2x}}$$

oder

$$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{(2m-1)\, ax^m} + \frac{m-1}{a\,(2m-1)} \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2ax - x^2}} \quad (14)$$

Die Anwendung dieser beiden Formeln führt zuletzt auf die nach §. 93. (3*b*) und (5) bekannten Integrale

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = -\frac{1}{ax}\sqrt{2ax - x^2} + C \quad . \ . \ . \ (15)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = arc\ sin\ \frac{-a + x}{a} + C \quad . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

11) Um auf analoge Weise $\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx$ zu bestimmen, setze man

$$\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} (2a - x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

und nun in (2):

$$m = \tfrac{1}{2},\ a = -1,\ b = 2a,\ n = 1,\ p = \tfrac{1}{2},$$

so folgt:

$$\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\sqrt{2a - x} + \frac{a}{2}\int x^{\frac{1}{2}} (2a - x)^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a}{2}\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

oder nach (13)

$$\int \sqrt{2ax - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{2ax - x^2} - \frac{a}{2}\left[\sqrt{2ax - x^2} - a\int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}}\right]$$

$$= \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax - x^2} - \frac{a^2}{2}\, arc\ sin\ \frac{-a + x}{a} + C \ . \ . \ . \ (17)$$

12) Um $\int \sqrt{a + bx^2}\, dx$ zu bestimmen, setze in (2)

$$m = 0,\ a = b,\ b = a,\ n = 2,\ p = \tfrac{1}{2},$$

so folgt:

$$\int \sqrt{a + bx^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + bx^2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}$$

oder nach §. 94. (7*a*)

$$\int \sqrt{a + bx^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\, l(x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}) + C \quad (18)$$

13) Ist $\int \sqrt{a - bx^2}\, dx$ zu ermitteln, so setze man in (2)·

$$m = 0,\ a = -b,\ b = a,\ n = 2,\ p = \tfrac{1}{2}.$$

Man erhält alsdann:

$$\int \sqrt{a - bx^2}\, dx = \frac{x\sqrt{a - bx^2}}{2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}}$$

oder nach §. 94. (5)

$$= \frac{x}{2}\sqrt{a - bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}} \, arc\sin x \sqrt{\frac{b}{a}} + C. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Beispiele.

1) Um $\displaystyle\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \int x^7 (-x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx$

zu bestimmen, setze man in (5):

$$m = 7, \; n = 2, \; p = -\tfrac{1}{2}, \; a = -1, \; b = 1,$$

so folgt:

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{7}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} x^6 + \frac{6}{7}\int x^5 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

und wenn man in derselben Formel (5)

$$m = 5, \; n = 2, \; p = -\tfrac{1}{2}, \; a = -1, \; b = 1$$

setzt,

$$\int x^5 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\tfrac{1}{5}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} x^4 + \tfrac{4}{5}\int x^3 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Auf analoge Weise findet man:

$$\int x^3 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = -\tfrac{1}{3}(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} x^2 + \tfrac{2}{3}\int x (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Da ferner

$$\int x (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2},$$

so wird das verlangte Integral

$$\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\left(\frac{x^6}{7} + \frac{6}{35}x^4 + \frac{8}{35}x^2 + \frac{16}{35}\right)\sqrt{1 - x^2}$$

2) Soll $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 + 1}} = \int x^{-3}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx$

bestimmt werden, so setze man in (6):

$$m = -3, \; n = 2, \; p = -\tfrac{1}{2}, \; a = 1, \; b = 1.$$

Man erhält alsdann:

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} x^{-2}}{-2} - \frac{1}{2}\int x^{-1}(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}$$

od[er wenn] man nach §. 94. (6) den Werth dieses Integrales einführt,

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 + 1}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x^2} - \frac{1}{2}\, l\, \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} + C.$$

3) Um $\int \frac{x^7\,dx}{(2x^3+1)^4}$ zu entwickeln, setze in (3):

$$m = 7\,,\ n = 3\,,\ p = -4\,,\ a = 2\,,\ b = 1\,,$$

so folgt:

$$\int \frac{x^7\,dx}{(2x^3+1)^4} = \frac{x^8}{9\,(2x^3+1)^3} + \frac{1}{9}\int x^7\,(2x^3+1)^{-3}\,dx.$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhält man:

$$\int x^7\,(2x^3+1)^{-3}\,dx = \frac{x^8}{9\,(2x^3+1)^2} - \frac{1}{3}\int x^7\,(2x^3+1)^{-2}\,dx$$

$$\int x^7\,(2x^3+1)^{-2}\,dx = \frac{x^8}{3\,(2x^3+1)} - \frac{5}{3}\int x^7\,(2x^3+1)^{-1}\,dx.$$

Führt man hierin endlich nach §. 90. Beisp. 9 den betreffenden Werth des letzten Integrales ein; so erhält man schliesslich:

$$\int \frac{x^7\,dx}{(2x^3+1)^4} = \frac{x^8}{9\,(2x^3+1)^3} + \frac{x^8}{54\,(2x^3+1)^2} - \frac{x^8}{81\,(2x^3+1)}$$

$$+ \frac{x^5}{162} - \frac{5x^2}{648} - \frac{5}{972\sqrt[3]{4}}\,l\,(x\sqrt[3]{2}+1) + \frac{5}{1944\sqrt[3]{4}}\,l(x^2\sqrt[3]{4} - x\sqrt[3]{2} + 1)$$

$$+ \frac{5}{324\sqrt[6]{432}}\,arctg\,\frac{2x\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

4) Es soll $\int x^9\,(ax^5+b)^{\frac{7}{3}}\,dx$ bestimmt werden.

Durch Anwendung der Formel (2) erhält man, da

$$m = 9\,,\ n = 5\,,\ p = \frac{7}{3}$$

ist:

$$\int x^9\,(ax^5+b)^{\frac{7}{3}}\,dx = \frac{3}{65}\,(ax^5+b)^{\frac{7}{3}}\,x^{10} + \frac{7b}{13}\int x^9\,(ax^5+b)^{\frac{4}{3}}\,dx$$

und nach derselben Formel:

$$\int x^9\,(ax^5+b)^{\frac{4}{3}}\,dx = \frac{3}{50}\,(ax^5+b)^{\frac{4}{3}}\,x^{10} + \frac{2b}{5}\int x^9\,(ax^5+b)^{\frac{1}{3}}\,dx.$$

Da nun nach Gl. (5):

$$\int x^9\,(ax^5+b)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3x^5}{35a}\,(ax^5+b)^{\frac{4}{3}} - \frac{3b}{7a}\int x^4\,(ax^5+b)^{\frac{1}{3}}$$

und $\int x^4\,(ax^5+b)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5a}\,(ax^5+b)^{\frac{4}{3}}$

also $\int x^9\,(ax^5+b)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{(ax^5+b)^{\frac{4}{3}}}{35a^2}\left(3ax^5 - \frac{9b}{4}\right)$

ist, so erhält man schliesslich durch successive Einführung dieser Re[illegible]te:

$$\int x^9 (ax^5 + b)^{\frac{1}{3}} dx = (ax^5 + b)^{\frac{4}{3}} \left[\frac{3}{65} ax^{15} + \frac{51b}{650} x^{10} + \frac{6b^2}{325a} x^5 - \frac{9b^3}{750a^2}\right]$$

5) Ist $\int x^{11} (ax^3 + b)^{\frac{5}{2}} dx$ zu bestimmen, so folgt nach (2):

$$\int x^{11} (ax^3 + b)^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{39} (ax^3 + b)^{\frac{5}{2}} x^{12} + \frac{5b}{13}\int x^{11} (ax^3 + b)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$\int x^{11} (ax^3 + b)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{33} (ax^3 + b)^{\frac{3}{2}} x^{12} + \frac{3b}{11}\int x^{11} (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}} dx$$

und nach (5)

$$\int x^{11} (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2 (ax^3 + b)^{\frac{3}{2}} x^9}{27a} - \frac{2b}{3a}\int x^8 (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int x^8 (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2 (ax^3 + b)^{\frac{3}{2}} x^6}{21a} - \frac{4b}{7a}\int x^5 (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int x^5 (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2 (ax^3 + b)^{\frac{3}{2}} x^3}{15a} - \frac{2b}{5a}\int x^2 (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}} dx$$

und weil endlich

$$\int x^2 (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3}\frac{1}{3a} (ax^3 + b)^{\frac{3}{2}}$$

ist, so erhält man schliesslich:

$$\int x^{11} (ax^3 + b)^{\frac{5}{2}} = (ax^3 + b)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{5b^2}{429a}\left(\frac{2}{3} x^9 - \frac{4b}{7a} x^6 + \frac{16b^2}{35a^2} x^3 - \frac{32b^3}{105a^3}\right) + \frac{2}{39} x^{12} (ax^3 + b) + \frac{10b}{229} x^{12}\right]$$

Anmerk. Manche Integrale lassen sich durch eine geschickte Substitution auf binomische zurückführen.

Setzt man z. B. in dem Integrale

$$\int (ax + b)^m (\alpha x + \beta)^\mu dx$$

$$ax + b = z\,;\; x = \frac{z - b}{a},\; \frac{dx}{dz} = \frac{1}{a}\,;$$

also
$$\alpha x + \beta = \alpha \frac{z - b}{a} + \beta = \frac{\alpha z + a\beta - \alpha b}{a},$$

so geht dasselbe über in

$$\int z^m \left(\frac{\alpha z + a\beta - \alpha b}{a}\right)^\mu \frac{dz}{a} = \frac{1}{a^{\mu+1}}\int z^m (\alpha z + a\beta - \alpha b)^\mu dz,$$

ein binomisches.

ire in einem anderen Falle $\int (a + bx + cx^2)^p dx$ zu bestimmen, so setze

$$+ bx + cx^2 = c\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} x + x^2\right) = c\left[\left(x + \frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4c^2}\right]$$

und hierin

$$x + \frac{b}{2c} = z\,;\; x = z - \frac{b}{2c},$$

so wird

$$\int (a + bx + cx^2)^p\, dx = c^p \int \left(z^2 + \frac{4ac - b^2}{4c^2}\right)^p dz$$

und stimmt nun der Form nach mit dem binomischen Integrale überein.

§. 98. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int x^7 (ax^4 + b)^{\frac{3}{2}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{(ax^4 + b)}{14}\left(x^5 + \frac{3b}{5a}x^4 - \frac{2b^2}{5a^2}\right) + C.$

Andeut. Wende zuerst (2), dann zweimal (5) an.

2) $\int x^{-7} (ax^3 + b)^{\frac{5}{2}}\, dx = ?$

$$\text{Aufl.}\; -\frac{(ax^3 + b)^{\frac{3}{2}}}{12x^6}(7ax^3 + 2b) + \frac{5}{4}\sqrt{ax^3 + b}$$

$$+ 5a^2\sqrt{b}\, l\, \frac{\sqrt{ax^3 + b} - \sqrt{b}}{\sqrt{ax^3 + b} + \sqrt{b}} + C.$$

Andeut. Wendet man zuerst zweimal (6), dann zweimal (2) an, so tritt in dem resultirenden Ausdrucke das Integral $\int x^{-1} (ax^3 + b)^{\frac{1}{2}}\, dx$ auf. Um dieses rational zu machen, setze $ax^3 + b = z^2$, dann geht dasselbe über in:

$$\frac{2}{3a^{\frac{2}{3}}}\int \frac{z^2}{z^2 - b}\, dz = \frac{2}{3a^{\frac{2}{3}}}\int \left(1 + \frac{b}{z^2 - b}\right) dz = \frac{2}{3a^{\frac{2}{3}}}\, z + \frac{\sqrt{b}}{3a^{\frac{2}{3}}}\, l\, \frac{z - \sqrt{b}}{z + \sqrt{b}}.$$

3) $\int x^{-5} (ax + b)^{\frac{4}{3}}\, dx = ?$

$$\text{Aufl.}\; -\frac{(ax + b)^{\frac{4}{3}}}{324b^3x^4}(81b^3 + 36ab^2x + 60a^2bx^2 +$$

$$20a^3x^3) + \frac{5a^4}{243b^3}\int x^{-1} (ax + b)^{\frac{1}{3}}\, dx.$$

Andeut. Zuerst viermal nach (6), dann nach (2).

Um $\int x^{-1} (ax + b)^{\frac{1}{3}}\, dx$ zu bestimmen, setze $ax + b = z^3$, so geht dieses Integral über in $3\int \frac{z^3}{z^3 - b}\, dz = 3\int \left(1 + \frac{b}{z^3 - b}\right) dz = 3z + 3b\int \frac{dz}{z^3 - b}$ u. s. w.

4) $\int x^5 (ax^2 + b)^{-\frac{3}{2}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^2}{3a^2}(ax^2 + b)^{-\frac{1}{2}}(ax^2 + 4b) - \frac{8b}{3a^3}\sqrt{ax^2 + b} + C.$

Andeut. Zweimal nach (5), dann nach (3), so folgt:

$$\frac{x^2}{3a^2}(ax^2+b)^{-\frac{1}{2}}(ax^2+4b)-\frac{8b}{3a^2}\int x(ax^2+b)^{-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Zur Bestimmung dieses Integrales setze darin $ax^2+b=z^2$. Man erhält alsdann:

$$\frac{1}{a}\int dz=\frac{z}{a}\ \text{u. s. w.}$$

5) $\int x^{-6}(ax^5+b)^{-\frac{4}{3}}\,dx=?$

Aufl. $-\frac{(ax^5+b)^{-\frac{1}{3}}}{5b^2}(bx^{-5}+4a)-$

$$\frac{4a}{3b^2}\int x^{-1}(ax^5+b)^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

Andeut. Wende zuerst (6), dann (3) an. Um $\int x^{-1}(ax^5+b)^{-\frac{1}{3}}\,dx$ zu bestimmen, setze $ax^5+b=z^3$, dann geht das Integral über in: $\frac{3}{5}\int\frac{z\,dz}{z^3-b}$ u. s. w

6) $\int x^3(ax^2+b)^{\frac{8}{3}}\,dx=?$

Aufl. $\frac{3(ax^2+b)^{\frac{2}{3}}x^2}{1540a^2}(55a^4x^8+1540a^3bx^6+$

$$120a^2b^2x^4+10ab^3x^2-3b^4)+C.$$

Andeut. Zuerst nach (5), dann dreimal nach (2), so folgt:

$$\frac{3(ax^2+b)^{\frac{2}{3}}x^2}{308}[(11a^2x^4+19abx^2+5b^2)(ax^2+b)-3b^3]$$

$$-\frac{3b^4}{385a}\int x(ax^2+b)^{-\frac{1}{3}}\,dx.$$

Setzt man nun $ax^2+b=z^3$, so wird

$$\int x(ax^2+b)^{-\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{2a}\int z\,dz=\frac{3}{4a}z^2\ \text{u. s. w.}$$

7) $\int x^2(ax+b)^{-\frac{7}{2}}\,dx=?$

Aufl. $-\frac{2}{15a^3}(ax+b)^{-\frac{5}{2}}(15a^2x^2+20abx+8b^2)+C.$

Andeut. Zweimal nach (5) so tritt zuletzt noch $\int(ax+b)^{-\frac{7}{2}}\,dx$ auf, was bekanntlich $-\frac{2}{5a}(ax+b)^{-\frac{5}{2}}$ ist.

$\int x^3(ax^3+b)^{\frac{5}{3}}\,dx=?$

Aufl. $\frac{1}{81a}\Big[\frac{1}{2}(ax^3+b)^{\frac{2}{3}}(18a^2x^7+33abx^4+$

$$10b^2x)-5b^3\int\frac{dx}{\sqrt[3]{ax^3+b}}\Big].$$

Andeut. Zuerst nach (5), dann zweimal nach (2).

9) $\int x^4 (ax^2 + b)^{\frac{7}{4}} dx = ?$

Aufl. $\frac{2x (ax^2 + b)^{\frac{3}{4}}}{3315a^2} (195a^3x^6 + 300a^2bx^4 +$

$35ab^2x^2 - 42b^3) + \frac{28b^4}{1105a^2} \int (ax^2 + b)^{-\frac{1}{4}} dx.$

Andeut. Zweimal nach (5), dann zweimal nach (2).

10) $\int x (ax^6 + b)^{\frac{9}{4}} dx = ?$

Aufl. $\frac{2x^2 (ax^6 + b)^{\frac{5}{4}}}{589} (19ax^6 + 46b) +$

$\frac{405b^2}{589} \int x (ax^6 + b)^{\frac{1}{4}} dx.$

Andeut. Zweimal nach (2).

11) $\int x^8 (ax^3 + b)^{-\frac{5}{3}} dx = ?$

Aufl. $\frac{(ax^3 + b)^{-\frac{2}{3}}}{4a^3} (a^2x^6 - 6abx^3 - 9b^2) + C.$

Andeut. Zweimal nach (5) für das alsdann noch auftretende Integral

$$\int x^2 (ax^3 + b)^{-\frac{5}{3}} dx$$

findet man, wenn $ax^3 + b = z^3$, gesetzt wird

$$\frac{1}{2a} (ax^3 + b)^{-\frac{2}{3}}.$$

12) $\int x^{10} (ax^4 + b)^{-2} dx = ?$

Aufl. $\frac{(ax^4 + b)^{-1} x^3}{12a^2} (7b + 4ax^4) - \frac{7b}{4a^2} \int \frac{x^2dx}{ax^4 + b}.$

Andeut. Zweimal nach (5), dann nach (3).

§. 99. Reductionsformeln für das Integral

$$\int x^m (a + bx + cx^2)^p dx.$$

1) Setzt man in der Formel (1) des §. 85:

$$u = (a + bx + cx^2)^p \; ; \; \frac{dv}{dx} = x^m$$

$$\frac{du}{dx} = p (a + bx + cx^2)^{p-1} (b + 2cx);$$

$$v = \frac{x^{m+1}}{m + 1},$$

so erhält man:

$$\int x^m (a + bx + cx^2)^p \, dx = \frac{x^{m+1} (a + bx + cx^2)^p}{m + 1}$$

$$- \frac{p}{m + 1} \int x^{m+1} (a + bx + cx^2)^{p-1} (b + 2cx) \, dx.$$

oder wenn wir der Kürze halber

$$a + bx + cx^2 = X$$

setzen,

$$\int x^m X^p \, dx = \frac{x^{m+1} X^p}{m + 1} - \frac{pb}{m + 1} \int x^{m+1} X^{p-1} \, dx$$

$$- \frac{2cp}{m + 1} \int x^{m+2} X^{p-1} \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2) Führen wir in vorstehende Gleichung m statt $m + 2$, p statt $p - 1$ ein, so resultirt:

$$\int x^{m-2} X^{p+1} \, dx = \frac{x^{m-1} X^{p+1}}{m - 1} - \frac{(p + 1) \, b}{m - 1} \int x^{m-1} X^p \, dx$$

$$- \frac{2c \, (p + 1)}{m - 1} \int x^m X^p \, dx$$

und hiernach:

$$\int x^m X^p \, dx = \frac{x^{m-1} X^{p+1}}{2c \, (p + 1)} - \frac{b}{2c} \int x^{m-1} X^p \, dx$$

$$- \frac{m - 1}{2c \, (p + 1)} \int x^{m-2} X^{p+1} \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3) Setzt man in (2)

$$\int x^{m-2} X^{p+1} \, dx = \int x^{m-2} X^p (a + bx + cx^2) \, dx$$

$$= a \int x^{m-2} X^p \, dx + b \int x^{m-1} X^p \, dx + c \int x^m X^p \, dx$$

so folgt:

$$\int x^m X^p \, dx = \frac{x^{m-1} X^{p+1}}{2c \, (p+1)} - \frac{b}{2c} \int x^{m-1} X^p \, dx$$

$$\frac{m - 1}{(p + 1)} \left[a \int x^{m-2} X^p \, dx + b \int x^{m-1} X^p \, dx + c \int x^m X^p \, dx \right]$$

; sich ergibt:

$$X^p \, dx = \frac{x^{m-1} X^{p+1}}{c \, (m + 2p + 1)} - \frac{b \, (m + p)}{c \, (m + 2p + 1)} \int x^{m-1} X^p \, dx$$

$$- \frac{a \, (m - 1)}{c \, (m + 2p + 1)} \int x^{m-2} X^p \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

4) Substituirt man hierin m statt $m-2$, so erhält man leicht:

$$\int x^m X^p\, dx = \frac{x^{m+1} X^{p+1}}{a(m+1)} - \frac{b(m+p+2)}{a(m+1)} \int x^{m+1} X^p\, dx$$
$$- \frac{c(m+2p+3)}{a(m+1)} \int x^{m+2} X^p\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

5) Wie man sich leicht überzeugt, kommt man durch wiederholte Anwendung der vorstehenden Reductionsformeln, je nach dem betreffenden Ausdrucke, schliesslich auf die Bestimmung eines der Integrale

$$\int X^p dx\,,\ \int x X^p dx\,,\ \int \frac{X^p\, dx}{x}\,.$$

Wie wir aber in der Anmerkung zu §. 97. gezeigt haben, lässt sich $\int X^p\, dx$ auf ein binomisches zurückführen und es bleibt uns nur noch die Auffindung der beiden anderen Integrale übrig.

6) Setzt man zu diesem Ende in (3) $m = 1$, so folgt:

$$\int x X^p\, dx = \frac{X^{p+1}}{2c(p+1)} - \frac{b}{2c} \int X^p dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und das Integral ist nun bestimmbar.

Um schliesslich noch $\int \frac{X^p\, dx}{x}$ zu ermitteln, setze man dafür:

$$\int X^{p-1} \frac{a + bx + cx^2}{x}\, dx = a \int \frac{X^{p-1}}{x}\, dx +$$
$$b \int X^{p-1}\, dx + c \int x X^{p-1}\, dx,$$

so findet man, da nach (5)

$$\int x X^{p-1}\, dx = \frac{X^p}{2cp} - \frac{b}{2c} \int X^{p-1}\, dx,$$

für das Integral

$$\int \frac{X^p\, dx}{x} = \frac{X^p}{2p} + a \int \frac{X^{p-1}}{x}\, dx + \frac{b}{2} \int X^{p-1}\, dx \quad . \quad . \quad (6)$$

wodurch das fragliche Integral auf ein einfacheres von derselben Art zurückgeführt ist.

7) Wird in (6) $-p+1$ statt p gesetzt, so resultirt:

$$\int \frac{dx}{x X^p} = \frac{1}{2a(p-1) X^{p-1}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^p} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x X^{p-1}} \quad . \quad (7)$$

Beispiel.

Um $\int x^2 \sqrt{1 + x + x^2}\, dx$ zu bestimmen, setze man zunächst nach :

$$\int x^2 \sqrt{1 + x + x^2}\, dx = \frac{x}{4} X^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{8} \int x X^{\frac{1}{2}}\, dx - \frac{1}{4} \int X^{\frac{1}{2}}\, dx$$

und hierin nach (5):

$$\int xX^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\,X^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\int X^{\frac{1}{2}}\,dx$$

ferner nach §. 94. Zus. 3.

$$\int X^{\frac{1}{2}}\,dx = \left(x + \frac{1}{2}\right)X + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

so folgt:

$$\int x^2 \sqrt{1 + x + x^2}\,dx = \frac{6x - 5}{24}\,X^{\frac{3}{2}} + \frac{2x + 1}{32}\,X - \frac{3}{64}\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}}$$

oder wenn man nach §. 94. (5)

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{1}{2}}} = l\,(1 + 2x + 2X^{\frac{1}{2}})$$

setzt,

$$\int x^2 \sqrt{1 + x + x^2}\,dx = \frac{6x - 5}{24}\,X^{\frac{3}{2}} + \frac{2x + 1}{32}\,X$$
$$+ \frac{3}{64}\,l(1 + 2x + 2X^{\frac{1}{2}}) + C.$$

Vierzehnter Abschnitt.

Integration transcendenter Functionen.

§. 100. Die Functionen enthalten Exponentialgrössen.

Für die einfachsten Formeln sind bereits in §. 83. die betreffenden Integrale aufgeführt.

Zur Bestimmung der Integrale zusammengesetzterer Ausdrücke bedient man sich im Allgemeinen der theilweisen Integration, indem man mittelst dieser Methode das vorgelegte Integral auf ein einfacheres zurückzuführen und durch wiederholte Anwendung der betreffenden Reductionsformel schliesslich auf ein bekanntes Integral zu bringen sucht. Jedoch nicht in allen Fällen gelingt eine derartige Reduction. Man muss sich alsdann mit einer Näherungsmethode begnügen.

Um nun z. B. $\int f(x)\, a^x\, dx$ zu bestimmen, setze man in §. 85 (1):

$$u = f(x)\ ,\ \frac{dv}{dx} = a^x$$

also

$$\frac{du}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)\ ,\ v = \int a^x\, dx = \frac{a^x}{la}$$

so folgt:

$$\int f(x)\, a^x\, dx = \frac{f(x)\, a^x}{la} - \frac{1}{la}\int f'(x)\, a^x\, dx \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Setzt man dagegen

$$u = a^x\ ,\ \frac{dv}{dx} = f(x)$$

$$\frac{du}{dx} = a^x\, la\ ,\ v = \int f(x)\, dx = F(x)$$

so wird

$$\int f(x)\, a^x\, dx = a^x\, F(x) - la\int F(x)\, a^x\, dx \quad \ldots \quad 2)$$

Von den beiden Reductionsformeln (1) und (2) wird man ts diejenige wählen, welche auf das einfachere Integral führt.

In beiden Fällen gelangt man jedoch manchmal zu dem Inte le

$\int \frac{a^x\,dx}{x}$, das mittelst derselben Formeln nicht weiter reducirbar ist und auch nur annähernd bestimmt werden kann. Es ist dieses z. B. der Fall, wenn man $f(x) = \frac{1}{x^n}$ setzt und die Gl. (2) anwendet.

Setzt man $a^x = z$, $xla = lz$, so wird

$$\int \frac{a^x\,dx}{x} = la \int \frac{dz}{lz}$$

Man nennt den Ausdruck $\int \frac{dz}{lz}$ den Integral-Logarithmus von z. Die Bestimmung desselben werden wir später kennen lernen.

Beispiele.

1) $3\int a^{3x}\,dx = \int a^{3x}\frac{d3x}{dx}\,dx = \frac{a^{3x}}{la} + C.$

2) $\int \frac{a^{lx}\,dx}{x} = \int a^{lx}\frac{dlx}{dx}\,dx = \frac{a^{lx}}{la} + C.$

3) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx = \int e^{\sin x}\frac{d\sin x}{dx}\,dx = e^{\sin x} + C.$

4) Um $\int x^n\,a^x\,dx$, wo n eine ganze positive Zahl bezeichnet, zu bestimmen, verfahre man analog wie oben bei der Entwickelung der Gl. (1). Man findet:

$$\int x^n\,a^x\,dx = \frac{x^n\,a^x}{la} - \frac{n}{la}\int x^{n-1}\,a^x\,dx$$

$$\int x^{n-1}\,a^x\,dx = \frac{x^{n-1}\,a^x}{la} - \frac{n-1}{la}\int x^{n-2}\,a^x\,dx$$

$$\int x^{n-2}\,a^x\,dx = \frac{x^{n-2}\,a^x}{la} - \frac{n-2}{la}\int x^{n-3}\,a^x\,dx \text{ u. s. w.}$$

also nachdem man substituirt hat,

$$\int x^n\,a^x\,dx = \frac{a^x}{la}\left[x^n - \frac{n}{la}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{l^2a}x^{n-2} - \ldots \pm \frac{n!}{l^na}\right] + C.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\int x^n\,e^x\,dx = e^x\left[x^n - nx^{n-1} + n(n-1)\,x^{n-2} - \ldots \pm n!\right] + C$$

5) Soll $\int x^n\,e^{-x}\,dx$ bestimmt werden, so setze man in §. 85. (1):

$$u = x^n,\ \frac{du}{dx} = nx^{n-1};\ \frac{dv}{dx} = e^{-x};\ v = -e^{-x}$$

ı erhält alsdann:

$$\int x^n\,e^{-x}\,dx = -x^n\,e^{-x} + n\int x^{n-1}\,e^{-x}\,dx \text{ u. s. w.}$$

Zur Bestimmung von $\int x^m\,e^{nx}\,dx$, setze in §. 85. (1):

$$u = x^m,\ \frac{du}{dx} = mx^{m-1};\ \frac{dv}{dx} = e^{nx},\ v = \frac{e^{nx}}{n},$$

so wird

$$\int x^m e^{nx} dx = \frac{x^m e^{nx}}{n} - \frac{m}{n}\int x^{m-1} e^{nx} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

und wenn man hierin $m = 1, 2, 3, \ldots$ setzt,

$$\int xe^{nx} dx = \frac{xe^{nx}}{n} - \frac{1}{n}\int e^{nx} dx$$

$$= \frac{xe^{nx}}{n} - \frac{e^{nx}}{n^2} = \frac{e^{nx}}{n^2}(nx - 1)$$

$$\int x^2 e^{nx} dx = \frac{x^2 e^{nx}}{n} - \frac{2}{n}\int xe^{nx} d$$

$$= \frac{x^2 e^{nx}}{n} - \frac{2e^{nx}}{n^3}(nx - 1)$$

$$= \frac{e^{nx}}{n^3}(n^2x^2 - 2nx + 2).$$

Anmerk. Ist daher m eine positive ganze Zahl, so lässt sich das Integral immer bestimmen, indem man schliesslich auf $\int e^{nx} dx$ geführt wird.

Löst man (α) nach dem Integrale der rechten Seite auf und setzt dann $m+1$ statt m, so folgt:

$$\int x^m e^{nx} dx = \frac{x^{m+1} e^{nx}}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^{m+1} e^{nx} dx.$$

Diese Reductionsformel wird für negative Exponenten, den Fall $m = -1$ ausgeschlossen, in Anwendung gebracht.

Das Integral $\int \frac{e^{nx}}{x} dx$ ist in endlicher Form nicht darzustellen.

2) Es ist nach Vorstehendem immer möglich das Integral $\int \varphi(x) e^{nx} dx$ zu bestimmen, wenn $\varphi(x) = a + bx + cx^2 + \ldots$

3) Das Integral $\int \varphi(x) e^{nx} dx$, wo

$$\varphi(x) = \ldots + \frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

lässt sich stets auf das Integral $\int \frac{e^{nx}}{x} dx$ zurückführen.

7) Um $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx$ zu bestimmen, setze man in §. 85. (1)

$$u = xe^x; \; \frac{du}{dx} = e^x(x+1); \; \frac{dv}{dx} = (1+x)^{-2}; \; v = -\frac{1}{1+x};$$

Man erhält alsdann:

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x = \frac{1}{} + C$$

8) Soll das Integral $\int \frac{dx}{ae^{mx} + be^{2mx}}$ ermittelt werden, so se man in §. 85. b:

$$e^{mx} = y; \; mx = ly; \; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{my}$$

Es resultirt alsdann:

$$\int \frac{dx}{ae^{mx} + be^{2mx}} = \frac{1}{m}\int \frac{dy}{y^2\,(a + by)}$$

$$= \frac{1}{m}\int \left(\frac{b^2}{a^2\,(a + by)} + \frac{1}{ay^2} - \frac{b}{a^2 y}\right) dy$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{b}{a^2}\, l\,(a + by) - \frac{1}{ay} - \frac{b}{a^2}\, ly\right].$$

$$= \frac{1}{m}\left[\frac{b}{a^2}\, l\left(\frac{a}{y} + b\right) - \frac{1}{ay}\right] = \frac{1}{am}\left[\frac{b}{a}\, l(b + ae^{m-x}) - e^{-mx}\right] + C.$$

Anmerk. Um allgemein $\int f(e^{mx})\, dx$ zu bestimmen, setze man $e^{mx} = y$, wodurch das Integral übergeht in $\frac{1}{m}\int \frac{f\,(y)}{y}\, dy$.

9) Um $\int \frac{dx}{ae^{mx} + be^{-mx}}$ zu ermitteln, wende man die in vorstehender Anmerkung aufgeführte Substitution an. Man erhält alsdann:

$$\int \frac{dx}{ae^{mx} + be^{-mx}} = \frac{1}{m}\int \frac{dy}{y\left(ay + \frac{b}{y}\right)} = \frac{1}{m}\int \frac{dy}{ay^2 + b}$$

$$= \frac{1}{m\sqrt{ab}}\int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}}{1 + \left(y\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2}\, dy = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\, arc\,tg\left(y\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$= \frac{1}{m\sqrt{ab}}\, arc\,tg\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) + C.$$

10) Ebenso erhält man für

$$\int \frac{dx}{-ae^{mx} + be^{-mx}} = \frac{1}{m}\int \frac{dy}{b - ay^2} = \frac{1}{2m\sqrt{b}}\int \left(\frac{1}{\sqrt{b} - y\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b} + y\sqrt{a}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2m\sqrt{ab}}\, l\, \frac{\sqrt{b} + y\sqrt{a}}{\sqrt{b} - y\sqrt{a}} = \frac{1}{2m\sqrt{ab}}\, l\, \frac{\sqrt{b} + e^{mx}\sqrt{a}}{\sqrt{b} - e^{mx}\sqrt{a}} + C.$$

11) Durch dieselbe Substitution erhält man für

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + be^{mx}}} = \frac{1}{m}\int \frac{dy}{y\,\sqrt{a + by}}.$$

Setzt man hierin:

$$\sqrt{a + by} = z\,,\ \frac{dy}{dz} = \frac{2z}{b},$$

so

$$\frac{1}{m}\int \frac{[illegible]}{[illegible] + by} = \frac{2}{m}\int \frac{dz}{z^2 - a} = \frac{2}{m}\int \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{z - \sqrt{a}} - \frac{1}{z + \sqrt{a}}\right) dz$$

$$= \frac{1}{m\sqrt{a}}\, l\, \frac{z - \sqrt{a}}{z + \sqrt{a}} = \frac{1}{m\sqrt{a}}\, l\, \frac{\sqrt{a + be^{mx}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^{mx}} + \sqrt{a}} + C.$$

§. 101. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^{3x}} = ?$

Aufl. $e^{-x} - \frac{1}{2} e^{-2x} + l \frac{e^x}{1 + e^x} + C.$

Andeut. Man setze $e^x = y$, so folgt: $\int \frac{dy}{y^3 (1 + y)}$; durch Zerlegung in Partialbrüche findet man:

$$\frac{1}{y^3 (1 + y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{1 + y} \text{ u. s. w.}$$

2) $\int \frac{5e^{2x} - 3e^x + 12}{e^{2x} - 2e^x + 6} dx = ?$

Aufl. $2x + \frac{3}{2} l (e^{2x} - 2e^x + 6) + \frac{4}{\sqrt{5}} arc\,tg \frac{e^x - 1}{\sqrt{5}} + C.$

Andeut. Man setze $e^x = y$, so folgt:

$$\int \frac{5y^2 - 3y + 12}{y (y^2 - 2y + 6)} dy.$$

Die Zerlegung in Partialbrüche gibt:

$$\frac{5y^2 - 3y + 12}{y (y^2 - 2y + 6)} = \frac{2}{y} + \frac{3y + 1}{y^2 - 2y + 6}.$$

3) $\int \frac{dx}{e^{3bx} - e^{2bx} - 4e^{bx} + 4} = ?$

Aufl. $\frac{1}{24b} l \frac{e^{6bx} (e^{bx} - 2)^3}{(e^{bx} - 1) (e^{bx} + 2)} + C.$

Andeut. Setzt man $e^{bx} = z$, so geht das Integral über in:

$$\frac{1}{b} \int \frac{dz}{z (z^3 - z^2 - 4z + 4)}$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche findet man:

$$\frac{1}{z (z^3 - z^2 - 4z + 4)} = \frac{1}{4z} - \frac{1}{3 (z - 1)} + \frac{1}{8 (z - 2)} - \frac{1}{24 (z + 2)}$$

4) $\int \frac{e^{2ax} + 24e^{ax} + 15}{e^{2ax} - 2e^{ax} - 15} dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{a} l \frac{(e^{ax} - 5)^4}{e^{ax} (e^{ax} + 3)^2} + C.$

Andeut. Setzt man $e^{ax} = z$, so verwandelt sich das Integral in:

$$\frac{1}{a} \int \frac{(z^2 + 24z + 15)\, dz}{z (z^2 - 2z - 15)} = \frac{1}{a} \int \left(\frac{4}{z - 5} - \frac{1}{z} - \frac{2}{z + 3}\right) dz \text{ u. s. w.}$$

5) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1 + 3e^x + 5e^{2x}}} dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{\sqrt{5}} l (3 + 10e^x + 2\sqrt{5} \sqrt{1 + 3e^x + 5e^{2x}}) + C.$

Andeut. Setzt man $e^x = z$, so folgt nach §. 94 (3):

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + 3z + 5z^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} l (3 + 10z + 2\sqrt{5} \sqrt{1 + 3z + 5z^2}$$

6) $\int e^{2x} \cos(e^x)\, dx = ?$

Aufl. $\cos(e^x) + e^x \sin(e^x) + C.$

Andeut. Setzt man $e^x = z$, so verwandelt sich das Integral in
$$\int z \cos z\, dz = \cos z + z \sin z \quad (\S.\ 85.\ a.)$$

7) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^x}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} - 2(1 + e^x)^{\frac{1}{2}} + C.$

Andeut. Setze $e^x = z$, so geht das Integral über in $\int \frac{z\, dz}{\sqrt{1 + z}}$ und wenn man hierin $1 + z = y^2$ setzt, in: $2\int (y^2 - 1)\, dy$ u. s. w.

8) $\int x^4 e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C.$

9) $\int x^7 e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x (x^7 - 7x^6 + 42x^5 - 210x^4 + 840x^3 - 2520x^2 + 5040x - 5040) + C.$

10) $\int x^{-3} e^x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{2} e^x (x^{-2} + x^{-1}) + \frac{1}{2}\int x^{-1} e^x\, dx.$

11) $\int x^{-5} e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x \left(-\frac{1}{4} x^{-4} - \frac{1}{12} x^{-3} - \frac{1}{24} x^{-2} - \frac{1}{24} x^{-1}\right) + \frac{1}{24}\int x^{-1} e^x\, dx.$

12) $\int (1 + 2x + 3x^2 + 5x^3) e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x (5x^3 - 12x^2 + 26x - 25) + C.$

13) $\int (2 + 4x - 7x^2 + 8x^3 - x^4 + 2x^5) e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x (2x^5 - 11x^4 + 52x^3 - 163x^2 + 330x - 328) + C.$

14) $\int x^{\frac{7}{2}} e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x \left(x^{\frac{7}{2}} - \frac{7}{2} x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{4} x^{\frac{3}{2}}\right) - \frac{105}{8}\int x^{\frac{1}{2}} e^x\, dx.$

15) $\int x^{\frac{8}{3}} e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x \left(x^{\frac{8}{3}} - \frac{8}{3} x^{\frac{5}{3}}\right) + \frac{40}{9}\int x^{\frac{2}{3}} e^x\, dx.$

§. 102. Die Functionen enthalten logarithmische Grössen.

Auch hier führt die Anwendung der bekannten Reductionsformel (1) des §. 85 in vielen Fällen zum gewünschten Ziele.

Wäre z. B. das Integral $\int f(x)\, l\, x\, dx$ zu bestimmen, so setze man:

$$u = lx\,;\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\,;\ \frac{dv}{dx} = f(x)\ ;\ v = \int f(x)\, dx = F(x).$$

Man erhält alsdann:

$$\int f(x)\, lx\, dx = lx\, F(x) - \int \frac{F(x)}{x}\, dx.$$

Durch Einführung einer neuen Variabeln können solche Integrale auch oft auf andere der früher behandelten Art zurückgeführt werden. So geht z. B. das Integral $\int x^m f(lx)\, dx$, wenn man $lx = y$, also

$$x = e^y\,,\ \frac{dx}{dy} = e^y$$

setzt, über in

$$\int e^y\ f(y)\ e^{my}\, dy = \int e^{(m+1)y}\, f(y)\, dy.$$

Ist nun f eine rationale ganze Function, so lässt sich dieses Integral nach früheren Regeln bestimmen.

Wir gehen sogleich über zur Lösung einiger

Beispiele.

1) Um $\int l^n x\, dx$ für ganze positive n zu bestimmen, setze man in der Gl. (1) des §. 85:

$$u = l^n x\ ;\ \frac{du}{dx} = \frac{n l^{n-1} x}{x}\ ;\ \frac{dv}{dx} = 1\ ;\ v = \int dx = x\,;$$

so folgt.

$$\int l^n x\, dx = x l^n x - n \int l^{n-1} x\, dx \qquad \ldots \quad (1)$$

Setzt man hierin der Reihe nach $n = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots$ so ergibt sich:

$$\int lx\, dx = xlx - \int dx = x\,(lx - 1) + C$$

$$\int l^2x\, dx = xl^2x - 2\int lx\, dx$$
$$= xl^2x - 2x\,(lx - 1) + C.$$
$$= x\,(l^2x - 2lx + 2) + C.$$

$$\int l^3x\, dx = xl^3x - 3\int l^2x\, dx$$
$$= x\,[l^3x - 3l^2x + 6lx - 6] + C \text{ u. s. w.}$$

2) Aus obiger Reductionsformel (1) folgt unmittelbar:

$$\int l^{n-1} x\, dx = \frac{x}{n} l^n x - \frac{1}{n}\int l^n x\, dx$$

oder wenn man $n + 1$ statt n, setzt,

$$\int l^n x\, dx = \frac{x}{n+1} l^{n+1} x - \frac{1}{n+1}\int l^{n+1} x\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Von dieser Formel macht man stets Gebrauch, wenn n negativ ist.

Dieselbe ist jedoch für $n = -1$ nicht anwendbar und führt auf das Integral $\int \frac{dx}{lx}$, das sich, wie schon in §. 100 angegeben wurde, nicht in endlicher Form darstellen lässt.

Setzt man in (2) der Reihe nach $n = -2, -3, -4, \ldots$ so erhält man bezüglich:

$$\int \frac{dx}{l^2 x} = -\frac{x}{lx} + \int \frac{dx}{lx}$$

$$\int \frac{dx}{l^3 x} = -\frac{x}{2l^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{l^2 x}$$

$$= -\frac{x}{2l^2 x} - \frac{x}{2lx} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{lx}$$

$$\int \frac{dx}{l^4 x} = -\frac{x}{3l^3 x} - \frac{x}{6l^2 x} - \frac{x}{6lx} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{lx} \text{ u. s. w.}$$

3) Um allgemein $\int x^m l^n x\, dx$ zu bestimmen, setze man in §. 85. (1):

$$u = l^n x\,;\; \frac{du}{dx} = \frac{n l^{n-1} x}{x}\,;\; \frac{dv}{dx} = x^m\,;\; v = \int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

so folgt:

$$\int x^m l^n x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} l^n x - \frac{n}{m+1}\int x^m l^{n-1} x\, dx \quad . \quad . \quad (3)$$

Substituirt man hierin der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots$ so folgt:

$$\int x^m lx\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} lx - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(lx - \frac{1}{m+1}\right) + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

$$\int x^m l^2 x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} l^2 x - \frac{2}{m+1}\int x^m lx\, dx$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(l^2 x - \frac{2}{m+1} lx + \frac{2}{(m+1)^2}\right) + C$$

u. s. w.

$$\int x^m l^3 x\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} l^3 x - \frac{3}{m+1}\int x^m l^2 x\, dx$$

$$\frac{x^{m+1}}{+1}\left(l^3 x - \frac{3}{m+1} l^2 x + \frac{3 \cdot 2}{(m+1)^2} lx - \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(m+1)^3}\right) + C$$

und allgemein:

$$\int x^m l^n x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(l^n x - \frac{n}{m+1} l^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{(m+1)^2} l^{n-2}x - \frac{n(n-1)(n-2)}{(m+1)^3} l^{n-3}x + \ldots\right) + C.$$

Anmerk. Ist n eine positive ganze Zahl und m nicht gleich -1, so ist das Integral in endlicher Form stets angebbar.

4) Soll $\int \frac{x^m\,dx}{l^n x}$ bestimmt werden, so entwickle man aus (3)

$$\int x^m l^{n-1} x\,dx = \frac{x^{m+1}}{n} l^n x - \frac{m+1}{n}\int x^m l^n x\,dx,$$

setze hierin $n+1$ statt n und nehme darnach n negativ. Man findet alsdann

$$\int \frac{x^m\,dx}{l^n x} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\,l^{n-1}x} + \frac{m+1}{n-1}\int \frac{x^m\,dx}{l^{n-1}x} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Setzt man hierin der Reihe nach $n = 2, 3, 4, \ldots$ so folgt:

$$\int \frac{x^m dx}{l^2 x} = -\frac{x^{m+1}}{lx} + (m+1)\int \frac{x^m\,dx}{lx}$$

$$\int \frac{x^m dx}{l^3 x} = -\frac{x^{m+1}}{2l^2 x} + \frac{m+1}{2}\int \frac{x^m dx}{l^2 x}$$

$$= -\frac{x^{m+1}}{2l^2 x} - \frac{m+1}{2}\,\frac{x^{m+1}}{lx} + \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 \int \frac{x^m dx}{lx}$$

und allgemein:

$$\int \frac{x^m dx}{l^n x} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\,l^{n-1}x}\left[1 + \frac{m+1}{n-2}\,lx + \frac{(m+1)^2}{(n-2)(n-3)}\,l^2 x + \frac{(m+1)^3}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,l^3 x + \ldots\right] + \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-2)!}\int \frac{x^m dx}{lx}$$

Das zu bestimmende Integral hängt demnach schliesslich von $\int \frac{x^m dx}{lx}$ ab und ist nicht in endlicher Form darstellbar.

5) Zur Bestimmung von $\int \frac{x\,lx}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$ setze man in §. 85. (1)

$$u = lx\,;\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\,;\ \frac{dv}{dx} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,;\ v = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sqrt{a^2+x^2}$$

so folgt:

$$\int \frac{x\,lx}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = lx\,\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,dx$$

$$= lx\,\sqrt{a^2+x^2} - \int\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \frac{a^2}{x\sqrt{a^2+x^2}}\right)dx$$

$$= lx\,\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} - a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= lx\,\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2+x^2} - a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Um aber $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$ zu finden, setze man in §. 94. (6) für a, b, c bezüglich $a^2, 0, 1$.

Es wird alsdann, wenn man $\frac{1}{a}\, l2a$ sogleich zu C schlägt,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a}\, l\, \frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x} + C.$$

und somit, da

$$-l\, \frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x} = l\, \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}-a} = l\, \frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{x},$$

$$\int \frac{xlx}{\sqrt{a^2+x^2}}\, dx = (lx-1)\sqrt{a^2+x^2} + .al\, \frac{\sqrt{a^2+x^2}+a}{x} + C.$$

§. 103. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int (1 + 2lx + 3l^2x)\, dx = ?$

Aufl. $x(5 - 4lx + 3l^2x)$.

Andeut. Man setze $lx = y$, so verwandelt sich das Integral in:

$$\int (1 + 2y + 3y^2)\, e^y\, dy$$

2) $\int (2 - 3lx + 7l^2x - 4l^3x)\, dx = ?$

Aufl. $x(43 - 41lx + 19l^2x - 4l^3x)$.

3) $\int (1 - 4lx + 5l^2x - 3l^3x + l^4x)\, dx = ?$

Aufl. $x(57 - 56lx + 26l^2x - 7l^3x + l^4x)$.

4) $\int l^5x\, dx = ?$

Aufl. $x(-120 + 120lx - 60l^2x + 20l^3x - 5l^4x + l^5x) + C$.

5) $\int x^3 l^4x\, dx = ?$

Aufl. $x^4\left(\frac{1}{4}\, l^4x - \frac{1}{4}\, l^3x + \frac{3}{16}\, l^2x - \frac{3}{32}\, lx + \frac{3}{128}\right) + C$.

6) $\int x^4 l^3x\, dx = ?$

Aufl. $x^5\left(\frac{1}{5}\, l^3x - \frac{3}{25}\, l^2x + \frac{6}{125}\, lx - \frac{6}{625}\right) + C$.

$\int \frac{l^mx}{x}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{l^{m+1}x}{m+1} + C$.

...at. $\int \frac{l^mx}{x}\, dx = \int l^mx\, \frac{dlx}{dx}\, dx$

8) $\int x^{-5}\, l^3x\, dx = ?$

Aufl. $-x^{-4}\left(\frac{1}{4}\, l^3x + \frac{3}{16}\, l^2x + \frac{3}{32}\, lx + \frac{3}{128}\right) + C.$

9) $\int \frac{dx}{l^{-6}x} = ?$

Aufl. $-x\left[\frac{1}{5}\, l^{-5}x + \frac{1}{20}\, l^{-4}x + \frac{1}{60}\, l^{-3}x + \frac{1}{120}\, l^{-2}x + \frac{1}{120}\, l^{-1}x\right] + \frac{1}{120}\int \frac{dx}{lx}.$

10) $\int x^{-2}\, l^5x\, dx = ?$

Aufl. $-x^{-1}[l^5x + 5l^4x + 20l^3x + 60l^2x + 120lx + 120] + C.$

11) $\int \frac{x^4dx}{l^3x} = ?$

Aufl. $-\frac{x^5}{2}\left(\frac{1}{2l^2x} + \frac{5}{lx}\right) + \frac{25}{2}\int \frac{x^4dx}{lx}.$

12) $\int \frac{x^2dx}{l^4x} = ?$

Aufl. $-x^3\left(\frac{1}{3l^3x} + \frac{1}{2l^2x} + \frac{3}{2lx}\right) + \frac{9}{2}\int \frac{x^2\,dx}{lx}.$

13) $\int \frac{x^7\,dx}{l^5x} = ?$

Aufl. $-x^8\left(\frac{1}{4l^4x} + \frac{2}{3l^3x} + \frac{8}{3l^2x} + \frac{64}{3lx}\right) + \frac{512}{3}\int \frac{x^7\,dx}{lx}$

14) $\int \sin\,(lx)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x}{2}\,[\sin\,(lx) - \cos\,(lx)] + C.$

Andeut. Setzt man $lx = y$, so geht das Integral über in $\int e^y \sin y\, dy$. Dafür findet man nach §. 85. (1):

$$e^y \sin y - \int e^y \cos y\, dy = e^y \sin y - e^y \cos y - \int e^y \sin y\, dy.$$

und es ist somit

$$\int e^y \sin y\, dy = \frac{1}{2}\, e^y\, (\sin y - \cos y) \text{ u. s. w.}$$

15) $\int \cos\,(lx)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x}{2}\,[\sin\,(lx) + \cos\,(lx)] + C.$

§. 104. Die Functionen enthalten goniometrische Functionen.

1) Setzt man in den Formeln 4 bis 7 des §. 83: nx statt u, so folgt der Reihe nach:

$$\int \cos nx\, dx = \frac{\sin nx}{n} + C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\int \sin nx\, dx = -\frac{\cos nx}{n} + C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 nx} = \frac{tg\, nx}{n} + C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 nx} = -\frac{\cot nx}{n} + C \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

2) Berücksichtigt man die im Lehrbuche der ebenen Trigonometrie §. 17 gegebenen Formeln (1) bis (4), so erhält man:

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int \sin (m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \sin (m-n)x dx$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int \cos (m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \cos (m-n)x dx$$

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = -\frac{1}{2}\int \cos (m+n)x dx + \frac{1}{2}\int \cos (m-n)x dx$$

oder nach obigen Formeln (1) und (2)

$$\int \sin mx \cos nx\, dx = -\frac{\cos (m+n)\, x}{2\,(m+n)} - \frac{\cos (m-n)\, x}{2\,(m-n)} + C \quad . \; . \quad (5)$$

$$\int \cos mx \cos nx\, dx = \frac{\sin (m+n)\, x}{2\,(m+n)} + \frac{\sin (m-n)\, x}{2\,(m-n)} + C \quad . \; . \; . \quad (6)$$

$$\int \sin mx \sin nx\, dx = -\frac{\sin (m+n)\, x}{2\,(m+n)} + \frac{\sin (m-n)\, x}{2\,(m-n)} + C \quad . \; . \quad (7)$$

3) Um $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ zu entwickeln, haben wir verschiedene Fälle zu unterscheiden.

sei positiv und zu verkleinern.

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{m-1} x \sin x \cos^n x\, dx$$ und nun in §. 85 (1)

$$u = \sin^{m-1} x; \; \frac{du}{dx} = (m-1) \sin^{m-2} x \cos x,$$

$$\frac{dv}{dx} \quad \sin x; \; v = \int \cos^n x \sin x\, dx = -\int \cos^n x \frac{d \cos x}{dx}\, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

so folgt:

$$\int sin^m x\, cos^n x\, dx = -\frac{sin^{m-1}x\, cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int sin^{m-2}x\, cos^{n+2}x\, dx \quad (7a)$$

oder da

$$sin^{m-2}x\ cos^{n+2}x = sin^{m-2}x\ cos^n x - sin^m x\ cos^n x,$$

$$\int sin^m x\ cos^n x\ dx = -\frac{sin^{m-1}x\ cos^{n+1}x}{n+1} +$$

$$\frac{m-1}{n+1}\left[\int sin^{m-2}x\ cos^n x\ dx - \int sin^m x\ cos^n x\ dx\right].$$

Hieraus folgt:

$$\int sin^m x\, cos^n x\, dx = -\frac{sin^{m-1}x\, cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int sin^{m-2}x\, cos^n x\, dx \quad . . (8)$$

β) m **sei negativ und zu vergrössern.**

Aus der Formel (8) folgt unmittelbar:

$$\int sin^{m-2}x\ cos^n x\ dx = \frac{sin^{m-1}x\ cos^{n+1}x}{m-1} + \frac{m+n}{m-1}\int sin^m x\ cos^n x\ dx$$

und hieraus, wenn man $-m+2$ statt m setzt,

$$\int \frac{cos^n x}{sin^m x}\, dx = -\frac{cos^{n+1}x}{(m-1)\ sin^{m-1}x} - \frac{n-m+2}{m-1}\int \frac{cos^n x}{sin^{m-2}x}\, dx \quad . . . (9)$$

γ) n **sei positiv und soll verkleinert werden.**

Setzt man

$$\int sin^m x\ cos^n x dx = \int sin^m x\ cos^{n-1}x\ cos\, x\ dx$$

und nun in §. 85. (1):

$$u = cos^{n-1}x\ ;\ \frac{du}{dx} = -(n-1)\ cos^{n-2}x\ sin\, x;$$

$$\frac{dv}{dx} = sin^m x\ cos\, x\ ,\ v = \int sin^m x\ cos\, x\ dx$$

$$= \frac{1}{m+1}\int \frac{d\ sin^{m+1}x}{dx}\, dx = \frac{sin^{m+1}x}{m+1}$$

so folgt:

$$\int sin^m x\ cos^n x\ dx = \frac{sin^{m+1}x\ cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int sin^{m+2}x\, cos^{n-2}x\ dx. \quad (9a)$$

oder da

$$sin^{m+2}x\ cos^{n-2}x = sin^m x\ cos^{n-2}x - sin^m x\ cos^n x,$$

$$\int sin^m x\ cos^n x\ dx = \frac{sin^{m+1}x\ cos^{n-1}x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\left[\int sin^m x\ cos^{n-2}x\right.$$

$$\left. - \int sin^m x\ cos^n x\ dx\right].$$

Hieraus ergibt sich:

$$\int sin^m x\ cos^n x\ dx = \frac{sin^{m+1}x\ cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int sin^m x\ cos^{n-2}x \quad (10)$$

δ) n **sei negativ und zu vergrössern.**

Aus der letzten Formel (10) folgt unmittelbar

$$\int sin^m x\, cos^{n-2}x\, dx = -\frac{sin^{m+1}x\, cos^{n-1}x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}\int cos^n x\, sin^m x\, dx$$

und hiernach, wenn man $-n+2$ statt n setzt,

$$\int \frac{sin^m x}{cos^n x}dx = \frac{sin^{m+1}x}{(n-1)\, cos^{n-1}x} + \frac{n-m-2}{n-1}\int \frac{sin^m x}{cos^{n-2}x}dx \quad . \quad . \quad (11)$$

Anmerk. Die Reductionsformeln für $\int sin^m x\, cos^n x\, dx$ können auch auf folgende Weise erhalten werden:

Man setze:

$$sin\, x = y\ ;\ x = arc\, sin\, y\ ;\ \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ ,\ cos\, x = \sqrt{1-y^2}$$

so wird

$$\int sin^m x\, cos^n x\, dx = \int y^m\, (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dy$$

Wendet man nun auf dieses Integral die verschiedenen Reductionsformeln des binomischen Integrales an und führt zuletzt wieder $sin x$ statt y ein, so gelangt man zu dem gewünschten Ziele.

4) Nimmt man in (9) n und in (11) m negativ, so erhält man

$$\int \frac{dx}{sin^m x\, cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\, sin^{m-1}x\, cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\int \frac{dx}{sin^{m-2}x\, cos^n x} \quad (12)$$

$$\int \frac{dx}{sin^m x\, cos^n x} = \frac{1}{(n-1)\, sin^{m-1}x\, cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{sin^m x\, cos^{n-2}x} \quad (13)$$

Anmerk. Für die Fälle, dass $m = 1$ oder $n = 1$ oder $m + n = -2$ ist, können diese Integrale unmittelbar angegeben werden. Denn man hat:

$$\int sin^m x\, cos\, x\, dx = \frac{sin^{m+1}x}{m+1};$$

$$\int sin\, x\, cos^n x\, dx = -\frac{cos^{n+1}x}{n+1};$$

$$\int sin^m x\, cos^{-(m+2)}x\, dx = \int tg^m x\, \frac{1}{cos^2 x}\, dx = \frac{tg^{m+1}x}{m+1}.$$

5) Setzt man in den Gleichungen (8) und (9) $n = 0$ und in den Gl. (10) und (11) $m = 0$, so erhält man der Reihe nach:

$$\int sin^m x\, dx = -\frac{sin^{m-1}x\, cos\, x}{m} + \frac{m-1}{m}\int sin^{m-2}x\, dx \quad . \quad (14)$$

$$\int \frac{dx}{sin^m x} = -\frac{cos\, x}{(m-1)\, sin^{m-1}x} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{dx}{sin^{m-2}x} \quad . \quad (15)$$

$$\int cos^n x\, dx = \frac{sin\, x\, cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int cos^{n-2}x\, dx \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{cos^n x} = \frac{sin\, x}{(n-1)\, cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{cos^{n-2}x} \quad . \quad . \quad (17)$$

Durch wiederholte Anwendung der vorstehenden Reductionsfo[rmeln] werden die betreffenden Integrale auf einfachere zurück-

geführt, in welchen m und n zwischen -1 und $+1$, diese Grenzen inbegriffen, liegen. Sind m und n ganze Zahlen, so gelangt man schliesslich zu einem der nachstehenden Integrale:

$$\int dx, \int \cos x\, dx, \int \sin x\, dx, \int \frac{\sin x}{\cos x} dx,$$

$$\int \sin x \cos x\, dx, \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\cos x}, \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

welche bereits in §. 83 bestimmt wurden.

7) Um $\int tg^m x\, dx$ und $\int cot^m x\, dx$ zu bestimmen, schreibe man dafür bezüglich $\int \sin^m x \cos^{-m} x\, dx$ und $\int \sin^{-m} x \cos^m x\, dx$, so sind diese Integrale von der oben behandelten Form.

Man findet:

$$\int tg^m x\, dx = \frac{tg^{m-1} x}{m-1} - \int tg^{m-2} x\, dx$$

und nach (9a)

$$\int tg^m x\, dx = \frac{tg^{m+1} x}{m+1} - \int tg^{m+2} x\, dx.$$

Anmerk. 1) Wird in vorstehenden Reductionsformeln der Nenner Null, so z. B. in (8) $m + n = 0$, und ist n negativ, so bringe man nach (11) das Integral auf die Form

$$\int \sin^m x\, dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{\sin^m x}{\cos x} dx.$$

2) Für gebrochene m und n lassen sich obige Integrale im Allgemeinen nur annähernd ermitteln, wie wir später sehen werden.

8) Zur Bestimmung von $\int x^m \sin x\, dx$ setze man in §. 85 (1)

$$u = x^m;\ \frac{dv}{dx} = \sin x$$

so folgt:

$$\int x^m \sin x\, dx = -x^m \cos x + m \int x^{m-1} \cos x\, dx \quad . \quad . \quad (18)$$

Verfährt man mit $\int x^{m-1} \cos x\, dx$ auf analoge Weise, so erhält man

$$\int x^{m-1} \cos x\, dx = x^{m-1} \sin x - (m-1) \int x^{m-2} \sin x\, dx \qquad 19)$$

Durch Einführung dieses Werthes in (18) ergibt sich:

$$\int x^m \sin x\, dx = -x^m \cos x + m x^{m-1} \sin x - m(m-1) \int x^{m-2} \sin x\, dx \qquad 20)$$

9) Bestimmt man aus (20) $\int x^{m-2} \sin x\, dx$ und setzt dann m statt $m-2$, also $m+2$ statt m, so folgt:

$$\int x^m \sin x\, dx = -\frac{x^{m+2}\cos x - (m+2)\, x^{m+1}\sin x}{(m+1)(m+2)}$$

$$-\frac{1}{(m+1)(m+2)}\int x^{m+2}\sin x\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

10) Setzt man in §. 85 (1)

$$u = x^m,\ \frac{dv}{dx} = \cos x$$

so erhält man:

$$\int x^m \cos x\, dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

und wenn man nach Obigem den Werth von $\int x^{m-1}\sin x\, dx$ einführt,

$$\int x^m \cos x\, dx = x^m \sin x + m x^{m-1}\cos x - m(m-1)\int x^{m-2}\cos x\, dx \quad . \quad (23)$$

11) Wenn man aus (23) zunächst $\int x^{m-2}\cos x\, dx$ bestimmt und darnach $m + 2$ statt m setzt, so resultirt:

$$\int x^m \cos x\, dx = \frac{x^{m+2}\sin x + (m+2)\, x^{m+1}\cos x}{(m+1)(m+2)}$$

$$-\frac{1}{(m+1)(m+2)}\int x^{m+2}\cos x\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

12) Durch wiederholte Anwendung der Reductionsformeln (18) bis (24) gelangt man schliesslich zu einem der Integrale

$$\int \sin x\, dx,\ \int \cos x\, dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\, dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\, dx,$$

von welchen bekanntlich die zwei letzten nur annähernd ermittelt werden können.

So sind z. B. alle Integrale von der Form

$$\int \sin x\, f(x)\, dx \text{ und } \int \cos x\, f(x)\, dx$$

bestimmbar, wenn $f(x)$ eine rationale ganze Function von x bedeutet.

13) Setzt man $tg\,\frac{x}{2} = z$, so wird

$$tg\, x = \frac{2\, tg\,\frac{x}{2}}{1 - tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1 - z^2}$$

al

$$\sin x = \frac{tg\, x}{\sqrt{1 + tg^2 x}} = \frac{2z}{1 + z^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2},\ \cot x = \frac{1 - z^2}{2z}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2}{1 + z^2}$$

Wir schliessen hieraus, dass die Integration eines jeden Bruches, dessen Zähler und Nenner ganze rationale Functionen von

$$\sin x\,,\ \cos x\,,\ tg\,x \text{ oder } \cot x$$

sind, durch Substitution von $tg\,\frac{x}{2} = z$ auf die Integration eines Bruches, dessen Zähler und Nenner rationale Functionen von z sind, zurückgeführt werden kann.

Um z. B. $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$ zu bestimmen, setzen wir

$$tg\,\frac{x}{2} = z\,,\quad \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\,,\quad \frac{dx}{dz} = \frac{2}{1 + z^2}$$

so folgt:

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = 2\int \frac{dz}{a + b + (a - b)\,z^2} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Ist $a = b$, so hat man

$$\int \frac{dx}{a\,(1 + \cos x)} = 2\int \frac{dz}{2a} = \frac{z}{a} = \frac{1}{a}\,tg\,\frac{x}{2} + C \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Für den Fall, dass a und b ungleich sind, setze man nach (25)

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{a - b}\int \frac{dz}{\frac{a + b}{a - b} + z^2}$$

und hierin bezüglich k^2 oder $-k^2$ statt $\frac{a + b}{a - b}$, je nachdem dieser Bruch positiv oder negativ ausfällt. Man findet alsdann beziehungsweise

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{a - b}\int \frac{dz}{z^2 + k^2} = \frac{2}{k\,(a - b)}\int \frac{\frac{dz}{k}}{\left(\frac{z}{k}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{2}{k\,(a - b)}\,arctg\,\frac{z}{k} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,arctg\left[tg\,\frac{x}{2}\sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\right] \quad . \quad . \quad (27)$$

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{a - b}\int \frac{dz}{z^2 - k^2} = \frac{2}{a - b}\cdot\frac{1}{2k}\int\left(\frac{1}{z - k} - \frac{1}{z + k}\right)dz$$

$$= \frac{1}{k\,(a - b)}\,l\,\frac{z - k}{z + k} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\,l\,\frac{-\sqrt{b + a} + tg\,\frac{x}{2}\cdot\sqrt{b - a}}{\sqrt{b + a} + tg\,\frac{x}{2}\cdot\sqrt{b - a}} \quad (28)$$

Anmerk. Um $\int \frac{\cos x\,dx}{a + b\cos x}$ zu bestimmen, setze man dafür

$$\int\left[\frac{1}{b} - \frac{a}{b\,(a + b\cos x)}\right]dx = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a + b\cos x}\,,$$

so wird hierdurch das Integral auf das vorige zurückgeführt.

14) Um eine Reductionsformel für das Integral

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{(a + b \cos x)^n}\, dx,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet, herzuleiten, suchen wir dasselbe auf ein anderes Integral von der Form $\int \frac{A + B \cos x}{(a + b \cos x)^{n-1}}\, dx$ zurückzuführen.

Soll diese Reduction möglich sein, so muss sich offenbar der Ausdruck

$$\frac{\alpha + \beta \cos x - (A + B \cos x)(a + b \cos x)}{(a + b \cos x)^n}$$

integriren lassen. Bezeichnen wir das entsprechende Integral durch $\frac{X}{(a + b \cos x)^{n-1}}$, so wird der Differentialquotient hiervon

$$= \frac{(a + b \cos x)\, X' + (n - 1)\, b \sin x \,.\, X}{(a + b \cos x)^n}$$

Setzt man nun

$$(a + b \cos x)\, X' + (n - 1)\, b \sin x\, X$$
$$= \alpha + \beta \cos x - (A + B \cos x)(a + b \cos x)$$

und hierin $\qquad X = C \sin x\,,\; X' = C \cos x,$

so erhält man:

$$bC + aC \cos x + (n - 2)\, bC \sin^2 x = \alpha - Aa - Bb$$
$$+ (\beta - Ab - Ba) \cos x + Bb \sin^2 x$$

und hieraus

$$A = \frac{a\alpha - b\beta}{a^2 - b^2}\,,\quad B = \frac{(n - 2)(a\beta - \alpha b)}{(n - 1)(a^2 - b^2)}\,,\quad C = \frac{a\beta - b\alpha}{(n - 1)(a^2 - b^2)}$$

Aus der Gleichung

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x - (A + B \cos x)(a + b \cos x)}{(a + b \cos x)^n}\, dx = \frac{X}{(a + b \cos x)^{n-1}}$$

erhält man daher

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{(a + b \cos x)^n}\, dx = \frac{C \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + \int \frac{A + B \cos x}{(a + b \cos x)^{n-1}}\, dx \quad (29)$$

wo nun noch für A, B und C die betreffenden Werthe einzuführen sind.

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel gelangt man zuletzt [illegible] m der Integrale

$$\int \frac{\gamma}{a + b \cos x}\, dx \text{ oder } \int \frac{\delta \cos x}{a + b \cos x}\, dx$$

[illegible] Bestimmung wir oben kennen gelernt haben.

Wie man sich leicht überzeugt, ist vorstehende Reductions-[illegible] für $n = 1$ und $b \pm a = 0$ nicht anwendbar, wir haben darum [illegible] Fälle noch besonders zu betrachten.

α) Ist $b = a$, so hat man

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{a^n (1 + \cos x)^n} dx = \int \frac{\beta (1 + \cos x) + \alpha - \beta}{a^n (1 + \cos x)^n} dx$$

$$= \frac{\beta}{a^n} \int (1 + \cos x)^{-(n-1)} dx + \frac{\alpha - \beta}{a^n} \int (1 + \cos x)^{-n} dx$$

$$= \frac{\beta}{a^n} \int \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{-(n-1)} dx + \frac{\alpha - \beta}{a^n} \int \left(2 \cos^2 \frac{x}{2}\right)^{-n} dx$$

oder wenn man $x = 2z$ setzt,

$$= \frac{2^{-n+2}\beta}{a^n} \int (\cos z)^{-2(n-1)} dz + \frac{2^{-n+1}(\alpha - \beta)}{a^n} \int (\cos z)^{-2n} dz. \quad . \quad (30)$$

also zwei Integrale, welche bereits oben bestimmt wurden.

β) Ist $b = -a$, so geht das Integral über in:

$$\frac{1}{a^n} \int \frac{\alpha + \beta \cos x}{(1 - \cos x)^n} dx = \frac{1}{a^n} \int \frac{-\beta (1 - \cos x) + \alpha + \beta}{(1 - \cos x)^n} dx$$

$$= -\frac{\beta}{a^n} \int \frac{dx}{(1 - \cos x)^{n-1}} + \frac{\alpha + \beta}{a^n} \int \frac{dx}{(1 - \cos x)^n}$$

oder $x = 2z$ gesetzt,

$$= -\frac{\beta}{a^n} \int \frac{2}{(2 \sin^2 z)^{n-1}} dz + \frac{\alpha + \beta}{a^n} \int \frac{2dz}{(2 \sin^2 z)^n}$$

$$= -\frac{\beta}{2^{n-2} a^n} \int \frac{dz}{(\sin z)^{2(n-1)}} + \frac{\alpha + \beta}{2^{n-1} a^n} \int \frac{dz}{(\sin z)^{2n}} \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

welche Integrale ebenfalls früher schon behandelt wurden.

γ) Für $n = 1$ erhält man unmittelbar:

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{a + b \cos x} dx = \frac{1}{b} \int \frac{\beta (a + b \cos x) + \alpha b - a\beta}{a + b \cos x} dx$$

$$= \frac{\beta}{b} x + \frac{\alpha b - a\beta}{b} \int \frac{dx}{a + b \cos x} \quad . \quad (32)$$

16) Um das Integral von der Form $\int \frac{\alpha + \beta \sin x}{(a + b \sin x)^n} dx$ auf das oben behandelte zurückzuführen, darf man nur $x = \frac{\pi}{2} + z$, also $\sin x = \cos z$ setzen. Dasselbe nimmt alsdann die bekannte Form $\int \frac{\alpha + \beta \cos z}{(a + b \cos z)^n} dz$ an.

17) Wäre $\int \frac{dx}{(a + b \cos x + c \sin x)^n}$ zu bestimmen, so setz[illegible] [illegible]n

$$b = r \cos \alpha \;, \; c = r \sin \alpha$$

das vorgelegte Integral geht darnach über in

$$\int \frac{dx}{[a + r \cos (x - \alpha)]^n},$$

oder wenn man $x - \alpha = z$ setzt, in $\int \frac{dz}{(a + r\cos z)^n}$, welches Integral aber bereits früher besprochen wurde.

18) Zur Bestimmung der Integrale

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx \text{ und } \int e^{ax} \sin bx\, dx,$$

setze man in §. 85 (1)

$$u = e^{ax}\,;\ \frac{du}{dx} = ae^{ax}$$

und im ersten Falle

$$\frac{dv}{dx} = \cos bx\ ,\ v = \frac{\sin bx}{b},$$

im zweiten Falle

$$\frac{dv}{dx} = \sin bx\ ,\ v = -\frac{\cos bx}{b}$$

so erhält man:

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

Durch Auflösung dieser beiden Gleichungen nach den fraglichen Integralen ergibt sich:

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C \quad . \quad (33)$$

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C \quad . \quad (33a)$$

19) Zur Bestimmung des Integrales $\int e^{ax} \sin^n x\, dx$ setze man in §. 85 (1):

$$u = \sin^n x\ ,\ \frac{du}{dx} = n \sin^{n-1} x \cos x\ ;\ v = \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

so geht dasselbe über in:

$$\int e^{ax} \sin^n x\, dx = \frac{e^{ax} \sin^n x}{a} - \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin^{n-1} x \cos x\, dx \quad . \quad (34)$$

[Au]f dieselbe Weise findet man aus §. 85 (1), wenn man daselbst

$$u = \sin^{n-1} x \cos x\ ;\ \frac{du}{dx} = (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - \sin^n x$$

$$= (n-1) \sin^{n-2} x - n \sin^n x\ ;\ \frac{dv}{dx} = e^{ax}\ ;\ v = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int e^{ax} \sin^{n-1}x \cos x \, dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1}x \cos x}{a} - \frac{n-1}{a} \int e^{ax} \sin^{n-2}x \, dx$$
$$+ \frac{n}{a} \int e^{ax} \sin^n x \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Durch Einführung dieses Werthes in die Gleichung (34) gelangt man zu der Formel:

$$\int e^{ax} \sin^n x \, dx = \frac{e^{ax} \sin^{n-1}x}{a^2 + n^2} (a \sin x - n \cos x)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \sin^{n-2}x \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

20) Auf ganz analoge Weise erhält man

$$\int e^{ax} \cos^n x \, dx = \frac{e^{ax} \cos^{n-1}x}{a^2 + n^2} (a \cos x + n \sin x)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cos^{n-2}x \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

21) Für positive ganze Werthe von n führen diese Formeln schliesslich zu einem der Integrale

$$\int e^{ax} \cos x \, dx \, , \int e^{ax} \sin x \, dx \, , \int e^{ax} \, dx.$$

Das letzte derselben ist bekanntlich $\frac{e^{ax}}{a}$ und die beiden anderen werden erhalten, wenn man in (33) und (33a) $b = 1$ setzt. Man findet alsdann:

$$\int e^{ax} \cos x \, dx = \frac{e^{ax} (\sin x + a \cos x)}{a^2 + 1} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$\int e^{ax} \sin x \, dx = \frac{e^{ax} (a \sin x - \cos x)}{a^2 + 1} + C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

22) Bestimmt man aus (36) und (37) die Werthe von

$$\int e^{ax} \sin^{n-2}x \, dx \quad \text{und} \quad \int e^{ax} \cos^{n-2}x \, dx$$

nimmt alsdann n negativ und setzt in den erhaltenen Gleichungen n statt $n-2$, so erhält man bezüglich:

$$\int \frac{e^{ax}}{\sin^n x} dx = - \frac{e^{ax}}{(n-2)(n-1) \sin^{n-1}x} (a \sin x + (n-2) \cos x)$$
$$+ \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-2)(n-1)} \int \frac{e^{ax}}{\sin^{n-2}x} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad)$$

$$\int \frac{e^{ax}}{\cos^n x} dx = - \frac{e^{ax}}{(n-2)(n-1) \cos^{n-1}x} (a \cos x - (n-2) \sin$$
$$+ \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-2)(n-1)} \int \frac{e^{ax}}{\cos^{n-2}x} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad)$$

Man erkennt sofort, dass diese Reductionsformeln (40) und (41) für $n = 1$ und $n = 2$ nicht anwendbar sind.

23) Zur Bestimmung der Integrale

$$\int x^m e^{ax} \cos bx \, dx \text{ und } \int x^m e^{ax} \sin bx \, dx$$

setze in §. 85 (1) für beide Fälle $u = x^m$; $\frac{du}{dx} = mx^{m-1}$, dagegen im ersten Falle $\frac{dv}{dx} = e^{ax} \cos bx$, also nach (33):

$$v = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$

und im zweiten Falle $\frac{dv}{dx} = e^{ax} \sin bx$

also nach (33a) $v = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$

Man erhält alsdann

$$\int x^m e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{x^m e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$$
$$- \frac{m}{a^2 + b^2} \left[a \int x^{m-1} e^{ax} \cos bx \, dx + b \int x^{m-1} e^{ax} \sin bx \, dx \right]. \quad (42)$$

$$\int x^m e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{x^m e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$$
$$- \frac{m}{a^2 + b^2} \left[a \int x^{m-1} e^{ax} \sin bx \, dx - b \int x^{m-1} e^{ax} \cos bx \, dx \right]. \quad (43)$$

Man ersieht hieraus, dass für ein ganzes m die Bestimmung der vorgelegten Integrale durch (42) und (43) auf einfachere Integrale von derselben Form zurückgeführt wird.

24) Aus Vorstehendem ergibt sich unmittelbar, dass allgemein die Integrale

$$\int f(x)\, e^{ax} \cos bx \, dx \text{ und } \int f(x)\, e^{ax} \sin bx \, dx$$

bestimmt werden können, sobald $f(x)$ die Form hat

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$$

25) Da sich ferner $(\cos bx)^n$ und $(\sin bx)^n$ für ein positives ganzes n in Reihen verwandeln lassen, welche nach Vielfachen der Cosinus Sinus von bx fortschreiten, so sind auch die Integrale

$$\int f(x)\, e^{ax}\, (\cos bx)^n \, dx \text{ und } \int f(x)\, e^{ax}\, (\sin bx)^n \, dx$$

ıer vorhin für $f(x)$ gemachten Voraussetzung bestimmbar.

§. 105. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int \frac{dx}{\sin x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{2}\, l\, \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = l tg\, \frac{1}{2}x + C.$

Andeut. Man setze $\cos x' = y$, so verwandelt sich das Integral in $\int \frac{dy}{y^2 - 1}$.

2) $\int \frac{dx}{\cos x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{2}\, l\, \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C.$

Andeut. Man setze $\sin x = y$.

3) $\int \sin^6 x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{\sin x \cos x}{48}(8 \sin^4 x + 10 \sin^2 x + 15) + \frac{5}{16}x + C.$

Andeut. Man wende dreimal die Formel (14) an.

4) $\int \sin^5 x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{15}\cos x\,(3 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 8) + C.$

5) $\int \cos^8 x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{384}\sin x \cos x\,(48 \cos^6 x + 56 \cos^4 x + 70 \cos^2 x + 105)$

$$+ \frac{35}{128}x + C.$$

Andeut. Durch viermalige Anwendung von (16).

6) $\int \cos^7 x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{\sin x}{105}(15 \cos^6 x + 18 \cos^4 x + 24 \cos^2 x + 48) + C.$

Andeut. Durch dreimalige Anwendung von (16).

7) $\int tg^4 x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{tg^3 x}{3} - tg\, x + x + C.$

8) $\int tg^6 x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{tg^5 x}{5} - \frac{tg^3 x}{3} + tg\, x - x.$

9) $\int tg^9x\,dx = ?$

Aufl. $\frac{tg^8x}{8} - \frac{tg^6x}{6} + \frac{tg^4x}{4} - \frac{tg^2x}{2} - l\,(\cos x) + C.$

10) $\int tg^7x\,dx = ?$

Aufl. $\frac{tg^6x}{6} - \frac{tg^4x}{4} + \frac{tg^2x}{2} + l\,(\cos x) + C.$

11) $\int tg^{-5}x\,dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{4}\,tg^{-4}x + \frac{1}{2}\,tg^{-2}x + l\,(\sin x) + C.$

12) $\int tg^{-8}x\,dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{7}\,tg^{-7}x + \frac{1}{5}\,tg^{-5}x - \frac{1}{3}\,tg^{-3}x + tg^{-1}x + x + C.$

13) $\int tg^{-6}x\,dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{5}\,tg^{-5}x + \frac{1}{3}\,tg^{-3}x - tg^{-1}x - x + C.$

14) $\int \sin^6x\,\cos^{-4}x\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{3}\sin^5x\,\cos^{-3}x - \frac{5}{3}\sin^3x\,\cos^{-1}x - \frac{5}{2}\sin x\,\cos x$

$+ \frac{5}{2}x + C.$

Andeut. Man wende zweimal die Formel (7a), dann einmal die Formel (14) an.

15) $\int \sin^8x\,\cos^3x\,dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{11}\sin^7x\,\cos^4x - \frac{7}{99}\sin^5x\,\cos^4x - \frac{5}{99}\sin^3x\cos^4x$

$-\frac{1}{33}\sin x\,\cos^4x + \frac{1}{99}\sin x\,\cos^2x + \frac{2}{99}\sin x + C.$

Andeut. Man wende dreimal die Formel (8), dann einmal die Formel (16) an.

$\int \sin^4x\,\cos^6x\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{10}\sin^5x\,\cos^5x + \frac{1}{16}\sin^5x\,\cos^3x + \frac{1}{32}\sin^5x\,\cos x$

$-\frac{1}{128}\sin^3x\,\cos x - \frac{3}{256}\sin x\cos x + \frac{3}{256}x + C.$

eut. Man wende dreimal die Formel (10), dann zweimal die Formel (14) an.

17) $\int \sin^6 x \cos^4 x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{10}\sin^5 x \cos^5 x - \frac{1}{16}\sin^3 x \cos^5 x - \frac{1}{32}\sin x \cos^5 x$

$+ \frac{1}{128}\sin x \cos^3 x + \frac{3}{256}\sin x \cos x + \frac{3}{256} x + C.$

Andeut. Man wende dreimal die Formel (8), dann zweimal die Formel (16) an.

18) $\int \sin^4 x \cos^4 x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{8}\sin^3 x \cos^5 x - \frac{1}{16}\sin x \cos^5 x + \frac{1}{64}\sin x \cos^3 x$

$+ \frac{3}{128}\sin x \cos x + \frac{3}{128} x + C.$

Andeut. Wende zweimal die Formel (8), dann zweimal die Formel (16) an.

19) $\int \sin^{-4} x \cos^{-6} x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{3}\sin^{-3} x \cos^{-5} x - \frac{8}{3}\sin^{-1} x \cos^{-5} x + \frac{16}{5}\sin x \cos^{-5} x$

$+ \frac{64}{15}\sin x \cos^{-3} x + \frac{128}{15}\cos^{-1} x \sin x + C.$

Andeut. Man wende zweimal (9), dann dreimal (17) an.

20) $\int \sin^{-6} x \cos^{-4} x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{3}\sin^{-5} x \cos^{-3} x + \frac{8}{3}\sin^{-5} x \cos^{-1} x - \frac{16}{5}\sin^{-5} x \cos x$

$- \frac{64}{15}\sin^{-3} x \cos x - \frac{128}{15}\sin^{-1} x \cos x + C.$

Andeut. Wende zweimal (11), dann dreimal (15) an.

21) $\int \sin\ {}^{4} x \cos^{-4} x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{3}\sin^{-3} x \cos^{-3} x - 2\sin^{-1} x \cos^{-3} x + \frac{8}{3}\sin x \cos^{-3} x$

$+ \frac{16}{3}\cos^{-1} x \sin x + C.$

Andeut. Man wende zweimal (9), dann zweimal (17) an.

22) $\int \sin^2 x \cos^{-6} x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{7}\Big[\sin x \cos^{-7} x - \frac{1}{5}\sin x \cos^{-5} x - \frac{4}{15}\sin x\ c$

$- \frac{8}{15}\cos^{-1} x \sin x\Big] + C.$

Andeut. Man wende einmal (7*a*), dann dreimal (17) an.

23) $\int sin^{-6}x\, cos^{-6}x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{5} sin^{-5}x\, cos^{-5}x + \frac{2}{3} sin^{-5}x\, cos^{-3}x + \frac{16}{3} sin^{-5}x\, cos^{-1}x$

$- \frac{32}{5} sin^{-5}x\, cos x - \frac{128}{15} sin^{-3}x\, cos x - \frac{256}{15} sin^{-1}x\, cos x + C.$

Andeut. Man wende dreimal (11), dann dreimal (15) an.

24) $\int sin^{-4}x\, cos^{2}x\, dx = ?$

Aufl. $- \frac{1}{2} sin^{-3}x\, cos x + \frac{1}{6} sin^{-3}x\, cos x + \frac{1}{3} cos x\, sin^{-1}x + C.$

Andeut. Wende einmal (10), dann zweimal (15) an.

25) $\int sin^{4}x\, cos^{-6}x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2} sin^{3}x\, cos^{-5}x - \frac{3}{10} sin x\, cos^{-5}x + \frac{1}{10} sin x\, cos^{-3}x$

$+ \frac{1}{5} cos^{-1}x\, sin x + C.$

26) $\int sin^{8}x\, cos^{-8}x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{7} tg^{7}x - \frac{1}{5} tg^{5}x + \frac{1}{3} tg^{3}x - tg\, x + x + C.$

27) $\int sin^{5}x\, cos^{3}x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{8} sin^{6}x\, cos^{2}x + \frac{1}{24} sin^{6}x + C.$

Andeut. Wendet man einmal die Formel (10) an, so wird man auf das Integral $\int (sin\, x)^{5} \frac{d\, sin\, x}{dx} dx = \frac{sin^{6}x}{6}$ geführt.

28) $\int sin^{3}x\, cos^{7}x\, dx = ?$

Aufl. $- \frac{1}{10} sin^{2}x\, cos^{8}x - \frac{1}{40} cos^{8}x + C.$

Andeut. Wendet man einmal (8) an, so wird man auf das Integral

$$\int sin\, x\, cos^{7}x\, dx = - \frac{cos^{8}x}{8}$$

ge[illegible]

$sin^{5}x\, cos^{5}x\, dx = ?$

Aufl. $- \frac{1}{10} cos^{6}x \left(sin^{4}x + \frac{1}{2} sin^{2}x + \frac{1}{6}\right) + C.$

[illegible]t. Man wende zweimal die Formel (8) an.

30) $\int sin^{-5}x \, cos^{-3}x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2} sin^{-4}x \, cos^{-2}x - \frac{3}{4} sin^{-4}x - \frac{3}{2} sin^{-2}x + 3 l \, tg x + C.$

Andeut. Man wende zuerst (11) einmal, dann (9) zweimal an.

31) $\int sin^{-1}x \, cos^{-7}x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{6} cos^{-6}x + \frac{1}{4} cos^{-4}x + \frac{1}{2} cos^{-2}x + l \, tg x + C.$

Andeut. Man wende dreimal die Formel (11) an.

32) $\int sin^{-3}x \, cos^{-3}x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{2} sin^{-2}x \, cos^{-2}x + cos^{-2}x + 2 l \, tg x + C.$

Andeut. Man wende jede der Formeln (9) und (11) je einmal an.

33) $\int sin^{5}x \, cos^{-1}x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{4} sin^{4}x - \frac{1}{2} sin^{2}x - l\,(cos\,x) + C.$

Andeut. Wende (8) zweimal an.

34) $\int sin^{3}x \, cos^{-5}x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{2} cos^{-4}x \left(sin^{2}x - \frac{1}{2} \right) + C.$

Andeut. Wende einmal die Formel (8) an.

35) $\int sin^{11}x \, cos^{-11}x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{10} tg^{10}x - \frac{1}{8} tg^{8}x + \frac{1}{6} tg^{6}x - \frac{1}{4} tg^{4}x + \frac{1}{2} tg^{2}x$
$+ l \, cos\,x + C.$

36) $\int sin^{-7}x \, cos^{3}x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{4} sin^{-6}x \left(\frac{1}{3} - cos^{2}x \right) + C.$

Andeut. Man wende viermal die Formel (10) an.

37) $\int sin^{-3}x \, cos^{7}x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{4} sin^{-2}x \, cos^{6}x + \frac{3}{4} sin^{-2}x \, cos^{4}x - \frac{3}{2} cos^{2}x \ldots {}^{2}x$
$- 3 l \, sin\,x + C.$

38) $\int sin^4x\, cos^5x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{9} sin^5x\, cos^4x + \frac{4}{63} sin^5x\, cos^2x + \frac{8}{315} sin^5x + C.$

Andeut. Man wende zweimal (10) an.

39) $\int sin^{-6}x\, cos^{-3}x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2} sin^{-5}x\, cos^{-2}x - \frac{7}{10} sin^{-5}x - \frac{7}{6} sin^{-3}x - \frac{7}{2} sin^{-1}x$

$$+ \frac{7}{2}\, l\, cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

Andeut. Einmal (11), dreimal (9).

40) $\int sin^{-2}x\, cos^{-5}x\, dx = ?$

Aufl. $- sin^{-1}x\, cos^{-4}x + \frac{5}{4} sin\,x\, cos^{-4}x + \frac{15}{8} sin x\, cos^{-2}x$

$$+ \frac{15}{8}\, l\, cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

Andeut. Einmal (9), dann zweimal (11).

41) $\int sin^4x\, cos^{-3}x\, dx = ?$

Aufl. $- sin^3x\, cos^{-2}x + \frac{3}{2} sin\,x\, cos^{-2}x$

$$- \frac{3}{2}\, l\, cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

42) $\int sin^2x\, cos^{-7}x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{6} sin\,x\, cos^{-6}x - \frac{1}{24} sin\,x\, cos^{-4}x$

$$- \frac{1}{16} sin\,x\, cos^{-2}x - \frac{1}{16}\, l\, cot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.$$

43) $\int sin^{-6}x\, cos^3x\, dx = ?$

Aufl. $- \frac{1}{3} sin^{-5}x\, cos^2x + \frac{2}{15} sin^{-5}x + C.$

$\int sin^{-4}x\, cos^5x\, dx = ?$

Aufl. $sin^{-3}x\, cos^4x - 4 sin^{-3}x\, cos^2x + \frac{8}{3} sin^{-3}x + C.$

45) $\int sin^5 x\, cos^4 x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{9} sin^4 x\, cos^5 x - \frac{4}{63} sin^2 x\, cos^5 x - \frac{8}{315} cos^5 x + C.$

46) $\int sin^3 x\, cos^7 x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{10} sin^2 x\, cos^8 x - \frac{1}{40} cos^8 x + C.$

47) $\int sin^{-5} x\, cos^{-4} x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{3} sin^{-4} x\, cos^{-3} x + \frac{7}{3} sin^{-4} x\, cos^{-1} x - \frac{35}{12} sin^{-4} x\, cos x$

$- \frac{35}{8} sin^{-2} x\, cos x + \frac{35}{8} l tg \tfrac{1}{2} x + C.$

48) $\int sin^3 x\, cos^6 x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{9} sin^2 x\, cos^7 x - \frac{2}{63} cos^7 x + C.$

49) $\int sin^{-3} x\, cos^{-6} x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{2} sin^{-2} x\, cos^{-5} x + \frac{7}{10} cos^{-5} x + \frac{7}{6} cos^{-3} x$

$+ \frac{7}{2} cos^{-1} x + \frac{7}{2} l tg \tfrac{1}{2} x + C.$

50) $\int sin^5 x\, cos^{-2} x\, dx = ?$

Aufl. $sin^6 x\, cos^{-1} x + sin^4 x\, cos x + \frac{4}{3} sin^2 x\, cos x$

$+ \frac{8}{3} cos x + C.$

51) $\int sin^3 x\, cos^{-4} x\, dx = ?$

Aufl. $sin^2 x\, cos^{-3} x - \frac{2}{3} cos^{-3} x + C.$

52) $\int sin^{-5} x\, cos^2 x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{3} sin^{-4} x\, cos x + \frac{1}{12} sin^{-4} x\, cos x$

$+ \frac{1}{8} sin^{-2} x\, cos x - \frac{1}{8} l\, tg\, \tfrac{1}{2} x + C.$

53) $\int sin^{-3}x \cos^4 x\, dx = ?$

Aufl. $sin^{-2}x \cos^3 x - 3 sin^{-2}x \cos x + \frac{3}{2} sin^{-2}x \cos x$

$$- \frac{3}{2}\, l\, tg\tfrac{1}{2}x + C.$$

54) $\int x \sin x\, dx = ?$

Aufl. $-x\cos x + \sin x + C.$

Andeut. Nach (20).

55) $\int x^4 \sin x\, dx = ?$

Aufl. $-(x^4 - 12x^2 + 24)\cos x + 4x(x^2 - 6)\sin x + C.$

Andeut. Zweimal (20).

55a) $\int x^6 \sin x\, dx = ?$

Aufl. $-(x^6 - 30x^4 + 360x^2 - 720)\cos x$
$+ 6x(x^4 - 20x^2 + 120)\sin x + C.$

56) $\int x^{-3} \sin x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{2x}\left(\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{x}\, dx.$

57) $\int x^{-7} \sin x\, dx = ?$

Aufl. $\left(-\frac{1}{30}x^{-5} + \frac{1}{360}x^{-3} - \frac{1}{720}x^{-1}\right)\cos x$

$$-\left(\frac{1}{6}x^{-6} - \frac{1}{120}x^{-4} + \frac{1}{720}x^{-2}\right)\sin x - \frac{1}{720}\int \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

58) $\int x \cos x\, dx = ?$

Aufl. $x \sin x + \cos x + C.$

59) $\int x^3 \cos x\, dx = ?$

Aufl. $(x^3 - 6x)\sin x + (3x^2 - 6)\cos x + C.$

$\int x^5 \cos x\, dx = ?$

Aufl. $(x^5 - 20x^3 + 120x)\sin x + (5x^4 - 60x^2 + 120)\cos x + C.$

$x^{-3}\cos x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2}x^{-1}\sin x - \frac{1}{2}x^{-2}\cos x - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{x}\, dx.$

62) $\int x^{-5}\cos x\, dx = ?$

Aufl. $$\left(\frac{1}{12}x^{-3} - \frac{1}{24}x^{-1}\right)\sin x + \left(\frac{1}{24}x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-4}\right)\cos x + \frac{1}{24}\int\frac{\cos x}{x}\,dx.$$

63) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x} = ?$

Aufl. $$\frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, \frac{tg\,\frac{x}{2} + 1 - \sqrt{2}}{tg\,\frac{x}{2} + 1 + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\, tg\,\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Andeut. Setze $tg\,\frac{x}{2} = z$, so geht das Integral über in:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{z + 1 - \sqrt{2}} - \frac{1}{z + 1 + \sqrt{2}}\right) dz.$$

Oder man schreibe $\int \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}\, dx$ statt des gegebenen Integrales.

64) $\int \frac{dx}{10 - 10\sin x + 5\cos x} = ?$

Aufl. $$\frac{1}{5}\, l\, \frac{tg\,\frac{x}{2} - 3}{tg\,\frac{x}{2} - 1} + C.$$

Andeut. Setze $tg\,\frac{x}{2} = z$, so verwandelt sich das Integral in:

$$\int \frac{2dz}{5\,(z - 1)\,(z - 3)} \text{ u. s. w.}$$

65) $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x} = ?$

Aufl. $$\frac{1}{2 - tg\,\frac{x}{2}} + C.$$

Andeut. Setzt man $tg\,\frac{x}{2} = z$, so folgt: $\int \frac{dz}{(z - 2)^2}$ u. s. w.

66) $\int \frac{dx}{21 - 9\sin x + 18\cos x} = ?$

Aufl. $$\frac{1}{3}\, arctg\, \frac{tg\,\frac{1}{2}x - 3}{2} + C.$$

Andeut. Setzt man $tg\,\frac{1}{2}x = z$, so verwandelt sich das Integral in:

$$\frac{2}{3}\int \frac{dz}{(z - 3)^2 + 4} \text{ u. s. w.}$$

67) $\int \frac{dx}{1 + \cos x + b \sin x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{b}\, l\,(1 + b\, tg\, \tfrac{1}{2}x) + C.$

68) $\int \frac{dx}{1 + b \sin x - \cos x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{b}\, l\, \frac{tg\,\frac{1}{2}x}{b + tg\,\frac{1}{2}x} + C.$

69) $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{4}\, l\, \frac{2 + tg\,\frac{1}{2}x}{2 - tg\,\frac{1}{2}x} + C.$

70) $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x} = ?$

Aufl. $\frac{2}{3}\, arctg\, \frac{tg\,\frac{1}{2}x}{3} + C.$

71) $\int \frac{3 + 5\sin x}{4 + 5\cos x}\, dx = ?$

Aufl. $-2l(3 - tg\,\tfrac{1}{2}x) - 2l\cos\tfrac{1}{2}x + C = -2l(3\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x)$
$= -\,l\,(5 + 4\cos x - 3\sin x) + C.$

72) $\int \frac{4 + 7\sin x}{3 + \cos x}\, dx = ?$

Aufl. $7l\, \frac{tg^2\frac{1}{2}x + 1}{tg^2\frac{1}{2}x + 2} + \sqrt{8}\, arctg\left(\frac{tg\,\frac{1}{2}x}{\sqrt{2}}\right)$
$= \sqrt{8}\, arctg\left(\frac{tg\,\frac{1}{2}x}{\sqrt{2}}\right) - 7l\,(3 + \cos x) + C.$

73) $\int \frac{dx}{3\sin x + 5\sin^2 x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{3}\, l\,(tg\,\tfrac{1}{2}x) + \frac{5}{12}\, l\,(tg\,\tfrac{1}{2}x + 3) - \frac{5}{12}\, l\,(3\,tg\,\tfrac{1}{2}x + 1) + C.$

74) $\int \frac{dx}{12 - 35\sin x + 25\sin^2 x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{3}\, l\, \frac{tg\,\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{tg\,\frac{1}{2}x - 2} + \frac{1}{4}\, l\, \frac{tg\,\frac{1}{2}x - 3}{tg\,\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}} + C.$

…ut. Setzt man $tg\,\frac{x}{2} = z$, so verwandelt sich das Integral in:

$$\frac{1}{6}\int \frac{(1 + z^2)\, dz}{(z - 2)\,(z - \frac{1}{2})\,(z - 3)\,(z - \frac{1}{3})}$$

…legung in Partialbrüche ergibt:

$$\ldots + \frac{2}{z - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{z - 3} - \frac{\frac{3}{2}}{z - \frac{1}{3}} = \frac{1 + z^2}{(z - 2)\,(z - \frac{1}{2})\,(z - 3)\,(z - \frac{1}{3})}$$

75) $\int \frac{dx}{4 + \sin x - 5\sin^2 x} = ?$

Aufl. $-\frac{2}{9}\frac{1}{tg\frac{1}{2}x - 1} + \frac{5}{27}\, l\, \frac{tg\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{tg\frac{1}{2}x + 2} + C.$

Andeut. Setzt man $tg\frac{x}{2} = z$, so nimmt das Integral die Form an:

$$\frac{1}{2}\int \frac{(1 + z^2)\, dz}{z^4 + \frac{1}{2}z^3 - 3z^2 + \frac{1}{2}z + 1}$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche findet man:

$$\frac{z^2 + 1}{(z-1)^2(z^2 + 2\frac{1}{2}z + 1)} = \frac{4}{9}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{10}{27}\frac{1}{z+2} + \frac{10}{27}\frac{1}{z + \frac{1}{2}}$$

76) $\int \frac{2 + 3\cos x}{(5 + 7\cos x)^3}\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{48}\frac{\sin x}{(5 + 7\cos x)^2} + \frac{53}{384}\frac{\sin x}{5 + 7\cos x}$

$$-\frac{13}{128\sqrt{24}}\, l\, \frac{-\sqrt{6} + tg\frac{x}{2}}{\sqrt{6} + tg\frac{x}{2}} + C.$$

Andeut. Wende zweimal (29), dann (28) an.

§. 106. Die Functionen enthalten Kreisbogen.

1) Um $\int (\arcsin x)^n\, dx$ zu bestimmen, setze

$$\arcsin x = z;\ x = \sin z;\ \frac{dx}{dz} = \cos z,$$

so wird

$$\int (\arcsin x)^n\, dx = \int z^n \cos z\, dz$$

oder nach §. 104 (23)

$$= z^n \sin z + nz^{n-1}\cos z - n(n-1)\int z^{n-2}\cos z\, dz \quad . \quad . \quad (1)$$

Für $n = 1$ ergibt sich hieraus:

$$\int z\cos z\, dz = z\sin z + \cos z + C$$

oder wenn man den Werth von $z = \arcsin x$, also $\cos z = \sqrt{1 - x^2}$ einführt,

$$\int z\cos z\, dz = \int \arcsin x\, dx = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + \text{[illegible]}$$

2) Allgemein kann $\int f(x)\, (\arcsin x)^n\, dx$ leicht dadurch b[illegible]t werden, dass man $\arcsin x = z$ setzt.

Man erhält dadurch

$$\int f(\sin z)\, z^n \cos z\, dz.$$

3) Ganz analog verfahre man behufs der Ermittelung der Integrale $\int (arc\cos x)^n\, dx$; $\int f(x)\,(arc\cos x)^n\, dx$; $\int (arc\,tg\, x)^n\, dx$ u. s. w.

4) Zur Bestimmung von $\int f\,(arc\,\sin x)\, dx$ setze

$$arc\sin x = z\;;\; x = \sin z\,,$$

so folgt:

$$\int f\,(arc\sin x)\, dx = \int f\,(z)\,\cos z\; dz$$

Analog findet man, wenn $arc\cos x = z$, $x = \cos z$ gesetzt wird,

$$\int f\,(arc\cos x)\, dx = -\int f\,(z)\,\sin z\; dz$$

und für
$$arc\,tg\, x = z\;,\; x = tg\, z\,.$$

$$\int f\,(arc\,tg\, x)\, dx = \int \frac{f\,(z)\, dz}{\cos^2 z}$$

ferner für $arc\cot x = z$, $x = \cot z$:

$$\int f\,(arc\,\cot x)\, dx = -\int \frac{f\,(z)\, dz}{\sin^2 z}.$$

5) Ist das Integral $\int f\,(x)\, dx = F\,(x)$ algebraisch, so lässt sich das Integral $\int arc\sin x\, f\,(x)\, dx$ immer finden.

Setzt man nämlich zum Zwecke des theilweisen Integrirens

$$u = arc\,\sin x\;,\; \frac{dv}{dx} = f\,(x)\,,$$

also
$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,;\; v = F\,(x)$$

so folgt:

$$\int arc\sin x\, f\,(x)\, dx = F(x)\,.\,arc\sin x - \int \frac{F\,(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Ebenso findet man unter derselben Voraussetzung:

$$\int arc\cos x\; f\,(x)\, dx = F\,(x)\,.\,arc\cos x + \int \frac{F\,(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

$$\int arc\,tg\, x\, f\,(x)\, dx = F(x)\,.\,arc\,tg\, x - \int \frac{F\,(x)\;dx}{1+x^2}\,,$$

$$\int arc\,cotg\, x\, f\,(x)\, dx = F\,(x)\,.\,arc\cot x + \int \frac{F\,(x)\, dx}{1+x^2}$$

Beispiele.

$\int arc\,tg\, x\;dx$ zu bestimmen.

ıfl. Setze in §. 85 (1)

$$u = arc\,tg\, x\;,\; \frac{dv}{dx} = 1$$

also $$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}, \; v = x,$$

so folgt: $$\int arctg\,x\,dx = x\,arctg\,x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= x\,arctg\,x - \frac{1}{2}\,l\,(x^2+1) + C.$$

2) Es sei $\int l\,(arc\sin x)\,dx$ das zu bestimmende Integral.

Aufl. Setzt man $arc\sin x = y$; $x = \sin y$, so folgt:

$$\int l\,(arc\sin x)\,dx = \int \cos y\; ly\; dy$$

oder wenn man in §. 85 (1) $u = ly$; $\frac{dv}{dx} = \cos y$ setzt,

$$= \sin y\; ly - \int \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Das letztere Integral lässt sich nicht in endlicher Form darstellen.

3) Es soll $\int e^{arc\cos x}\,dx$ entwickelt werden.

Aufl. Setzt man $arc\cos x = y$; $x = \cos y$, so wird

$$\int e^{arc\cos x}\,dx = -\int e^y \sin y\,dy,$$

oder nach §. 104 (33a) $$= -\frac{e^y}{2}(\sin y - \cos y),$$

also $$\int e^{arc\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\,(x - \sqrt{1-x^2})\,e^{arc\cos x} + C.$$

4) Man soll $\int a^{arc\sin x}\,dx$ bestimmen.

Aufl. Wird $arc\sin x = y$, $x = \sin y$ gesetzt, so folgt:

$$\int a^{arc\sin x}\,dx = \int a^y \cos y\,dy = \int e^{yla} \cos y\,dy$$

Daher nach §. 104 (38):

$$\int a^y \cos y\,dy = \frac{a^y\,(\sin y + \cos y\,la)}{1 + l^2a}$$

also $$\int a^{arc\sin x}\,dx = \frac{a^{arc\sin x}(x + la\sqrt{1-x^2})}{1+l^2a} + C.$$

§. 107. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int arc\cos x\,dx = ?$

Aufl. $x\,arc\cos x - \sqrt{1-x^2} + C.$

2) $\int x\,arc\sin x\,dx = ?$

Aufl. $\frac{arc\sin x}{4}(2x^2 - 1) + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C.$

Andeut. Nach §. 85 (1) ist das Integral zunächst

$$= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Setze nun hierin nach §. 97. (5)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x.$$

3) $\int x \, arctg\, x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^2+1}{2}\, arctg\, x - \frac{x}{2} + C.$

4) $\int \frac{4x-3x^2}{(x^2-3x+2)^2} \arcsin x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{3x-2}{x^2-3x+2} \arcsin x + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1$

$$+ \frac{8}{x\sqrt{3}}\left(2 - x - 2\sqrt{1-x^2}\right) arctg \frac{1}{\sqrt{3}} + C.$$

Andeut. Man findet:

$$\int \frac{4x-3x^2}{(x^2-3x+2)^2}\, dx = \frac{3x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{4}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

und hiernach durch theilweise Integration für das vorgelegte Integral:

$$\frac{3x-2}{(x-1)(x-2)} \arcsin x - 4\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$$

Setzt man nun $\sqrt{1-x^2} = 1 - tx$, so gehen diese Integrale bezüglich über in:

$$-\int \frac{dt}{t^2-t+1} \text{ und } -\int \frac{2dt}{t^2-2t+1} = \frac{2}{t-1} \text{ u. s. w}$$

5) $\int \frac{175-250x}{(5x-4)^2(5x-3)^2} \arccos x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{5}{25x^2-35x+12} \arccos x + \frac{5}{4}\, l\, \frac{t-3}{3t-1}$

$- \frac{5}{3}\, l\, \frac{t-2}{2t-1} + C$, wenn zur Abkürzung

$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = t$ gesetzt wird.

Andeut. Da $\int \frac{175-250x}{(5x-4)^2(5x-3)^2}\, dx = \frac{5}{(5x-4)(5x-3)}$

$$= \frac{5}{5x-4} - \frac{5}{5x-3}$$

so folgt durch theilweise Integration für das gegebene Integral:

$$\frac{5}{\ldots(5x-3)} \arccos x - 5\int \frac{dx}{(5x-3)\sqrt{1-x^2}} + 5\int \frac{dx}{(5x-4)\sqrt{1-x^2}}$$

man nun $\sqrt{1-x^2} = 1 - tx$, so wird

$$5\int \frac{dx}{(5x-3)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{5}{4}\, l\, \frac{t-3}{3t-1}$$

$$5\int \frac{dx}{(5x-4)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{5}{3}\, l\, \frac{t-2}{2t-1}.$$

6) $\int \frac{-13x^2 + 754x + 599}{(x+2)^2 (13x-5)^2} \, arctg\, x \, dx = ?$

Aufl. $\left(\frac{x - 29}{13x^2 + 21x - 10} - \frac{44}{485}\right) arctg\, x - \frac{1014}{1261} l(13x - 5)$

$- \frac{1}{5} l(x+2) + \frac{487}{970} l(x^2+1) + C.$

Andeut. $\int \frac{-13x^2 + 754x + 599}{(x+2)^2 (13x-5)^2} dx = \frac{x-29}{(x+2)(13x-5)}$

$= \frac{1}{x+2} - \frac{12}{13x-5}.$

Nach §. 85. (1) wird demnach das Integral

$= \frac{x-29}{(x+2)(13x-5)} arctg\, x - \int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)} - 12 \int \frac{dx}{(13x-5)(x^2+1)}.$

Aber $\int \frac{dx}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{1}{5} l(x+2) - \frac{1}{10} l(x^2+1) + \frac{2}{5} arctg\, x$

und

$\int \frac{dx}{(13x-5)(x^2+1)} = \frac{169}{2522} l(13x-5) - \frac{13}{388} l(x^2+1) - \frac{5}{194} arctg\, x.$

7) $\int \frac{x^2 - 6x - 9}{(x^2+3x)^2} \, arccot\, x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{3x^2 + 4x + 15}{5(x^2+3x)} arccot\, x + lx - \frac{1}{5} l(x+3)$

$- \frac{2}{5} l(x^2+1) + C.$

Andeut. Durch theilweise Integration ergibt sich:

$\frac{3-x}{x^2+3x} arc\, cot\, x + \int \frac{3-x}{x(x+3)(1+x^2)} dx;$

ferner ist

$\frac{3-x}{x(x+3)(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{5(x+3)} - \frac{4x+3}{5(1+x^2)}$

8) $\int \frac{3x^2 + 8x}{(x^3 + 4x^2)^2} \, arctg\, x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{16} lx - \frac{1}{4x} + \frac{1}{272} l(x+4) + \frac{1}{34} l(x^2+1)$

$- \left[\frac{4}{17} + \frac{1}{x^2(x+4)}\right] arctg\, x + C.$

Andeut. Da $\int \frac{3x^2 + 8x}{(x^3+4x^2)^2} = - \frac{1}{x^2(x+4)}$

so folgt nach §. 85. (1) für das vorgelegte Integral:

$- \frac{arctg\, x}{x^2(x+4)} + \int \frac{dx}{x^2(x+4)(x^2+1)}$

ferner ist:

$\frac{1}{x^2(x+4)(x^2+1)} = - \frac{1}{16x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{272(x+4)} + \frac{x-}{17(x^2+}$

und $\int \frac{x-4}{17(x^2+1)} dx = \frac{1}{34} l(x^2+1) - \frac{4}{17} arctg\, x$ u. s. w.

9) $\int \frac{arc\,tg\,x}{\sqrt{1+x}}\,dx = ?$

Aufl. Setzt man $\sqrt{2(1+\sqrt{2})} = \alpha$; $\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}-1)} = \beta$; $\sqrt{1+x} = y$, so findet man:

$$2y\,arc\,tg\,x - \frac{1}{\alpha}\,l\,\frac{y^2-\alpha y+\sqrt{2}}{y^2+\alpha y+\sqrt{2}} - \alpha\,arc\,tg\,\frac{2y}{\alpha(\sqrt{2}-y^2)} + C.$$

Andeut. Durch theilweise Integration folgt:

$$2arc\,tg\,x\,\sqrt{1+x} - 2\int\frac{\sqrt{1+x}}{1+x^2}\,dx$$

Nun ist:

$$\int\frac{\sqrt{1+x}}{1+x^2}\,dx = 2\int\frac{y^2dy}{y^4-2y^2+2} = 2\int\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{y}{y^2-\alpha y+\sqrt{2}} - \frac{y}{y^2+\alpha y+\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\,l\,\frac{y^2-\alpha y+\sqrt{2}}{y^2+\alpha y+\sqrt{2}} + \frac{1}{2\beta}\,arc\,tg\,\frac{2\beta y}{\sqrt{2}-y^2} \text{ u. s. w.}$$

10) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\sin x\,dx = ?$

Aufl. $x - arc\sin x\sqrt{1-x^2} + C.$

Andeut. Durch theilweise Integration folgt:

$$-\sqrt{1-x^2}\,arc\sin x + \int dx \text{ u. s. w.}$$

11) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\sin x\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{4}(arc\sin x)^2 - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\,arc\sin x + \frac{x^2}{4} + C.$

Andeut. Nach §. 97. (5) ist

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\,arc\sin x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$$

Integrire nun theilweise u. s. w.

12) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,arc\sin x = ?$

Aufl. $-\frac{(x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{3}\,arc\sin x + \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + C.$

Andeut. $\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}.$

Nun theilweise integrirt u. s. w.

Fünfzehnter Abschnitt.

Integration durch unendliche Reihen.

§. 108. Allgemeine Betrachtung.

Wenn die im Vorhergehenden angegebenen Mittel nicht helfen, um die Integration auszuführen, so verwandelt man das Integral in eine unendliche Reihe.

Es sei das Integral $\int \varphi(x)\, f(x)\, dx$, wo $\varphi(x)$ und $f(x)$ stetige Functionen von x sind, unter der Voraussetzung zu bestimmen, dass $f(x)$ sich in eine convergirende Reihe verwandeln lässt.

Setzen wir

$$f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + u_{n+1} x^{n+1} + \ldots \quad (1)$$

wo die Coefficienten $u_0, u_1, \ldots u_n, u_{n+1}, \ldots$ sowie x als positiv vorausgesetzt werden mögen, so convergirt diese Reihe nach §. 6. α. 8, wenn

$$lim \frac{u_{n+1}\, x^{n+1}}{u_n x^n} < 1, \text{ also } x\, lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

oder

$$x < \frac{1}{lim \frac{u_{n+1}}{u_n}} \text{ oder } < lim \frac{u_n}{u_{n+1}}.$$

Ist

$$lim \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lambda$$

so convergirt daher obige Reihe, wenn x in dem Intervalle $x = -\lambda$ bis $x = +\lambda$ liegt, also $-\lambda < x < +\lambda$ ist.

Es sei nun

$$\int x^n \varphi(x)\, dx = \psi_n x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

also

$$\psi_n'(x) = x^n \varphi(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Convergirt alsdann die Reihe

$$u_0\, \psi_0(x) + u_1\, \psi_1(x) + u_2\, \psi_2(x) + \ldots + u_n\, \psi_n(x) + \ldots$$

innerhalb der Grenzen $-\lambda < x < +\lambda$ und bezeichnet $F(x$ [illegible] n Werth derselben, so hat man:

$$F(x) = u_0\, \psi_0(x) + u_1\, \psi_1(x) + u_2\, \psi_2(x) + \ldots + u_n\, \psi_n(x) + \quad (4)$$

Um nun $F'(x)$ zu bestimmen sei das positive h so klein, dass $x+h$ ebenfalls zwischen $-\lambda$ und $+\lambda$ liegt, also

$$-\lambda < x+h < +\lambda$$

ist, dann ist auch

$$F(x+h) = u_0\psi_0(x+h) + u_1\psi_1(x+h) + u_2\psi_2(x+h) + \ldots \quad (5)$$

somit nach §. 6. α. 10

$$F(x+h) - F(x) = u_0[\psi_0(x+h) - \psi_0(x)] + u_1[\psi_1(x+h) - \psi_1(x)] + \ldots$$

und daher

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = u_0\frac{\psi_0(x+h)-\psi_0(x)}{h} + u_1\frac{\psi_1(x+h)-\psi_1(x)}{h} + \ldots$$

Sind demnach $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots; \psi_0', \psi_1', \psi_2', \ldots$ stetig innerhalb der Grenzen x bis $x+h$, so ist nach §. 40. 1.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = u_0\psi_0'(x+\theta_0 h) + u_1\psi_1'(x+\theta_1 h) + u_2\psi_2'(x+\theta_2 h) + \ldots$$

wo $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots$ positive echte Brüche sind.

Unter Berücksichtigung der Beziehung (3) geht vorstehende Gleichung über in:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = u_0\varphi(x+\theta_0 h) + u_1(x+\theta_1 h)\varphi(x+\theta_1 h) + u_2(x+\theta_2 h)^2\varphi(x+\theta_2 h) + \ldots$$

Wählen wir nun das positive h so klein, dass $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles x bis $x+h$ sein Zeichen nicht ändert, also etwa positiv *) ist und mit wachsendem x beständig wächst, so wird

$$\varphi(x+h) > \varphi(x+\theta h) > \varphi(x)$$

und

$$(x+h)^n > (x+\theta h)^n > x^n$$

also, da alle diese Grössen positiv sind,

$$u_n(x+h)^n\varphi(x+h) > u_n(x+\theta h)^n\varphi(x+\theta h) > u_n x^n\varphi(x);$$

daher liegt $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ zwischen den beiden Grenzen

$$u_0\varphi(x) + u_1 x\varphi(x) + u_2 x^2\varphi(x) + u_3 x^3\varphi(x) + \ldots$$

und

$$u_0\varphi(x+h) + u_1(x+h)\varphi(x+h) + u_2(x+h)^2\varphi(x+h) + \ldots$$

oder zwischen

$$\varphi(x)[u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots]$$

un

$$\varphi(x+h)[u_0 + u_1(x+h) + u_2(x+h)^2 + \ldots]$$

---

*) [Is]t $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles x bis $x+h$ negativ, so ist $-\varphi(x)$ innerha[lb dieses] Intervalles positiv und man betrachte dann das Integral

$$\int -\varphi(x) \cdot f(x)\,dx.$$

Es [kann] diese Voraussetzung unbeschadet der Allgemeinheit bestehen bleiben.

oder endlich nach (1) zwischen

$$\varphi(x) f(x) \text{ und } \varphi(x+h) f(x+h).$$

Nimmt $\varphi(x)$ mit wachsendem x innerhalb des Intervalles von x bis $x+h$ beständig ab, so darf man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, das Zeichen von $\varphi(x)$ wiederum als positiv annehmen und es ist

$$\varphi(x+h) < \varphi(x+\theta h) < \varphi(x)$$
$$x^n < (x+\theta h)^n < (x+h)^n$$

Daher, da alle diese Grössen positiv sind,

$$u_n x^n \varphi(x+h) < u_n (x+\theta h)^n \varphi(x+\theta h) < u_n (x+h)^n \varphi(x),$$

und $\frac{F(x+h) - Fx}{h}$ liegt somit zwischen

$$u_0 \varphi(x+h) + u_1 x \varphi(x+h) + u_2 x^2 \varphi(x+h) + \ldots = \varphi(x+h) . f(x)$$

und

$$u_0 \varphi(x) + u_1 (x+h) \varphi x + u_2 (x+h)^2 \varphi(x) + \ldots = \varphi(x) f(x+h).$$

Analog verhält sich die Sache bei einem negativen h. Da nun $\varphi(x)$ und $f(x)$, also auch das Product $\varphi(x) f(x)$ eine stetige Function von x ist, so fällt $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ bei unendlich abnehmendem h mit $\varphi(x) f(x)$ zusammen und man hat somit

$$F'(x) = \varphi(x) f(x)$$

oder nach (4)

$$F(x) = \int \varphi(x) f(x)\, dx = u_0 \psi_0(x) + u_1 \psi_1(x) + \ldots\ldots$$

oder nach (3)

$$\int \varphi(x) f(x)\, dx = u_0 \int \varphi(x)\, dx + u_1 \int x\varphi(x)\, dx + u_2 \int x^2 \varphi(x)\, dx + \ldots.$$

$$= \int [u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots] \varphi(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Enthält die Reihe (1) positive und negative Glieder, so kann man x stets als positiv ansehen, wenn man sich dessen Zeichen mit dem der betreffenden Coefficienten vereinigt denkt. Da nun $f(x)$ convergirt, dasselbe aber seine Convergenz nicht dem Zeichenwechsel zu verdanken hat, sondern der Erfüllung der Bedingungen

$$\lim u_n = 0 ; \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1,$$

so bilden alle positiven Glieder eine convergirende Reihe, deren S[illegible]e $f_1(x)$ und alle negativen eine solche, deren Summe $f_2(x)$ sei. [illegible]h §. 6. α. 11. ist alsdann

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

und somit

$$\int \varphi(x) f(x)\, dx = \int \varphi(x) [f_1(x) - f_2(x)]\, dx$$
$$= \int \varphi(x)\, f_1(x)\, dx - \int \varphi(x) f_2(x)\, dx.$$

Diese Integrale sind nun nach (6) zu bestimmen und der durch die Gleichung (6) ausgedrückte Satz gilt somit auch für den Fall, dass die Reihe (1) positive und negative Glieder enthält.

Nothwendige Bedingungen für die Integration durch unendliche Reihen sind also: Convergenz der Reihen und Endlichkeit und Stetigkeit von $\varphi(x)$ und $\psi_n(x)$.

Wir besitzen in diesem Satze ein Mittel manche Integrale, deren Werthe sich nach den früheren Regeln nicht ermitteln lassen, näherungsweise anzugeben, sowie auch gewisse Functionen in convergirende Reihen zu verwandeln.

§. 109. Anwendung der Integration mittelst Reihen.

1) Da $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots; -1 < x < +1$,

so ist $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots; -1 < x < +1$.

Nach Früherem ist aber auch

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arc\, tg\, x$$

und man hat daher, wie in §. 50, Beisp. 7, weil $arc\, tg\, x$ für $x = 0$ verschwindet, also $C = 0$ sein muss:

$$arc\, tg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

für alle Werthe von $x^2 \leq 1$.

2) Man findet leicht

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \ldots$$

und es ist daher

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arc\sin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

für alle Werthe von $x^2 < 1$ (vergl. §. 50, Beisp. 6).

Anmerk. Für $x = 0$ wird $arc\sin x = 0$, also ist $C = 0$.

Da $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$,

a $-1 < x < +1$, so folgt:

$$\int \frac{1}{1+x}\, dx = l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

f ie Werthe von $x^2 < 1$. [Vergl. §. 50, Beisp. 2.].

merk. Für $x = 0$, wird $l(1+x) = 0$, also ist $C = 0$.

4) Um $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}}$ für alle Werthe von $a^2 < 1$ zu bestimmen, berücksichtige man, dass nach dem binomischen Satze (§. 50, Beisp. 1) gesetzt werden kann:

$$(1 - a^2 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} a^2 \sin^2 x + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} a^4 \sin^4 x$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} a^6 \sin^6 x + \ldots$$

Man hat daher:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}} = x + \frac{1}{2} a^2 \int \sin^2 x \, dx + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} a^4 \int \sin^4 x \, dx$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} a^6 \int \sin^6 x \, dx + \ldots$$

wo alle Integrale rechter Hand nach Früherem bekannt sind.

5) $$\int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 x} \, dx = \int (1 - a^2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} dx = \int \Big[1 - \frac{1}{2} a^2 \sin^2 x$$
$$- \frac{1}{2} \frac{a^4}{4} \sin^4 x - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \frac{a^6}{6} \sin^6 x - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} \frac{a^8}{8} \sin^8 x - \ldots \Big] dx$$
$$= x - \frac{1}{2} a^2 \int \sin^2 x \, dx - \frac{1 \,.\, 1}{2 \,.\, 4} a^4 \int \sin^4 x \, dx$$
$$- \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} a^6 \int \sin^6 x \, dx - \ldots \text{ (wo } -1 < x < +1).$$

Da aber nach §. 104. 5. (14)

$$\int \sin^n x \, dx = - \frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx,$$

so sind sämmtliche Integrale bestimmbar.

6) $$\int \sqrt{1 - a^2 \cos^2 x} \, dx = \int (1 - a^2 \cos^2 x)^{\frac{1}{2}} dx$$
$$= \int \Big[1 - \frac{1}{2} a^2 \cos^2 x - \frac{1}{2} \frac{a^4}{4} \cos^4 x - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} \frac{a^6}{6} \cos^6 x - \ldots \Big] dx$$
$$= x - \frac{1}{2} a^2 \int \cos^2 x \, dx - \frac{1 \,.\, 1}{2 \,.\, 4} a^4 \int \cos^4 x \, dx$$
$$- \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} a^6 \int \cos^6 x \, dx - \ldots \; (-1 < x < +1)$$

Nach §. 104. 5. (16) ist aber

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

und vorstehende Integrale sind somit sämmtlich auflösbar.

7) Um $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 - a^2 x^2)(1 - b^2 x^2)}}$ zu bestimmen, wo a^2, b^2 d $x^2 < 1$ und $a < b$, setze $bx = z$, $\frac{a^2}{b^2} = m^2 < 1$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-a^2x^2)(1-b^2x^2)}} = \frac{1}{b}\int \frac{dz}{\sqrt{1-m^2z^2}\,.\,\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\left[1+\frac{1}{2}m^2z^2+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}m^4z^4+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}m^6z^6+\ldots\right]dz$$

$$= \frac{1}{b}\left[\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{1}{2}m^2\int \frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}m^4\int \frac{z^4dz}{\sqrt{1-z^2}}+\ldots\right]$$

wo die einzelnen Integrale nach §. 97. 8. (7) bestimmbar sind.

8) Für $x < 2a$ ist:

$$\int \sqrt{2ax-x^2}\,dx = \sqrt{2a}\int x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \sqrt{2a}\int\left[x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2a}-\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{4a^2}-\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{x^{\frac{7}{2}}}{8a^3}-\ldots\right)dx$$

$$= 2x\sqrt{2ax}\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{2\,.\,5}\,\frac{x}{2a}-\frac{1\,.\,1}{2\,.\,4\,.\,7}\,\frac{x^2}{4a^2}-\frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,9}\,\frac{x^3}{8a^3}-.\right]$$

9) Wie wir oben gesehen haben, ist das binomische Integral $\int x^m(ax^n+b)^p\,dx$ in manchen Fällen nicht direct lösbar. Um in einem solchen Falle dasselbe annähernd zu bestimmen, setze man, wenn $p=\frac{q}{r}$ und $\frac{a}{b}x^n<1$ ist,

$$(ax^n+b)^{\frac{q}{r}} = b^{\frac{q}{r}}\left(1+\frac{a}{b}x^n\right)^{\frac{q}{r}} =$$

$$b^{\frac{q}{r}}\left[1+\frac{q}{r}\,\frac{a}{b}x^n+\frac{q(q-r)}{2r^2}\,\frac{a^2}{b^2}x^{2n}+\ldots\right]$$

also

$$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{q}{r}}dx = b^{\frac{q}{r}}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{q}{r}\,.\,\frac{a}{b}\,\frac{x^{m+n+1}}{m+n+1}\right.$$

$$\left.+\frac{q(q-r)}{2r^2}\,.\,\frac{a^2}{b^2}\,.\,\frac{x^{2n+m+1}}{2n+m+1}+\frac{q(q-r)(q-2r)}{2\,.\,3\,r^3}\,.\,\frac{a^3}{b^3}\,.\,\frac{x^{3n+m+1}}{3n+m+1}+\ldots\right]+C.$$

Um eine Reihe nach fallenden Potenzen von x zu erhalten, setze man, wenn $\frac{b}{a}x^{-n}<1$ ist,

$$(ax^n+b)^{\frac{q}{r}} = a^{\frac{q}{r}}x^{\frac{nq}{r}}\left(1+\frac{b}{a}x^{-n}\right)^{\frac{q}{r}} = a^{\frac{q}{r}}\,x^{\frac{qn}{r}}\left[1+\frac{q}{r}\,\frac{b}{a}x^{-n}\right.$$

$$\left.+\frac{q(q-r)}{2r^2}\,\frac{b^2}{a^2}x^{-2n}+\ldots\right]$$

so lgt:

$$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{q}{r}}dx = a^{\frac{q}{r}}\left(\frac{rx^{m+\frac{qn}{r}+1}}{r(m+1)+qn}+\frac{bq\,x^{m+\frac{qn}{r}+1-n}}{a[r(m-n+1)+qn]}\right.$$

$$\left.+\frac{b^2q(q-r)\,x^{m+\frac{qn}{r}+1-2n}}{2a^2r[r(m-2n+1)+qn]}+\ldots\right)+C.$$

10) Um $\int x^n\, a^x\, dx$ zu bestimmen, setze man nach §. 50:

$$a^x = 1 + \frac{la}{1} x + \frac{l^2 a}{2} x^2 + \ldots$$

so wird

$$\int x^n\, a^x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{la}{n+2} x^{n+2} + \frac{l^2 a}{2\,(n+3)} x^{n+3}$$
$$+ \frac{l^3 a}{2\,.\,3\,(n+4)} x^{n+4} + \ldots + C.$$

11) $$\int \frac{a^x\, dx}{x} = \int \frac{1}{x} \left(1 + \frac{la}{1} x + \frac{l^2 a}{2} x^2 + \ldots\right) dx = lx + xla$$
$$+ \frac{x^2}{2} \frac{l^2 a}{2} + \frac{x^3}{3} \frac{l^3 a}{2\,.\,3} + \ldots + C.$$

Setzt man hierin

$$a^x = z, \text{ also } x = \frac{lz}{la}$$

so wird

$$\int \frac{dz}{lz} = llz + lz + \frac{l^2 z}{2\,.\,2} + \frac{l^3 z}{2\,.\,3\,.\,3} + \ldots + C.$$

Vergl. wegen dieses Integrals die Bemerkung in §. 100.

12) Um $f(x) = l\,(x + \sqrt{1 + x^2})$ in eine Reihe zu verwandeln, setze man

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} x^2$$
$$+ \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} x^4 - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} x^6 + \ldots$$

so folgt:

$$f(x) = x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \frac{x^5}{5} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Sechzehnter Abschnitt.

Bestimmte Integrale.

§. 110. Erklärungen.

1) Nach §. 7 drückt der Differentialquotient $\frac{df(x)}{dx}$ die Geschwindigkeit aus, mit welcher sich ein Punkt zur Zeit x bewegt, wenn die ursprüngliche stetige Function $f(x)$ den Abstand des bewegten Punktes von einem festen Punkte zu eben der Zeit x bezeichnet.

Hieraus geht unmittelbar hervor, dass man aus der Schnelligkeit der Aenderung oder dem Differentialquotienten einer Function wieder die ursprüngliche Function wird finden können.

Weil man aber zu einer Function eine beliebige Constante addiren kann, ohne dass dadurch der Werth ihres Differentialquotienten sich ändert, so ist im Allgemeinen die eben erwähnte Aufgabe der Auf suchung der ursprünglichen Function eine unbestimmte.

Dieselbe wird erst zu einer bestimmten Aufgabe, wenn man der Frage folgende Fassung gibt:

„Zur Zeit a kennt man den Abstand A eines sich bewegenden Punktes vom Ausgangspunkte; man soll den Abstand desselben zur Ze[illegible] x bestimmen, wenn die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke du[illegible]h $f(x)$ ausgedrückt ist, wo $f(x)$ von $x = a$ bis $x = x$ stetig ble[illegible]t."

Um diese Frage zu beantworten, nehmen wir zunächst an, der Pu[illegible] ändere in der Zwischenzeit $x - a$ seine Bewegungsrichtung ni[illegible]ht und bewege sich während derselben mit einer stets wachsende[illegible] Geschwindigkeit.

Denkt man sich nun die Zeit $x - a$ in n gleiche Theile $\frac{x-a}{n} = \Delta$ getheilt, so sind die Geschwindigkeiten zu Anfang und nach den aufeinander folgenden Zeitintervallen Δ der Reihe nach:

$$f(a), f(a+\Delta), f(a+2\Delta), \ldots f[a+(n-1)\Delta]$$

und da die Geschwindigkeit immer wächst, so ist der in der Zeit $x-a$ zurückgelegte Weg

$$W > \Delta \{f(a) + f(a+\Delta) + f(a+2\Delta) + \ldots + f[a+(n-1)\Delta]\}^{*)}$$

und

$$W < \Delta \{f(a+\Delta) + f(a+2\Delta) + \ldots + f[a+(n-1)\Delta] + f(a+n\Delta)\}$$

oder wenn wir die Ausdrücke zur Rechten dieser beiden Ungleichungen bezüglich durch S und S_1 bezeichnen,

$$W > S \text{ und } W < S_1$$

oder

$$S_1 > W > S$$

Nun ist aber

$$S_1 - S = \Delta [f(a+n\Delta) - f(a)]$$

oder

$$S_1 - S = \Delta [f(x) - f(a)] = \frac{x-a}{n} [f(x) - f(a)]$$

und da offenbar

$$(x-a) f(x) > W > (x-a) f(a)$$

so ist jedenfalls W endlich.

Lassen wir nun n unendlich gross werden, so nähert sich $S_1 - S$ gleichzeitig der Null und wir müssen darum setzen:

$$W = \lim \Delta [f(a) + f(a+\Delta) + f(a+2\Delta) + \ldots + f[a+(n-1)\Delta]] \ldots (1)$$

Die ursprüngliche Function $\int f(x)\, dx$, welche den Abstand des Punktes zur Zeit x vom Anfangspunkte darstellt, ist daher $A + W$ oder $A + \varphi(a, x)$, da W eine Function von a und x ist.

Weil in der Zeit Null der zurückgelegte Weg ebenfalls Null ist, so erhält man $\varphi(a, a) = 0$. Man kann daher auch schreiben:

$$\int f(x)\, dx = A + \varphi(a, x) - \varphi(a, a)$$

oder, wenn man der Kürze halber

$$C + \varphi(a, x) = F(x)$$

also

$$C + \varphi(a, a) = F(a)$$

setzt, wo C eine beliebige Constante bedeutet,

$$\int f(x)\, dx = A + F(x) - F(a)$$

---

*) Beginnen nämlich zwei Punkte A und B gleichzeitig und mit einerlei Geschwindigkeit eine Bewegung, bewegt sich aber A gleichförmig, B beschleunigt, so legt ersterer in der nämlichen Zeit einen grösseren Weg zurück als A; ist die Bewegung des B eine verzögerte, so ist sein Weg kleiner als der des A.

Wird eine stets abnehmende Geschwindigkeit bei der Bewegung während der Zwischenzeit $x - a$ vorausgesetzt, so hat man in obiger Erörterung nur die beiden Ungleichheitszeichen mit einander zu vertauschen, so dass also auch dafür die Beziehung (1) Giltigkeit hat.

Wird angenommen, der Punkt ändere während der Zeit $x - a$ seine Bewegungsrichtung, so darf man sich nur $x - a$ in solche Abschnitte zerlegt denken, dass innerhalb jedes einzelnen derselben die Bewegungsrichtung unverändert bleibt, um sofort die Richtigkeit von (1) auch für diesen Fall einzusehen. Ganz analog ist zu verfahren, wenn vorausgesetzt wird, dass die Geschwindigkeit bald wächst, bald abnimmt, so dass also obige Formel (1) nur an die Bedingung geknüpft ist, dass $f(x)$ von $x = a$ bis $x = x$ reell und stetig bleibe.

Anmerk. 1) Wir haben bei vorstehender Entwickelung das Zeitintervall $x - a$ in n gleiche Theile getheilt, was nicht durchaus nothwendig war. Denn nehmen wir beliebige Theile $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ statt der gleichen und setzen dieselben sowie die Differenz von je zwei unmittelbar auf einander folgenden als unendlich klein voraus, so findet man auf ganz analoge Weise:

$$W = lim\,[\delta_1 f(a) + \delta_2 f(a + \delta_1) + \delta_3 f(a + \delta_1 + \delta_2) + \ldots]$$

2) Ein Grenzwerth W existirt auch dann noch, wenn $f(x)$ zwischen a und x eine endliche Anzahl von Sprüngen macht, sobald der Umfang jedes Sprunges endlich ist. Man sieht dieses leicht ein, wenn man bedenkt, dass eine endliche Anzahl von Elementen der Summe W zum Werthe der ganzen Summe nur unendlich wenig beiträgt.

Zur näheren Erläuterung des Vorstehenden dienen folgende Beispiele.

1) Es sei $\dfrac{df(x)}{dx} = mx$, man soll die ursprüngliche Function $f(x)$ bestimmen.

Auflösung. Hier wird:

$$\begin{aligned} f(x) &= A + \Delta\,[ma + m(a + \Delta) + \ldots + m(a + (n-1)\Delta)] \\ &= A + \Delta\,[nma + m\Delta(1 + 2 + \ldots + (n-1))] \\ &= A + \Delta\left[nma + m\Delta\,\frac{(n-1)\,n}{2}\right] \end{aligned}$$

oder da

$$n\Delta = x - a,$$

$$f(x) = A + (x-a)\,ma + (x-a)^2\,\frac{m}{2} - (x-a)\,\frac{m\Delta}{2}.$$

Für $n = \infty$ oder $\Delta = 0$ folgt hieraus unmittelbar:

$$\begin{aligned} f(x) &= A + (x-a)\,ma + (x-a)^2\,\frac{m}{2} \\ &= A - \frac{ma^2}{2} + \frac{mx^2}{2} \end{aligned}$$

. wenn man den constanten Werth

$$A - \frac{ma^2}{2} = C$$

setzt,

$$f(x) = \frac{mx^2}{2} + C.$$

2) Es sei $\frac{df(x)}{dx} = x^2$; man soll $f(x)$ bestimmen.

Auflösung. Analog wie vorhin findet man:

$$f(x) = A + \Delta \{a^2 + (a+\Delta)^2 + \ldots + [(a + (n-1)\Delta]^2\}$$
$$= A + \Delta \{na^2 + 2a\Delta (1 + 2 + \ldots + (n-1)]$$
$$\Delta^2 (1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2)\}$$
$$= A + n\Delta a^2 + (n-1) n\Delta^2 a + \frac{(n-1)n(2n-1)}{1 . 2 . 3}\Delta^3$$

oder wenn man ausmultiplicirt, $x - a$ statt $n\Delta$ einführt und hierauf $n = \infty$ oder $\Delta = 0$ setzt,

$$f(x) = A + (x-a)a^2 + (x-a)^2 a + \frac{(x-a)^3}{3}$$
$$= A - \frac{a^3}{3} + \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C.$$

3) $f(x)$ zu bestimmen, wenn $\frac{df(x)}{dx} = b^x$ ist.

Auflösung. Man erhält:

$$f(x) = A + \Delta [b^a + b^{a+\Delta} + \ldots + b^{a+(n-1)\Delta}]$$
$$= A + \Delta b^a \frac{b^{n\Delta} - 1}{b^\Delta - 1} = A + b^a \frac{\Delta}{b^\Delta - 1}(b^{x-a} - 1)$$
$$= A + (b^x - b^a)\frac{\Delta}{b^\Delta - 1}.$$

Für $\Delta = 0$ wird

$$\frac{\Delta}{b^\Delta - 1} = \frac{0}{0} = \frac{1}{l(b)} \text{ (§. 54).}$$

also

$$f(x) = A + \frac{b^x - b^a}{lb} = \frac{b^x}{lb} + C.$$

4) Es sei $\frac{df(x)}{dx} = \cos x$; man soll $f(x)$ finden.

Auflösung. $f(x) = A + \Delta [\cos a + \cos(a+\Delta) + \ldots + \cos(a + (n-1)\Delta)]$.

Setzt man

$$s = \cos a + \cos(a+\Delta) + \ldots + \cos(a + (n-1)\Delta)$$

so wird

$$2s\cos\Delta = 2\cos a \cos\Delta + 2\cos(a+\Delta)\cos\Delta + \ldots + 2\cos(a+(n-1)\Delta)\cos\Delta$$
$$= \cos(a+\Delta) + \cos(a-\Delta) + \cos((a+\Delta)+\Delta) + \cos((a+\Delta)-\Delta) + \ldots + \cos(a+n\Delta) - \cos(a+(n-2)\Delta)$$
$$= \cos(a+\Delta) + \cos(a-\Delta) + \cos(a+2\Delta) + \cos(a+3\Delta) + \cos(a+\Delta) + \cos(a+4\Delta) + \cos(a+2\Delta) + \ldots + \cos(a+n\Delta) + \cos(a+(n-$$
$$= \cos(a-\Delta) - \cos a + 2[\cos a + \cos(a+\Delta) + \ldots + \cos(a+(n-2)\Delta) + \cos(a+(n-1)\Delta)] - \cos(a+(n-1)\Delta) + \cos(a+n\Delta)$$
$$= 2s + \cos(a-\Delta) - \cos a - \cos(a+(n-1)\Delta) + \cos(a+n\Delta),$$

also

$$2s(1-\cos\Delta) = -\cos(a-\Delta) + \cos a + \cos(a+(n-1)\Delta) - \cos(a+n\Delta)$$

oder

$$4s\sin^2\frac{\Delta}{2} = -\cos(a-\Delta) + \cos a + \cos(x-\Delta) - \cos x$$

somit

$$\frac{4\Delta s\sin^2\frac{\Delta}{2}}{\Delta^2} = \frac{-\cos(a-\Delta)+\cos a}{\Delta} + \frac{-\cos x + \cos(x-\Delta)}{\Delta}$$

oder $$\Delta s\,\frac{\sin^2\frac{\Delta}{2}}{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2} = -\sin a + \sin x.$$

Für ein unendlich kleines Δ wird daher

$$\Delta s = \sin x - \sin a$$

und $$f(x) = A + \Delta s = A + \sin x - \sin a$$

oder $$f(x) = \sin x + C.$$

5) Auf ganz analoge Weise findet man aus $\frac{df(x)}{dx} = \sin x$, dass

$$f(x) = -\cos x + C.$$

3) Die Grenze W, welche sich uns als der in der Zeit von $x = a$ bis $x = x$ durchlaufene Weg darstellt, hat auch noch andere geometrische Bedeutungen, je nach der Bedeutung, welche man dem $f(x)$ unterbreitet.

α) Denkt man sich die ursprüngliche Function $F(x)$ als Flächenraum über der als Abscissenachse angenommenen Strecke $x - a$, so ist nach §. 11 $f(x)$ die Ordinate der Begrenzungscurve. Setzt man nun voraus, dass $f(x)$ von $x = a$ bis $x = x$ sein Zeichen nicht ändere und beständig wachse oder abnehme und beschreibt, auf die aus der Elementargeometrie hinlänglich bekannte Weise, die dem Flächenraum ein- und umschriebenen Rechtecke, deren Summe bezüglich S und S_1 ist, so liegt der Flächenraum stets zwischen denselben und da

$$\lim(S - S_1) = 0,$$

so folgt:

$$\lim S = \lim S_1$$

al[illegible] erth des Flächenraumes.

Versteht man unter der ursprünglichen Function nach §. 9 di[illegible] [illegible]dinate einer Curve und unter dem Differentialquotienten die tri[illegible] [illegible]nometrische Tangente des Winkels, welchen die Berührende mit de[illegible] [illegible]scissenachse bildet, so überzeugt man sich leicht, dass der

Winkel α, den die Sehne AB eines nur concaven (Fig. 101) oder nur convexen Curvenbogens (Fig. 102) mit der Abscissenachse bildet, stets zwischen den zwei Winkeln β und γ liegt, welche die in den Endpunkten der Sehne an die Curve gezogenen Berührenden mit derselben Achse einschliessen.

Fig. 101.

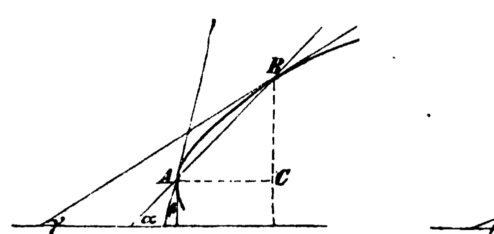
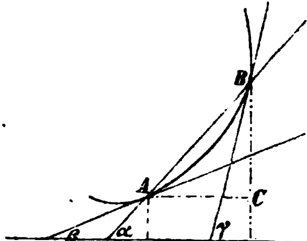


Fig. 102.



Bezeichnet nun $f(x)$ die trigonometrische Tangente des $\measuredangle\, \alpha$, und sind a und b die Abscissen der Punkte A und B, so liegt jedenfalls die Differenz der entsprechenden Ordinaten oder BC zwischen $(b-a)f(a)$ und $(b-a)f(b)$. Ist nun der Bogen AB stets concav oder stets convex gegen die Abscissenachse und man denkt sich den Abstand $b-a$ in n gleiche Theile Δ getheilt und nach Obigem die Ordinatendifferenz bestimmt, so liegt BC zwischen den zwei angeführten Summen S und S_1. Es stellt daher auch W die Ordinatendifferenz der zwei Punkte A und B dar.

4) Statt der Grenze W schreibt man nach der in der Summenrechnung üblichen Art: $\int_a^x f(x)\,dx$ und nennt diesen Ausdruck ein bestimmtes Integral, a die untere, x die obere Grenze desselben. Das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ ist dann gleich $A + \int_a^x f(x)\,dx$.

5) Da das bestimmte Integral nur für ganz wenige Fälle durch Summation der entsprechenden Reihe und den Uebergang zur Grenze erhalten werden kann, so wollen wir uns sogleich mit einem anderen, zur Bestimmung solcher Integrale zweckmässigeren Verfahren beschäftigen.

§. 111. Auffindung des bestimmten Integrales.

1) Ist die eindeutige Function $f(x)$ reell und stetig innerhalb der Grenzen a und x, so gibt es, wie aus §. 11 hervorgeht, auch ein unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

welches eindeutig, reell und stetig innerhalb derselben Grenzen ist und zwar wird $F(x)$ das gemischtlinige Viereck ausdrücken, welches begrenzt ist von der Strecke $x - a$ den Ordinaten $f(a)$ und $f(x)$ und dem zwischen liegenden Bogen der Curve $y = f(x)$.

Setzt man nun wieder

$$\frac{x-a}{n} = \Delta,$$

so ist $$\lim \frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} = f(x)$$

und $$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Es kann daher, wenn δ einen gleichzeitig mit Δ sich der Null nähernden Werth bezeichnet, gesetzt werden:

$$\frac{F(x+\Delta) - F(x)}{\Delta} = f(x) + \delta.$$

oder $$F(x+\Delta) - F(x) = \Delta f(x) + \Delta\delta$$

und hiernach $$F(a+\Delta) - F(a) = \Delta f(a) + \Delta\delta_1$$

$$F(a+2\Delta) - F(a+\Delta) = \Delta f(a+\Delta) + \Delta\delta_2$$

$$F(a+3\Delta) - F(a+2\Delta) = \Delta f(a+2\Delta) + \Delta\delta_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(a+(n-1)\Delta) - F(a+(n-2)\Delta) = \Delta f(a+(n-2)\Delta) + \Delta\delta_{n-1}$$

$$F(a+n\Delta) - F(a+(n-1)\Delta) = \Delta f(a+(n-1)\Delta) + \Delta\delta_n$$

Durch Addition der vorstehenden Gleichungen erhält man*):

$$F(x) - F(a) = \Delta\,[f(a) + f(a+\Delta) + f(a+2\Delta) + \ldots$$
$$+ f(a+(n-1)\Delta) + \Delta(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots + \delta_n)$$

Bezeichnet nun g den grössten, k den kleinsten der Absolutwerthe $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, so liegt offenbar das Product $\Delta(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n)$ zwischen $n\Delta g$ und $n\Delta k$ oder zwischen $(x-a)\,g$ und $(x-a)\,k$ und da g und k sich mit wachsendem n der Null nähern, so erhält man für [die]sen Fall:

$$[F(]x) - F(a) = \lim \Delta\,[f(a) + f(a+\Delta) + \ldots + f(a+(n-1)\Delta)]$$

$$= W = \int_a^x f(x)\,dx.$$

---

*) Diese Addition und ein gegenseitiges Aufheben der Glieder ist natürlich nur [bei] der gemachten Voraussetzung, dass $F(x)$ und $f(x)$ stetig seien, gestattet.

Ist daher die eindeutige Function $f(x)$ reell und stetig zwischen den Grenzen a und b und bezeichnet $F(x)$ das ebenfalls eindeutige, reelle und stetige unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$, so erhält man den Werth des bestimmten Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$, wenn man in das unbestimmte zuerst die obere Grenze b, dann die untere a statt x einführt und das Resultat dieser Substitution von dem jener subtrahirt.

2) Dieses Resultat lässt sich auch auf folgende Arten leicht geometrisch ableiten:

Fig. 103.

α) Ist (Fig. 103) die Ordinate $xX = f(x)$, also der Flächenraum $cCXx = F(x)$, so ist $F(b) = cCBb$, $F(a) = cCAa$, und somit:

$$F(b) - F(a) = cCBb - cCAa = aABb.$$

Die Fläche $aABb$ ist aber die Grenze der Summe $\int_a^b f(x)\,dx$ und daher:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

β) Bezeichnet $f(x)$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührende mit der XAchse bildet, so ist $F(x)$ die Ordinate und $F(b) - F(a)$ die Ordinatendifferenz der äussersten Punkte.

Diese ist aber bei einem stetigen Steigen der Curve gleich der algebraischen Summe der Höhendifferenzen von je zwei unmittelbar auf einander folgenden Punkten oder gleich

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

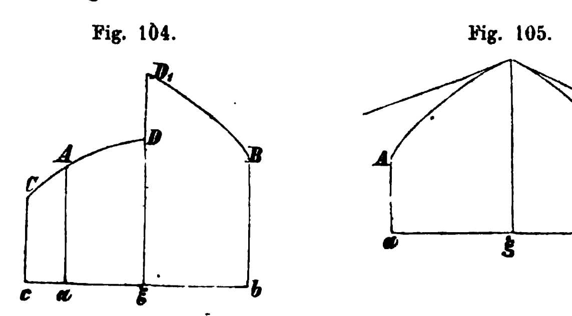
3) Erleidet die Function $f(x)$ für $x = \xi$ eine Unstetigkeit, indem dieselbe zwei Werthe annimmt, bleibt aber $f(x)$ endlich (zwischen a und b) und ist $\int f(x)\,dx = F(x)$ ein stetiges unbestimmtes Integ das in diesem Falle stets existiren muss, so bleibt die Gleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

immer noch richtig.

Denn stellt $f(x)$ die Ordinate der Curve $y = f(x)$ dar, so ist die Grenze der Summe $\int_a^b f(x)\,dx$ der Flächenraum $aADD_1Bb$ (Fig. 104), da das Element $\Delta f(\xi)$ der Summe, welches zweideutig wird, auf den Werth des Integrales keinen Einfluss hat.

Fig. 104. Fig. 105.



Es ist daher:

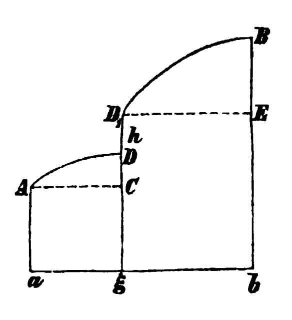
$$F(b) = cCDD_1Bb$$
$$F(a) = cCAa,$$

woraus sofort die Richtigkeit obiger Behauptung hervorgeht.

Zu demselben Resultate gelangt man bei Zugrundelegung der Fig. 105, wenn durch $f(x)$ die Tangente des Neigungswinkels der Curve und durch die ursprüngliche Function $F(x)$ die Ordinate dargestellt wird. Hier ist $f(x)$ für $x = \xi$ unstetig, $F(x)$ aber stetig (zwischen a und b).

4) Wird aber die eindeutige Function $f(x)$ an der Stelle $x = \xi$ unstetig, indem sie im Allgemeinen drei Werthe annimmt, von welchen einer unendlich gross ist, und ist die ursprüngliche Function $F(x)$ ebenfalls unstetig, so ist obiger Satz nicht mehr richtig.

Fig. 106.



Um dieses nachzuweisen, stelle $f(x)$ die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels der entsprechenden Curve (Fig. 106), also $F(x)$ die Ordinate dar.

Soll nun die Summe $\int_a^b f(x)\,dx$ einen n haben, so müssen wir diejenigen Elemente selben, welche unendlich werden können, scheiden, d. h. wir müssen $\int_a^b f(x)\,dx$ als die Grenze der Summe

$$\int_a^{\xi-\delta} f(x)\,dx + \int_{\xi+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

für $\lim \delta = \lim \varepsilon = 0$ betrachten.

Für Fig. 106 sind aber $\int_a^{\xi-\delta} f(x)\,dx$ und $\int_{\xi+\delta}^b f(x)\,dx$ bezüglich die Höhendifferenzen DC und BE und die Summe aus beiden Ausdrücken und dem Sprunge $DD_1 = h$ stellt somit die Höhendifferenz der Punkte A und B dar. Es ist also in vorliegendem Falle:

$$\int_a^b f(x)\,dx + h = F(b) - F(a)$$

Ist $f(\xi) = \infty$, $F(x)$ aber stets stetig (Fig. 107), so hat obiger Satz noch volle Giltigkeit, ist aber $f(\xi) = \infty$ und $F(\xi)$ unstetig (Fig. 108), so ist derselbe ungiltig.

Fig. 107.

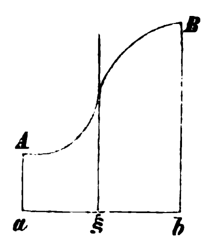
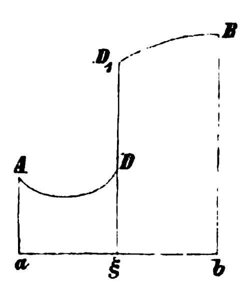


Fig. 108.



5) Aus vorstehenden Betrachtungen ergibt sich also, dass der in 1. ausgesprochene Satz zur Auffindung eines bestimmten Integrales stets Giltigkeit hat, wenn das unbestimmte Integral $F(x)$ innerhalb der betreffenden Grenzen reell und stetig bleibt; die eindeutige und reelle Function $f(x)$ darf hierbei endliche Sprünge machen, ja selbst unendlich werden.

6) Das bestimmte Integral einer complexen Function

$$\int_a^b f(x, i)\,dx$$

sehen wir, wie das einer reellen Function, als die Grenze (Summe an.

Ist $$f(x, i) = \varphi(x) + i\psi(x),$$
so verstehen wir nämlich unter

$$\int_a^b f(x, i)\, dx = \int_a^b [\varphi(x) + i\psi(x)]\, dx$$

die Grenze der Summe

$$\varDelta [\varphi(a) + i\psi(a) + \varphi(a + \varDelta) + i\psi(a + \varDelta) + \ldots + \varphi(a + (n-1)\varDelta) + i\psi(a + (n-1)\varDelta)],$$

wo

$$\varDelta = \frac{b-a}{n}.$$

Statt derselben kann man auch schreiben:

$$\varDelta [\varphi(a) + \varphi(a + \varDelta) + \ldots + \varphi(a + (n-1)\varDelta)] + i\varDelta [\psi(a) + \psi(a + \varDelta) + \ldots + \psi(a + (n-1)\varDelta)]$$

oder

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx + i\int_a^b \psi(x)\, dx.$$

Ist $f(x, i)$, also auch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwischen den Grenzen a und b reell und stetig und das unbestimmte Integral

$$\int f(x, i)\, dx = \int [\varphi(x) + i\psi(x)]\, dx = \Phi(x) + i\Psi(x)$$

also

$$\int \varphi(x)\, dx = \Phi(x)$$

$$\int \psi(x)\, dx = \Psi(x)$$

so kann man $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ ebenfalls als reell und stetig zwischen den Grenzen a und b ansehen.

Man hat daher:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$\int_a^b \psi(x)\, dx = \Psi(b) - \Psi(a)$$

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx + i\int_a^b \psi(x)\, dx = \int_a^b f(x, i)\, dx$$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) + i[\Psi(b) - \Psi(a)]$$

$$= \Phi(b) + i\Psi(b) - [\Phi(a) + i\Psi(a)].$$

[an erhält somit das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x, i)\, dx, \text{ wenn } f(x, i)$$

zw…hen den Grenzen a und b stetig ist, indem man in das unbestimmte st…e Integral

$$\int_a^b f(x, i)\, dx = \Phi(x) + i\Psi(x)$$

zuerst die obere, dann die untere Grenze einführt und das zweite Resultat vom ersten subtrahirt.

§. 112. Sätze über bestimmte Integrale.

1) Vertauscht man in der Gleichung

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die beiden Grenzen und setzt

$$\int_b^a f(x)\, dx = F(a) - F(b)$$

so folgt

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

d.h. der Werth des bestimmten Integrales geht durch Vertauschung seiner Grenzen in den entgegengesetzten über.

2) Aus der Gleichung

$$F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(d) - F(c) + F(b) - F(d)$$

folgt unmittelbar:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx \quad . \quad . \quad (3)$$

und ebenso allgemein:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^d + \int_d^e + \ldots + \int_n^b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Durch vorstehende Gleichung wird der Satz von der Einschiebung der Grenzen ausgedrückt. Derselbe setzt voraus, dass $f(x)$ innerhalb der Grenzen eines jeden Integrales reell und stetig bleibe.

Wird $f(x)$ für $x = c$ unstetig und ist $a < c < b$, so kann man nach Vorstehendem setzen:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim \left[\int_a^{c-\delta} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\, dx \right]$$

wenn δ und ε unendlich abnehmende Grössen bezeichnen, also $\lim \delta = \lim \varepsilon = 0$ ist.

Aus $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$
folgt alsdann:
$$\int_a^b f(x)\,dx = lim\,[F(c-\delta) - F(a) + F(b) - F(c+\varepsilon)]$$
$$= F(b) - F(a) + lim\,[F(c-\delta) - F(c+\varepsilon)],$$
woraus sich leicht die früheren Schlüsse folgern lassen.

3) Bezeichnet C eine Constante, so ist
$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx \quad \ldots\ldots \quad (5)$$
Denn setzt man
$$\int f(x)\,dx = F(x)$$
also $$\int Cf(x)\,dx = CF(x)$$
so wird $$\int_a^b Cf(x)\,dx = CF(b) - CF(a)$$
$$= C\,[F(b) - F(a)] = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

4) Da $\int [f(x) \pm f_1(x) \pm \ldots]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int f_1(x)\,dx \pm \ldots$
$$= F(x) \pm F_1(x) \pm \ldots$$
so ist $$\int_a^b [f(x) \pm f_1(x) \pm \ldots]\,dx = [F(b) - F(a)] \pm [F_1(b) - F_1(a)] \pm \ldots$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \ldots$$

5) Ist $x = \chi(y)$ eine Function von y, so ist auch $\int f(x)\,dx$ eine solche und daher
$$\frac{d\int f(x)\,dx}{dy} = \frac{d\int f(x)\,dx}{dx}\,\frac{dx}{dy} = f(x)\,\frac{dx}{dy}$$
$$\int f(x)\,\frac{dx}{dy}\,dy = \int f(x)\,dx$$
..n im ersten Integrale den Werth $f(x)\,\frac{dx}{dy}$ in y auszudrücken hat. ..ezeichnen a_1 und b_1 diejenigen Werthe von y, welche bezüglich ..Werthen a und b von x entsprechen, ist also
$$a = \chi(a_1)\,,\; b = \chi(b_1) \quad \ldots\ldots \quad (m)$$

so hat man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\frac{dx}{dy}\,dy.$$

Denn setzt man

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

und
$$\int f(x)\frac{dx}{dy}\,dy = F[\chi(y)] = \varphi(y),$$

so geht $F(x)$ in $\varphi(y)$ über, wenn man den Werth von x durch y ausdrückt und $\varphi(y)$ in $F(x)$, wenn man den Werth von y durch x ausdrückt.

Aus
$$F[\chi(y)] = \varphi(y)$$
folgt nun für $y = a_1$:
$$F[\chi(a_1)] = \varphi(a_1),$$
oder nach (m):
$$F(a) = \varphi(a_1).$$

Ebenso für
$$y = b_1:$$
$$F[\chi(b_1)] = \varphi(b_1)$$
oder nach (m):
$$F(b) = \varphi(b_1).$$

Durch Subtraction ergibt sich hieraus:
$$F(b) - F(a) = \varphi(b_1) - \varphi(a_1)$$
oder
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_1}^{b_1} f(x)\frac{dx}{dy}\,dy.$$

Beispiele.

1) Setzt man $x\sqrt{\frac{b}{a}} = y$, wo a und b positiv sind, so folgt:

$$\int\frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc\,tg\,y$$

und da für $x=0$ auch $y=0$ und für $x=a$, $y=\sqrt{ab}$ wird, so hat man:

$$\int_0^a\frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_0^{\sqrt{ab}}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc\,tg\,\sqrt{ab}.$$

2) Um das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+b\cos^2 x}$ zu bestimmen, wo a und a positiv sind, setze man

$$x = arc\,tg\,y\,;\; y = tg\,x\,;\; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2},$$

ferner $$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x} = \frac{1}{1 + y^2},$$
so folgt:
$$\int \frac{dx}{a + b\cos^2 x} = \int \frac{dy}{a + b + ay^2}$$
oder nach §. 84. Beisp. 35
$$\int \frac{dx}{a + b\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}} \, arc\,tg\left(y\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right) + C.$$
Da nun aus $x = arc\,tg\,y$ für $x = 0$, $y = 0$ und für
$$x = \frac{\pi}{2}, y = \infty$$
folgt, so wird
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b\cos^2 x} = \int_0^\infty \frac{dy}{a + b + ay^2} = \frac{arc\,tg\,\infty}{\sqrt{a(a+b)}} - \frac{arc\,tg\,0}{\sqrt{a(a+b)}}$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{a(a+b)}}.$$

3) Setzt man in dem Integrale $\int_a^b f(\alpha x + \beta)\, dx$
$$\alpha x + \beta = y, \text{ also } x = \frac{y - \beta}{\alpha}; \; \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\alpha},$$
so wird
$$\int_a^b f(\alpha x + \beta)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha a + \beta}^{\alpha b + \beta} f(y)\, dy$$
Für $a = 0$, $b = 1$ folgt hieraus:
$$\int_0^1 f(\alpha x + \beta)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_\beta^{\alpha + \beta} f(y)\, dy$$
oder
$$\int_\beta^{\alpha+\beta} f(y)\, dy = \alpha \int_0^1 f(\alpha x + \beta)\, dx.$$
tzt man $\beta = p$; $\alpha + \beta = q$, so geht diese Gleichung über in:
$$\int_p^q f(y)\, dy = (q - p)\int_0^1 f[(q - p)x + p]\, dx$$
ierdurch wird also ein Integral von den Grenzen p und q auf ein . dessen Grenzen 0 und 1 sind, zurückgeführt.

4) Um allgemeiner ein Integral von der Form $\int f\,[\varphi\,(x)]\,dx$ umzuformen, setze man $\varphi\,(x) = y$, bestimme daraus $x = \psi\,(y)$ und verfahre nun wie vorhin, wenn $\psi\,(y)$ eine eindeutige Function ist, was der Fall sein wird, wenn die eindeutige Function $\varphi\,(x)$ stets wächst oder stets abnimmt, also $\varphi'\,(x)$ sein Zeichen nicht ändert. Man erhält alsdann:

$$\int_a^b f\,[\varphi\,(x)]\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\,(y)\,\psi'\,(y)\,dy$$

Hat $\varphi'\,(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen a und b nicht immer dasselbe Zeichen, so wird $\varphi\,(x)$ innerhalb dieser Grenzen ein oder mehre Mal Null oder unstetig werden.

Da $\varphi'\,(x)\,\psi'\,(y) = 1$, also $\psi'\,(y)$ zugleich mit $\varphi'\,(x)$ unstetig wird und wir immer voraussetzen, dass die Function unter dem Integralzeichen stetig bleibe, so dürfen wir von dem Falle, dass $\varphi'\,(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen unstetig wird, absehen. Aendert nun $\varphi'\,(x)$ für die der Grösse nach geordneten Abscissen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$ sein Zeichen, wird diese Function also Null und nimmt somit $\varphi\,(x)$ im Allgemeinen einen ausgezeichneten Werth an, so zerfällt das Integral in folgende $m+1$ Integrale:

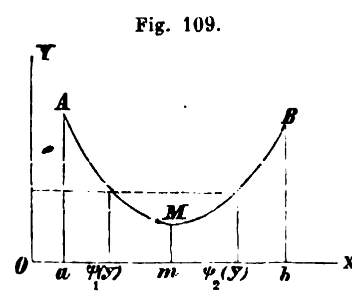
$$\int_a^b = \int_a^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \ldots + \int_{a_{m-1}}^{a_m} + \int_{a_m}^{b}$$

In jedem derselben ist $\varphi\,(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen stets wachsend oder stets abnehmend und der Gleichung $y = \varphi\,(x)$ entspricht daher nur eine einzige Umkehrung $x = \psi\,(y)$, welche aber für die verschiedenen Integrale eine verschiedene ist. Nehmen wir z. B. an, $\varphi'\,(x)$ werde nur einmal innerhalb des Integrationsintervalles für $x = m$ Null, und setzen:

$$\int_a^b f\,[\varphi\,(x)]\,dx = \int_a^m f\,[\varphi\,(x)]\,dx + \int_m^b f\,[\varphi\,(x)]\,dx,$$

so ist $\varphi\,(x)$ in jedem der Integrale zur Rechten stets wachsend oder stets abnehmend.

Fig. 109.



Stellt nun AMB (Fig. 109) die Curve $y = \varphi\,(x)$ dar, so ergibt sich aus dem Anblicke der Figur, dass man für $a < x < m$ zu setzen hat:

$$x = \psi_1\,(y)$$

für $m < x < b$ dagegen:

$$x = \psi_2\,(y).$$

In dem ersten der obigen tegrale ist somit $x = \psi_1\,(y)$ zweiten $x = \psi_2\,(y)$ einzuführen. Man erhält dadurch:

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(m)} f(y)\,\psi_1'(y)\,dy + \int_{\varphi(m)}^{\varphi(b)} f(y)\,\psi_2'(y)\,dy.$$

5) Soll das Integral $\int_{-a}^{+a} f\left(\frac{x^2}{p}\right) dx$, wo a und p positiv sind, umgeformt werden, so setze man $\frac{x^2}{p} = y$. Alsdann folgt: $x = \pm\sqrt{py}$, und zwar ist $x = +\sqrt{py}$ für ein positives x und $x = -\sqrt{py}$ für ein negatives x zu setzen.

Man erhält daher:

$$\int_{-a}^{+a} f\left(\frac{x^2}{p}\right) dx = \int_{-a}^{0} f\left(\frac{x^2}{p}\right) dx + \int_0^a f\left(\frac{x^2}{p}\right) dx$$

führt man nun in das erste der Integrale rechter Hand $x = -\sqrt{py}$, in das zweite $x = +\sqrt{py}$, so resultirt:

$$\int_{-a}^{+a} f\left(\frac{x^2}{p}\right) dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\left[-\int_{\frac{a^2}{p}}^{0} \frac{f(y)}{\sqrt{y}}\,dy + \int_0^{\frac{a^2}{p}} \frac{f(y)}{\sqrt{y}}\,dy\right]$$

oder wenn man im ersten dieser Integrale die Integrationsgrenzen vertauscht,

$$\int_{-a}^{+a} f\left(\frac{x^2}{p}\right) dx = \sqrt{p}\int_0^{\frac{a^2}{p}} \frac{f(y)}{\sqrt{y}}\,dy.$$

6) Soll das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{x^2 - 2ax + bc}{p}\right) dx$, wo a und p positiv sind, umgeformt werden, so setze $\frac{x^2 - 2ax + bc}{p} = y$. Man erhält alsdann, wenn der Kürze halber $\frac{bc - a^2}{p} = m$ gesetzt wird:

$$x = a \pm \sqrt{p(y - m)}.$$

Da nun $y - m$ immer positiv sein muss, wenn x reell werden soll, so ist hernach $x = a + \sqrt{p(y - m)}$ für $x > a$, und $x = a - \sqrt{p(y - m)}$ für $0 < x < a$ und $x < 0$.

Man hat daher das Integral zu zerlegen in:

$$\int_{-\infty}^{a} f\left(\frac{x^2 - 2ax + bc}{p}\right) dx + \int_a^{\infty} f\left(\frac{x^2 - 2ax + bc}{p}\right) dx$$

und in das erstere $x = a - \sqrt{p(y-m)}$, in das zweite aber

$$x = a + \sqrt{p(y-m)}$$

einzuführen.

Man erhält dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{p}\left[-\int_{\infty}^{m} \frac{f(y)}{\sqrt{y-m}}\,dy + \int_{m}^{\infty} \frac{f(y)}{\sqrt{y-m}}\,dy\right]$$

$$= \sqrt{p}\int_{m}^{\infty} \frac{f(y)}{\sqrt{y-m}}\,dy.$$

7) Man soll das Integral $\int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$ umformen.

Setzt man $x + \frac{1}{x} = y$, so folgt:

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1},$$

woraus sich ergibt, dass $\frac{y}{2} \geqq 1$.

Man muss daher setzen:

$$x = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}, \text{ wenn } x > 1$$

$$x = \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}, \text{ wenn } x < 1.$$

Das Integral ist daher zu zerlegen in:

$$\int_0^1 f\left(x + \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$$

und in das erste

$$x = \frac{y}{2} - \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1},$$

in das zweite

$$x = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} - 1}$$

einzuführen.

Man erhält alsdann:

$$\int_0^\infty f(y)\,dx = \int_\infty^2 f(y)\left[\frac{1}{2} - \frac{y}{4\sqrt{\frac{y^2}{4}-1}}\right]dy$$

$$+\int_2^\infty f(y)\left[\frac{1}{2} + \frac{y}{4\sqrt{\frac{y^2}{4}-1}}\right]dy = \int_2^\infty f(y)\,\frac{y}{2\sqrt{\frac{y^2}{4}-1}}\,dy$$

$$= \int_2^\infty \frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\,f(y)\,dy.$$

8) Um das Integral

$$\int_{\frac{1}{2}}^\infty f\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)dx$$

umzuformen, setze man $\frac{x^2}{2x-1} = y$, so folgt: $x = y \pm \sqrt{y^2 - y}$, woraus hervorgeht, dass $y > 1$, da y positiv ist.

Man hat daher zu nehmen:

$$x = y + \sqrt{y^2 - y},\ \text{wenn}\ x > 1,$$
$$x = y - \sqrt{y^2 - y},\ \text{wenn}\ x < 1$$

und das Integral zerlegt sich in:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)dx + \int_1^\infty f\left(\frac{x^2}{2x-1}\right)dx,$$

wo im ersten $x = y - \sqrt{y^2 - y}$, im zweiten $x = y + \sqrt{y^2 - y}$ zu setzen ist. Man erhält hiernach für die verlangte Umformung:

$$\int_\infty^1 f(y)\left(1 - \frac{2y-1}{2\sqrt{y^2-y}}\right)dy + \int_1^\infty f(y)\left(1 + \frac{2y-1}{2\sqrt{y^2-y}}\right)dy$$

$$= \int_1^\infty \frac{2y-1}{\sqrt{y^2-y}}\,f(y)\,dy.$$

6) Aus Obigem und der bekannten Formel

$$\int u\,\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\,\frac{du}{dx}\,dx$$

ɨbt sich unmittelbar:

$$\int_a^b u\,\frac{dv}{dx}\,dx = (uv)_{x=b} - (uv)_{x=a} - \int_a^b v\,\frac{du}{dx}\,dx \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

wo $u\frac{dv}{dx}$ und $v\frac{du}{dx}$, also auch u und v als stetig vorausgesetzt und durch $(uv)_{x=b}$ und $(uv)_{x=a}$ die Werthe von uv angedeutet werden, wenn man bezüglich $x = b$ und $x = a$ setzt.

7) Ist $\frac{a+b}{2} = c$ und entsprechen $f(x)$ von $x = a$ bis $x = c$ dieselben Werthe wie von $x = c$ bis $x = b$, d. h. ist $f(c+z) = f(c-z)$ so ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 2\int_a^c f(x)\,dx = 2\int_c^b f(x)\,dx$$

und für
$$f(c-z) + f(c+z) = 0$$

wird
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Denn da nach 2 (4)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

so folgt nach 5, wenn man im ersten dieser zwei Integrale $x = c - z$, im zweiten dagegen $x = c + z$ setzt,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_{c-a}^0 f(c-z)\,dz + \int_0^{b-c} f(c+z)\,dz$$

$$= \int_0^{c-a} f(c-z)\,dz + \int_0^{b-c} f(c+z)\,dz,$$

da nun $c - a = b - c$, so folgt hieraus für $f(c-z) = f(c+z)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^{b-c} [f(c-z) + f(c+z)]\,dz = 2\int_0^{c-a} f(c-z)\,dz$$

$$= 2\int_0^{b-c} f(c+z)\,dz.$$

Setzt man nun wieder $c - z = x$ oder $c + z = x$, so folgt hieraus

$$= 2\int_a^c f(x)\,dx = 2\int_c^b f(x)\,dx.$$

Für $$f(c+z)+f(c-z)=0$$

erhält man: $$\int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Anmerk. Diese zwei Sätze lassen sich auch leicht geometrisch nachweisen.

Man hat hiernach z. B.

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx, \text{ weil } \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$\int_0^\pi \cos x\,dx = 0, \text{ weil } \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = 0.$$

Ferner, wenn n eine ganze positive Zahl ist,

$$\int_0^\pi \sin^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx\ ;\ \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx$$

$$\int_0^\pi \cos^{2n} x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,dx\ ;\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

$$\int_0^\pi \cos^{2n+1} x\,dx = 0\ ;\ \int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} x\,dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = 2\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2}$$

8) Nach der Voraussetzung sind die einzelnen Glieder $f(a)$, $f(a+\varDelta)$, .. endliche Grössen. Bezeichnen wir nun durch G das absolut grösste und durch K das absolut kleinste derselben, so ist offenbar

$$\varDelta\,[f(a)+f(a+\varDelta)+\ldots+f(a+(n-1)\,\varDelta)] < n\varDelta G \text{ aber } > n\varDelta K,$$

so ... also der Werth des Ausdruckes zur Linken stets zwischen $n\varDelta G$ un... $\varDelta K$ fällt. Bezeichnet darum M einen zwischen G und K liegen-de... ...th, so kann man offenbar setzen:

$$\varDelta\,[\ldots+f(a+\varDelta)+\ldots+f(a+(n-1)\,\varDelta)] = n\varDelta M = (b-a)\,M.$$

... diese Gleichung aber für alle Werthe von $\varDelta$ giltig ist, so wird sie ... bestehen, wenn man zur Grenze übergeht. Man hat daher

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,M^{*)} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

oder wenn man durch θ eine zwischen 0 und 1 liegende, also durch $a + \theta(b-a)$ einen zwischen a und b liegenden Werth bezeichnet,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f[a + \theta(b-a)] \,.\; \ldots\ldots \quad (8)$$

Anmerk. Dieser Gleichung liegt die Stetigkeit von $f(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ als nothwendige und genügende Voraussetzung zu Grunde.

Setzt man hierin $f'(x)$ statt $f(x)$, wo $f'(x)$ eine stetige Function von x sein muss, so erhält man:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = (b-a)\,f'[a + \theta(b-a)]$$

oder da $$\int f'(x)\,dx = f(x),$$

$$f(b) - f(a) = (b-a)\,f'[a + \theta(b-a)],$$

wo also vorausgesetzt ist, dass $f'(x)$ und $f(x)$ stetige Functionen sind. Wie wir aber früher gesehen haben, genügt schon, dass $f(x)$ stetig und $f'(x)$ einwerthig sei.

9) Ist $f(x)$ zwischen den Integrationsgrenzen stets positiv oder stets negativ, so wird nach der Definition des bestimmten Integrales der Werth $\int_a^b f(x)\,dx$ natürlich auch bezüglich positiv oder negativ ausfallen, wenn $b > a$ ist.

10) Bezeichnen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei innerhalb der Grenzen a und b stetige Functionen, wo $b > a$ vorausgesetzt wird und ist zwischen diesen Grenzen $f(x) > \varphi(x)$, so ist auch

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Denn da $f(x) - \varphi(x)$ positiv ist innerhalb $x = a$ und $x = b$, so ist nach 9:

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]\,dx > 0, \text{ also} \int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

---

*) Es ist leicht diese Gleichung geometrisch zu deuten.

11) Hieraus geht unmittelbar hervor, dass wenn für alle Werthe von x innerhalb der Grenzen a und b die Functionen $\varphi(x)$, $f(x)$, $\psi(x)$ stetig sind und $\varphi(x) < f(x) < \psi(x)$ ist, auch

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \psi(x)\,dx$$

sein muss.

So ist z. B.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} > \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} > \int_0^{\frac{1}{2}} dx$$

da

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} > 1$$

ist für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$.*)

12) Ist $f(x)$ eine Function, welche innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = b$ stetig bleibt und dasselbe Zeichen behält, $\varphi(x)$ dagegen eine solche, die von $x = a$ bis $x = b$ stetig bleibt und bezeichnen G und K bezüglich den grössten und kleinsten der Werthe, welche $\varphi(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = b$ annimmt, so sind $G - \varphi(x)$ und $\varphi(x) - K$ zwischen $x = a$ und $x = b$ stets positiv und

$$[G - \varphi(x)]\,f(x) \text{ und } [\varphi(x) - K]\,f(x)$$

von einerlei Zeichen.

Es stimmen somit auch die Integrale

$$\int_a^b [G - \varphi(x)]\,f(x)\,dx \text{ und } \int_a^b [\varphi(x) - K]\,f(x)\,dx$$

hinsichtlich ihrer Zeichen überein, oder man hat beziehungsweise:

$$G\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx \gtrless 0$$

und

$$\int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx - K\int_a^b f(x)\,dx \gtrless 0$$

o

$$G\int_a^b f(x)\,dx \gtrless \int_a^b \varphi(x)\,f(x)\,dx$$

---

*) Denn $x < \frac{1}{2}$, $x^2 < 1$, $x^4 < x^2$, $1 - x^4 > 1 - x^2$; ferner $1 - x^4 < 1$, $\frac{1}{1 - x^4} > 1$

n.

und $$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx \gtrless K \int_a^b f(x)\, dx$$

also $$G \int_a^b f(x)\, dx \gtrless \int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx \gtrless K \int_a^b f(x)\, dx$$

Hiernach liegt also

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx$$

zwischen $$G \int_a^b f(x)\, dx \text{ und } K \int_a^b f(x)\, dx$$

und man kann darum setzen:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = M \int_a^b f(x)\, dx$$

wo M einen Mittelwerth von $\varphi(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ bezeichnet. Setzt man deshalb

$$M = \varphi[a + \theta(b - a)],$$

wo $0 < \theta < 1$ ist, so hat man:

$$\int_a^b \varphi(x) f(x)\, dx = \varphi[a + \theta(b - a)] \int_a^b f(x)\, dx.$$

Anmerk. Setzt man in dieser Gleichung

$$\varphi(x) f(x) = \psi(x)\ ;\ \varphi(x) = \frac{\psi(x)}{f(x)}$$

wo also $\psi(x)$ ebenfalls stetig ist von $x = a$ bis $x = b$ und $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = f(x)$ nach Obigem dasselbe Zeichen innerhalb dieser Grenzen beibehält, so folgt:

$$\int_a^b \psi(x)\, dx = \frac{\psi[a + \Theta(b - a)]}{f[a + \Theta(b - a)]} \int_a^b f(x)\, dx$$

oder wenn man

$$\int \psi(x)\, dx = \Phi(x)\ ;\ \psi(x) = \Phi'(x)$$

$$\int f(x)\, dx = F(x)\ ;\ f(x) = F'(x)$$

setzt,

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \frac{\Phi'[a + \Theta(b - a)]}{F'[a + \Theta(b - a)]} [F(b) - F(a)]$$

oder $$\frac{\Phi(b) - \Phi(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{\Phi'[a + \Theta(b - a)]}{F'[a + \Theta(b - a)]}$$

worin wir den in §. 40 entwickelten Satz (2) erkennen.

Diese Gleichung setzt nach Obigem voraus, dass $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$, $F(x)$ und $F'(x)$ innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = b$ stetig seien und ausserdem $F'(x)$ zwischen a und b sein Zeichen nicht ändere.

13) Für $f(x) = 1$ folgt hieraus

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \varphi\,[a + \theta\,(b - a)] \int_a^b dx$$
$$= (b - a)\, \varphi\,[a + \theta\,(b - a)].$$

14) Hat y innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = c$ den Werth $f(x)$, dagegen von $x = c$ bis $x = b$ den Werth $F(x)$ wo $a < c < b$, und soll man das Integral $\int_a^b y\, dx$ bestimmen, so setze man:

$$\int_a^b y\, dx = \int_a^c y\, dx + \int_c^b y\, dx$$
$$= \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b F(x)\, dx.$$

15) Unter $\int_a^\infty f(x)\, dx$ versteht man den Werth von $\lim \int_a^b f(x)\, dx$ für ein unendlich wachsendes b und analog unter $\int_\infty^b f(x)\, dx$ den Werth $\lim \int_a^b f(x)\, dx$ für $a = \infty$.

Hiernach findet man z. B.

$$\int_a^\infty e^{-x}\, dx = e^{-a}\,; \int_{-\infty}^b e^{-x}\, dx = \infty.$$

Uebereinstimmend damit ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim \int_a^b f(x)\, dx \text{ für } a = \infty\,,\; b = \infty.$$

Anmerk. Ob in vorstehendem Falle das Integral endlich oder unendlich ausfällt, lässt sich in manchen Fällen durch nachstehende zwei Sätze bestimmen:

α) Bleibt $f(x)$ endlich zwischen a und $+\infty$ und ist für $x > b > a$ bsolutwerth von $x^n f(x) < k$, wo $n > 1$ und k eine beliebige ve Zahl bezeichnet, so ist $\lim \int_a^x f(x)\, dx$ endlich für $\lim x = \infty$.

Behält $f(x)$ einen endlichen Werth und dasselbe Zeichen en a und $+\infty$ und ist für $x > b > a$ der Absolutwerth von) $\geq k$, $(n \leq 1)$, so ist $\int_a^\infty f(x)\, dx$ unendlich.

Die Richtigkeit dieser Sätze kann auf folgende Art nachgewiesen werden:

α) Man hat

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^x f(x)\,dx.$$

Das erste dieser Integrale ist bekanntlich endlich und da der Absolutwerth des zweiten

$$< \int_b^x \frac{k}{x^n}\,dx \text{ oder } < \frac{k}{n-1}\left(\frac{1}{b^{n-1}} - \frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

oder für $x = \infty, < \frac{k}{(n-1)\,b^{n-1}}$ ist, so ist auch dieses endlich.

β) Es ist wieder

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^x f(x)\,dx$$

und da der Absolutwerth von

$$\int_b^x f(x)\,dx > k\int_b^x x^{-n}\,dx,$$

also je nachdem $n < 1$ oder $n = 1$ ist,

$$> \frac{k\,(x^{1-n} - b^{1-n})}{1-n} \text{ oder } > kl\,\frac{x}{b}$$

ausfällt, also in beiden Fällen für $\lim x = \infty$ unendlich wächst, so ist $\int_a^\infty f(x)\,dx$ selbst unendlich.

Nun ist aber

$$\int_\infty^a f(x)\,dx = -\int_a^\infty f(x)\,dx$$

und wenn man $x = -y$ setzt,

$$\int_a^{-\infty} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{\infty} f(-y)\,dy = -\int_{-a}^{\infty} f(-x)\,dx;$$

ferner

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

also können obige Sätze auf jedes Integral angewendet werden, in welchem eine, oder beide Grenzen ∞ werden.

So ist z. B. $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ endlich, weil $x^n e^{-x^2} < k$.*)

---

*) Denn setzt man nach §. 50. Beisp. 3

$$x^n e^{-x^2} = \frac{x^n}{e^{x^2}} = \frac{x^n}{1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1\,.\,2} + \ldots + \frac{x^n}{1\,.\,2 \ldots \frac{n}{2}}}$$

so folgt für ein gerades n:

$$x^n e^{-x^2} < \frac{x^n}{\frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}} \text{ oder } < \left(\frac{n}{2}\right)!$$

16) Wird $f(x)$ für die obere Grenze b des Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ unendlich, ist also $f(b)=\infty$, bleibt die Function aber zwischen a und b endlich, so setze man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx, \text{ für } \lim \delta = 0.$$

Wächst das Integral rechter Hand mit unendlich abnehmendem δ unbegrenzt, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty,$$

nähert sich dasselbe aber mit unendlich abnehmendem δ einer endlichen Grenze, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ selbst endlich.

Wird $f(a)=\infty$, so ist analog

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx, \text{ für } \lim \varepsilon = 0.$$

17) Bleibt $f(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ endlich, ist aber $f(b)=\infty$, ferner $a<c<b$ und für $c<x<b$ der Absolutwerth von $(b-x)^n f(x) < k$, $n<1$, so ist $\int_a^b f(x)\,dx$ endlich.

Denn es ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Da nun das erste dieser Integrale jedenfalls endlich und

$$[(b-x)^n f(x)] < k$$

von $x=c$ bis $x=b$, so ist der Absolutwerth des zweiten Integrales

$$< \int_c^b \frac{k\,dx}{(b-x)^n} \text{ oder } < \frac{k\,(b-c)^{1-n}}{1-n}$$

al[illegible] n endlich.

[illegible]mit ist $\int_a^b f(x)\,dx$ selbst endlich.

Beispiele.

1) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ist endlich; denn man hat

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

also $$(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} < 1, \text{ da } 0 < x < 1.$$

2) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ ist endlich, da

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

also $$(1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-k^2x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}$$

18) Bleibt $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ endlich, ist aber $f(b) = \infty$, so ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \infty$, wenn für alle Werthe von x, für welche $c < x < b$, wo $a < c < b$ ist, $(b-x)^n f(x)$, $(n > 1)$, dasselbe Zeichen und absolut genommen einen Werth behält, der grösser k ist.

Denn setzt man

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$$

so ist das erste dieser beiden Integrale jedenfalls endlich und da

$$val\,abs \int\limits_c^b f(x)\,dx > val\,abs \int\limits_c^b \frac{k}{(b-x)^n}\,dx,$$

aber für $n > 1$:

$$\int\limits_c^x \frac{k}{(b-x)^n}\,dx = \frac{k}{n-1}\left[\frac{1}{(b-x)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}\right]$$

und für $n = 1$:

$$\int\limits_c^x \frac{k}{(b-x)^n}\,dx = kl\,\frac{b-c}{b-x},$$

also für $x = b$ in beiden Fällen $\int\limits_c^b \frac{k}{(b-x)^n}\,dx = \infty$ ist,

so ist auch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty.$$

Da

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

und

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^b f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx,$$

so können vorstehende Sätze auch in Anwendung gebracht werden, wenn die Function nur für die untere Grenze und wenn sie für beide Grenzwerthe unendlich wird.

19) Wird $f(x) = \infty$ für $x = c$, so setze man, wenn $a < c < b$ ist:

$$\int_a^b f(x)\,dx = lim \int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

wo $lim\ \delta = 0$ und $lim\ \varepsilon = 0$.

Beispiele.

1) Es sei n ein positiver echter nicht reducirbarer Bruch, dessen Zähler und Nenner ungerade, a und b positive Zahlen; man soll den Werth des Integrales $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^n}$ untersuchen.

Da für $x = 0$ die Function $\frac{1}{x^n} = \infty$ wird, so setze man

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x^n} = lim \int_{-a}^{-\delta} \frac{dx}{x^n} + lim \int_{\varepsilon}^{b} \frac{dx}{x^n}$$

für $lim\,\delta = lim\,\varepsilon = 0$.

Das entsprechende unbestimmte Integral ist aber $\frac{x^{1-n}}{1-n}$ und da n die F $\frac{+1}{+1}$ hat, wo a und b ganze Zahlen bedeuten, so ist

$$1 - n = 1 - \frac{2a+1}{2b+1} = \frac{2(b-a)}{2b+1}.$$

..bestimmte Integral bleibt daher immer reell und nimmt für $-x$ d ..n Werth an, wie für $+x$, man erhält daher:

$$\int_{-a}^{+b}\frac{dx}{x^n}=\lim\left\{\frac{\delta^{1-n}-a^{1-n}}{1-n}+\frac{b^{1-n}-\varepsilon^{1-n}}{1-n}\right\}=\frac{b^{1-n}-a^{1-n}}{1-n},$$

weil
$$\lim\left(\frac{\delta^{1-n}-\varepsilon^{1-n}}{1-n}\right)=0.$$

Ist $n>1$ und lässt man den übrigen Theil der Voraussetzung bestehen, so wird für $\lim\delta=\lim\varepsilon=0$: $\lim\frac{\delta^{1-n}-\varepsilon^{1-n}}{1-n}=\infty-\infty$, also unbestimmt. Das Integral hat daher in diesem Falle keinen bestimmten Werth.

Hat n die Form $\frac{2a}{2b+1}$, also $1-n$ die Form

$$1-\frac{2a}{2b+1}=\frac{2(b-a)+1}{2b+1},$$

so nimmt das unbestimmte Integral für $-x$ und $+x$ entgegengesetzte Werthe an und man erhält:

$$\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x^n}=\lim\left\{\frac{-\delta^{1-n}+a^{1-n}}{1-n}+\frac{b^{1-n}-\varepsilon^{1-n}}{1-n}\right\}.$$

Für $n<1$ erhält man daher:

$$\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x^n}=\frac{a^{1-n}+b^{1-n}}{1-n}.$$

Für $n>1$ dagegen:

$$\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x^n}=\infty.$$

2) Es sei das vorige Integral für $n=1$ oder $\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x}$ zu bestimmen, wo a und b positive Zahlen bedeuten.

Da für $x=0$ die Function unter dem Integralzeichen unendlich wird und das unbestimmte Integral $\int\frac{dx}{x}$, zwei verschiedene Formen $l(x)$ und $l(-x)$ annimmt, je nachdem man x positiv oder negativ wählt, so setze man:

$$\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x}=\lim\int_{-a}^{-\delta}\frac{dx}{x}+\lim\int_{\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x}.$$

In dem ersten dieser Integrale nehme man nun $l(-x)$, i[illegible] (x) als Werth des unbestimmten Integrales an. Man erhält alsd[illegible]

$$\int_{-a}^{b}\frac{dx}{x}=\lim(l\delta-la+lb-l\varepsilon)$$
$$=l\frac{b}{a}+\lim l\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Der Werth des Integrales hängt also von dem Verhältnisse ab, in welchem δ und ε sich der Null nähern.

Für $\delta = \varepsilon$ findet man hiernach als sogenannten Hauptwerth: $l\,\frac{b}{a}$.

20) Ist $a < c < d < e < b$ und werden $f(c)$, $f(d)$, $f(e)$ unendlich, so setze man:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim \int_{c+\varepsilon_2}^{d-\varepsilon_3} f(x)\,dx + \lim \int_{d+\varepsilon_4}^{e-\varepsilon_5} f(x)\,dx$$

$$+ \lim \int_{e+\varepsilon_6}^{b} f(x)\,dx.$$

Beispiele über bestimmte Integrale.

1) Da
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$
so folgt für ein positives $n+1$:
$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

2) Da $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x + C$, aber $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$ für $x = 1$ wird, so setze nach §. 112. 16:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\,[arc\sin(1-\delta) - arc\sin 0] = \frac{\pi}{2}.$$

3) Weil
$$\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,x + C,$$
so ist
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},\ \text{für } \lim x = \infty,$$
also
$$= \lim\,(arc\,tg\,x - arc\,tg\,0) = \frac{\pi}{2}.$$

4) Nach §. 85. b. Beisp. 4. (β) ist
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$

$\int_{}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ zu bestimmen, berücksichtige man, dass

∞ wird für $x = \pm a$ und dass $-\,arc\,tg\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ nicht

... innerhalb der Integrationsgrenzen, indem dieser Ausdruck alle

Werthe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft, wenn x von $-a$ bis 0 wächst, dagegen alle Werthe von $-\frac{\pi}{2}$ bis 0, wenn x von 0 bis $+a$ wächst und somit für $x = 0$ unstetig wird, da dessen Werth hier plötzlich von $+\frac{\pi}{2}$ auf $-\frac{\pi}{2}$ überspringt, also zweideutig ausfällt. Das fragliche Integral wird somit am sichersten dadurch ermittelt, dass man setzt:

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim \int_{-a+\varepsilon}^{+a-\delta} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \lim \int_{-a+\varepsilon}^{0-\delta_1} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \lim \int_{0+\varepsilon_1}^{a-\delta} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \lim \left[- arc\,tg \frac{\sqrt{a^2 - \delta_1^{\,2}}}{-\delta_1} + arc\,tg \frac{\sqrt{a^2 - (a-\varepsilon)^2}}{-(a-\varepsilon)} + arc\,tg \frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon_1^{\,2}}}{\varepsilon_1} - arc\,tg \frac{\sqrt{a^2 - (a-\delta)^2}}{a-\delta} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Anmerk. Setzt man nach §. 84. Beisp. 34.:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\,sin \frac{x}{a} + C,$$

so folgt unmittelbar

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arc\,sin\, 1 - arc\,sin\,(-1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

4a) $\int \frac{dx}{1 + x^2} = arc\,tg\, x$, also

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{1 + x^2} = arc\,tg\, a + arc\,tg\, a = 2\, arc\,tg\, a$$

Anmerk. Hätte man $\int \frac{dx}{1 + x^2} = -\, arc\,tg \frac{1}{x}$ gesetzt, so würde man ein falsches Resultat $-2\, arc\,tg \frac{1}{a}$ gefunden haben, was seinen Grund darin hat, dass $-\, arc\,tg \frac{1}{x}$ für $x = 0$ zweideutig wird.

5) Nach §. 83. 2. ist $\int e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a} + C$, folglich

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \text{ (wenn } a > 0).$$

6) Nach §. 84. Aufg. 30 ist

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Um nun $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ zu bestimmen, berücksichtige man, dass für

$$x = a\,,\ \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \infty$$

wird und setze darum:

$$\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = lim \int_0^{a-\delta} \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = lim\left[-\sqrt{a^2-(a-\delta)^2} + \sqrt{a^2 - 0^2}\right] = a.$$

7) Nach §. 83. 2. ist

$$\int \frac{a^{lx}\,dx}{x} = \frac{a^{lx}}{la} + C$$

und man hat daher:

$$\int_1^e \frac{a^{lx}\,dx}{x} = \frac{a}{la} - \frac{1}{la} = \frac{a-1}{la}$$

8) Es sei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}x\,dx$ zu bestimmen.

Nach §. 104. 5. (14). ist

$$\int sin^{2n}x\,dx = -\frac{sin^{2n-1}x\,cos\,x}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int sin^{2n-2}x\,dx$$

und man erhält somit, wenn $2n > 1$ ist,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n}x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n-2}x\,dx$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2(n-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n-4}x\,dx$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{2n-5}{2(n-2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n-6}x\,dx$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{2n-5}{2(n-2)}\cdots\frac{2n-(2m+1)}{2(n-m)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{2n-2m-2}x\,dx.$$

$2m + 2 = 2n\,,\ m = n - 1$ folgt hieraus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdots \frac{1}{2\,.\,1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3\,.\,1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

9) Es sei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx$ zu bestimmen.

Nach Obigem ist:

$$\int \sin^{2n+1} x\, dx = -\frac{\sin^{2n} x \cos x}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} \int \sin^{2n-1} x\, dx$$

folglich, wenn n positiv ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2n}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\, dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-3} x\, dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-5} x\, dx$$

$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdot \frac{2(n-2)}{2n-3} \cdots \frac{2(n-m)}{2n-(2m-1)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2m-1} x\, dx.$$

Für $2m+1 = 2n-1$ folgt hieraus:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$$

$$= \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 4\,.\,2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 5\,.\,3}.$$

10) Es soll $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^m x\, dx$ bestimmt werden.

Nach §. 104. 19 (36) ist

$$\int e^{-ax} \sin^m x\, dx = -\frac{e^{-ax} \sin^{m-1} x}{a^2+m^2} (a \sin x + m \cos x)$$

$$+ \frac{m(m-1)}{a^2+m^2} \int e^{-ax} \sin^{m-2} x\, dx,$$

und weil nun bei einem positiven a für $x = \infty$, $e^{-ax} = \frac{1}{\infty} = 0$, aber $\sin^{m-1}x\,(a \sin x + m \cos x)$ nicht ∞, dagegen für $x = 0$ auch $\sin^{m-1}x = 0$ wird, so erhält man für $m > 1$:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^m x\,dx = \frac{m(m-1)}{a^2+m^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{m-2}x\,dx.$$

Ist m gerade und $= 2n$, so folgt hieraus:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2n}x\,dx = \frac{2n(2n-1)}{a^2+(2n)^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2n-2}x\,dx$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{a^2+(2n)^2}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{a^2+(2n-2)^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2n-4}x\,dx$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{a^2+(2n)^2}\cdot\frac{(2n-2)(2n-3)}{a^2+(2n-2)^2}\cdot\frac{(2n-4)(2n-5)}{a^2+(2n-4)^2}\cdots$$

$$\frac{(2n-2r)(2n-2r-1)}{a^2+(2n-2r)^2}\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2n-2(r+1)}x\,dx.$$

und für $2n - 2(r+1) = 0$ oder $r = n - 1$ hiernach:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2n}x\,dx = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots 2\,.\,1}{[a^2+(2n)^2][a^2+(2n-2)^2]\ldots[a^2+4]}\int_0^\infty e^{-ax}dx$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots 2\,.\,1}{[a^2+(2n)^2][a^2+(2n-2)^2]\ldots[a^2+4]}\cdot\frac{1}{a}.$$

Ist m ungerade und $= 2m + 1$, so findet man auf analoge Weise:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2n+1}x\,dx = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots 3\,.\,2}{[a^2+(2n+1)^2][a^2+(2n-1)^2]\ldots[a^2+3^2]}\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx$$

oder, da nach §. 104. 18. (33a:)

$$\int e^{-ax}\sin x\,dx = -\frac{e^{-ax}(a \sin x + \cos x)}{a^2+1} + C,$$

also
$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin x\,dx = \frac{1}{a^2+1} \text{ ist,}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2n+1}x\,dx = \frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)\ldots 3\,.\,2}{[a^2+(2n+1)^2][a^2+(2n-1)^2]\ldots[a^2+3^2]}\cdot\frac{1}{a^2+1}.$$

Nach §. 100. Beisp. 5 ist

$$\int x^n e^{-x}dx = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$$

u[illegible] [illegible]ei $n > 0$ sowohl für $x = \infty$ als auch für $x = 0$, $x^n e^{-x} = 0$ w[illegible] [illegible]erhält man:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= n (n-1) \int_0^\infty x^{n-2} e^{-x} dx$$

$$= n (n-1) (n-2) \ldots (n-m) \int_0^\infty x^{n-(m+1)} e^{-x} dx$$

oder für $m = n - 1$:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n (n-1) (n-2) \ldots 3 . 2 . 1 \int_0^\infty e^{-x} dx$$

$$= n (n-1) (n-2) \ldots 3 . 2 . 1 = n!$$

12) Nach §. 97. 8. (7) ist

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

folglich wird

$$\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m} \int_0^1 \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Man hat daher für ein gerades $m = 2n$:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n-1}{2n} \int_0^1 \frac{x^{2n-2} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^1 \frac{x^{2n-4} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{2n-(2r-1)}{2n-(2r-2)} \int_0^1 \frac{x^{2n-2r} dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder wenn man $2n - 2r = 0$, $r = n$ setzt:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \ldots 5 . 3 . 1}{2n (2n-2)(2n-4) \ldots 6 . 4 . 2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder da nach 2) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$, auch:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5) \ldots 5 . 3 . 1}{2n (2n-2)(2n-4) \ldots 6 . 4 . 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Für ein ungerades $m = 2n + 1$ ergibt sich:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n}{2n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{2n-(2r-2)}{2n-(2r-3)}\int_0^1 \frac{x^{2n-(2r-1)}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder für $2n = 2r$, $r = n$:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n\,(2n-2)\,(2n-4)\ldots 4\,.\,2}{(2n+1)\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 3\,.\,1}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

oder da nach 6) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$ ist, auch

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n\,(2n-2)\,(2n-4)\ldots 4\,.\,2}{(2n+1)\,(2n-1)\,(2n-3)\ldots 3\,.\,1}.$$

13) Um $\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{b^2-x^2}}$, für $a > b > 0$ zu bestimmen, setze man:

$$x = b\cos\varphi\,;\ \sqrt{b^2-x^2} = \sqrt{b^2(1-\cos^2\varphi)} = b\sin\varphi$$

also

$$\frac{dx}{d\varphi} = -b\sin\varphi$$

Da nun für $x = -b$, $\cos\varphi = -1$, also $\varphi = \pi$ und für $x = +b$, $\cos\varphi = 1$, also $\varphi = 0$ wird, so geht $\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{(a^2-x^2)\sqrt{b^2-x^2}}$ über in:

$$\int_\pi^0 \frac{-b\sin\varphi\,d\varphi}{(a^2-b^2\cos^2\varphi)\,b\sin\varphi} = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{a^2-b^2\cos^2\varphi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2-b^2\cos^2\varphi}.$$

Es ist aber

$$\int \frac{d\varphi}{a^2-b^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+b\cos\varphi} + \frac{1}{a-b\cos\varphi}\right)d\varphi$$

od[illegible] §. 104. 13, 27:

$$\int\frac{d\varphi}{a^2-b^2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2a}\left[\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,arc\,tg\left(tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,arc\,tg\left(tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}}\left[arc\,tg\left(tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right) + arc\,tg\left(tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)\right]$$

oder nach E. T. §. 18:

$$\int \frac{d\varphi}{a^2 - b^2 \cos^2\varphi} = \frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}} \, arc\, tg \, \frac{tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}{1 - tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot tg\frac{\varphi}{2}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}}$$

oder da
$$\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{1 - tg^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2}\, tg\,\varphi,$$

$$2\int \frac{d\varphi}{a^2 - b^2\cos^2\varphi} = \frac{2}{a\sqrt{a^2-b^2}} \, arc\,tg \left(\frac{1}{2}\, tg\,\varphi \, \frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^{*)}$$
$$= \frac{2}{a\sqrt{a^2-b^2}} \, arc\,tg \, \frac{a\, tg\,\varphi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

und daher:

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 - b^2\cos^2\varphi} = \frac{2}{a\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2-b^2}}.$$

§. 113. Aufgaben zur Uebung.

1) $\int_1^2 x^3\, dx = ?$ Aufl. $3\frac{3}{4}$.

2) $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = ?$ Aufl. $\frac{2}{3}$.

3) $\int_1^e \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = ?$ Aufl. $\frac{e^3 - 4}{3}$.

4) $\int_1^e \frac{lx}{x}\, dx = ?$ Aufl. $\frac{1}{2}$.

Andeut. Vergl. §. 84. Aufg. 15.

5) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - l^2x}} = ?$ Aufl. $\frac{\pi}{2}$.

Andeut. Vergl. §. 84. Aufg. 25.

---

*) Denn
$$\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$$
$$= \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}\right)\sqrt{a^2-b^2} = \frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

6) $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = ?$ Aufl. a.

Andeut. Vergl. §. 84. Aufg. 30.

7) $\int_0^1 arc\sin x\,dx = ?$ Aufl. $\frac{\pi}{2} - 1$.

Andeut. Vergl. §. 106. 2.

8) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = ?$ Aufl. $\frac{\pi}{2}$.

Andeut. Vergl. §. 97. 10. (16).

9) $\int_a^a \frac{dx}{x\sqrt{2ax - x^2}} = ?$ Aufl. $\frac{1}{a}$.

Andeut. Vergl. §. 97. 10. (15).

10) $\int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\,dx = ?$ Aufl. $\frac{\pi a^2}{4}$.

Andeut. Vergl. §. 97. 11. (17).

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x\,dx = ?$ Aufl. $e - 1$.

Andeut. Vergl. §. 83. 2. α.

11a) $\int_0^1 x^m lx\,dx = ?$ (m positiv).

Aufl. $\frac{1}{(m+1)^2}$.

Andeut. Setzt man in §. 85. a. 1.

$$u = lx\;;\; \frac{dv}{dx} = x^m$$

also

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\;;\; v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

so folgt:

$$\int x^m lx\,dx = \frac{x^{m+1}lx}{m+1} - \int \frac{x^m}{m+1}\,dx = \frac{x^{m+1}lx}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}.$$

ist nun vorerst zu bestimmen, was aus diesem unbestimmten Integrale für
x ird. Da der erste Theil für $x = 0$ unter der unbestimmten Form $0 \,.\, \infty$
er so setzen wir $x^{m+1}\,lx = \frac{lx}{x^{-(m+1)}}$ und erhalten dann als wahren Werth:

$$\frac{\frac{1}{x}}{-(m+1)\,x^{-(m+2)}} = \frac{-1}{(m+1)\,x^{-(m+1)}} = \frac{-x^{m+1}}{m+1}$$

de in Null übergeht u. s. w.

12) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = ?$ **Aufl.** $\frac{\pi}{4}$.

Andeut. Setze $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x.$

13) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx = ?$

$$\textbf{Aufl.} \quad \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Andeut. Vergl. §. 104. 5. (16) und obiges Beisp. 8.

14) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx = ?$

$$\textbf{Aufl.} \quad \frac{2n(2n-2)(2n-4)\ldots 6 \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)\ldots 5 \cdot 3 \cdot 1}.$$

15) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax} \cos^{2n} x \, dx = ?$

$$\textbf{Aufl.} \quad \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots 2 \cdot 1}{[a^2+(2n)^2][a^2+(2n-2)^2][a^2+(2n-4)^2]\ldots(a^2+2^2)} \cdot \frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a}.$$

Andeut. Nach §. 104. 20 (37) ist

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax} \cos^{2n} x \, dx = \frac{2n(2n-1)}{a^2+(2n)^2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax} \cos^{2n-2} x \, dx$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel gelangt man zu dem Integrale

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a}.$$

16) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax} \cos^{2n+1} x \, dx = ?$

$$\textbf{Aufl.} \quad -\frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}{[a^2+(2n+1)^2][a^2+(2n-1)^2]\ldots(a^2+3^{[illegible]}} \quad [illegible] \frac{[illegible]^{-\frac{a\pi}{2}}}{[illegible]+1}$$

Andeut. Verfährt man analog wie vorhin, so gelangt man s [illegible] zu

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax} \cos x \, dx$, wofür man nach §. 104 (38) $-\frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a^2+1}$ erhält.

17) $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = ?$ Aufl. $\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Andeut. Nach §. 104. 18. (33a) ist

$$\int e^{-ax} \sin bx \, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx + b \cos bx).$$

18) $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = ?$ Aufl. $\frac{a}{a^2 + b^2}$.

Andeut. Nach §. 104. 18. (33) ist

$$\int e^{-ax} \cos bx \, dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx - b \sin bx).$$

19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a + b \cos x} = ?$ α) für $a = b > 0$; β) für $a > b > 0$;

γ) für $b > a > 0$.

Aufl. α) $\frac{1}{a}$; β) $\frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$;

γ) $\frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \, l \, \frac{\sqrt{b + a} + \sqrt{b - a}}{\sqrt{2a}}$.

Andeut. α) Nach §. 104. 13 (26). β) Nach §. 104. 13 (27). γ) Nach §. 104. 13 (28).

Siebenzehnter Abschnitt.

Differentialquotienten bestimmter Integrale.

§. 114. Entwickelung des Verfahrens.

1) Da der Werth des bestimmten Integrales $\int_a^b f(x)\,dx$ nicht mehr von x, sondern nur von den Grenzen a und b, der Natur der Function f und von den darin vorkommenden Constanten abhängt, so kann man jedes bestimmte Integral, wie irgend eine andere Function, der Operation des Differenzirens unterwerfen.

2) Wir wollen nun zuerst den Differentialquotienten nach der oberen Grenze b bestimmen, unter der Voraussetzung, dass a und $f(x)$ von b unabhängig seien. Bezeichnet zu diesem Ende b_1 einen dem b unendlich nahen Werth, so handelt es sich also um die Bestimmung der Grenze

$$lim \frac{\int_a^{b_1} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx}{b_1 - b}$$

oder da

$$\int_a^{b_1} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^{b_1} f(x)\,dx$$

um die Bestimmung von

$$lim \frac{\int_b^{b_1} f(x)dx}{b_1 - b}$$

Ist nun $f(x)$ stetig von b bis b_1, so wird

$$\int_b^{b_1} f(x)\,dx = (b_1 - b)\,f[b + \Theta(b_1 - b)]$$

und somit der Grenzwerth

$= \lim f[b + \Theta(b_1 - b)]$ oder $f(b)$ für $\lim(b_1 - b) = 0$.

Es ist daher:

$$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{db} = f(b)$$

Dieses Resultat stimmt mit dem früheren Satze überein, dass der Differentialquotient einer Fläche die letzte Ordinate sei.

3) Um auch den Differentialquotienten des bestimmten Integrales nach der unteren Grenze zu bestimmen, setze man

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx,$$

also

$$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{da} = -\frac{d\int_b^a f(x)\,dx}{da}$$

oder nach (2):

$$\frac{d\int_a^b f(x)\,dx}{da} = -f(a).$$

4) Bezeichnet α eine in $f(x)$ vorkommende Constante und ist

$$\int f(x, \alpha)\,dx = F(x, \alpha) + C,$$

so hat man

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = f(x, \alpha).$$

…n wir nun hierin α als eine Veränderliche an und bilden b… die Differentialquotienten in Bezug auf α, so wird *)

$$\frac{\partial \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha}}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$$

*) …iche §. 41.

woraus durch Integration nach x folgt:

$$\int \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha} + C.$$

Da wir vorhin die Ordnung der Differentiation umgekehrt haben, so setzt diese Gleichung voraus, dass die Differentialquotienten von f nach x und α stetig seien. Ist auch noch $\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ stetig, so erhält man:

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial \alpha}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \alpha}[F(b, \alpha) - F(a, \alpha)],$$

sobald a und b von α unabhängig sind.

Ist aber $F(x, \alpha)$ stetig, so wird

$$\int_a^b f(x, \alpha)\, dx = F(b, \alpha) - F(a, \alpha)$$

und somit

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx = \frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\, dx.$$

5) Um noch den allgemeinsten Fall zu betrachten, wollen wir den Differentialquotienten von $\int_a^b f(x, \alpha)\, dx$ aufsuchen, wenn a und b ebenfalls von α abhängen. Bezeichnen wir das betreffende Integral durch J, so ist nach §. 32.

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\partial J}{\partial a}\frac{da}{d\alpha} + \frac{\partial J}{\partial b}\frac{db}{d\alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha}$$

oder da

$$\frac{\partial J}{\partial a} = -f(a, \alpha)$$

$$\frac{\partial J}{\partial b} = f(b, \alpha)$$

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx,$$

auch:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = -f(a, \alpha)\frac{da}{d\alpha} + f(b, \alpha)\frac{db}{d\alpha} + \int_a^b \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} \ldots$$

Kennzeichnet man nun die Differentiationen nach α durch angehängte Striche, so ist

$$[bf(b, \alpha) - af(a, \alpha)]' = b'f(b, \alpha) + bf'(b, \alpha)$$
$$- a'f(a, \alpha) - af'(a, \alpha)$$
$$= - a'f(a, \alpha) + b'f(b, \alpha) - af'(a, \alpha) + bf'(b, \alpha)$$

und man kann daher auch schreiben:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = [bf(b, \alpha) - af(a, \alpha)]' - [- af'(a, \alpha) + bf'(b, \alpha)]$$
$$+ \int_a^b f'(x, \alpha)\, dx.$$

Nimmt man nun nochmals den Differentialquotienten nach α, so folgt hieraus:

$$\frac{d^2J}{d\alpha^2} = [bf(b, \alpha) - af(a, \alpha)]'' - [- af''(a, \alpha) + bf''(b, \alpha)]$$
$$+ \int_a^b f''(x, \alpha)\, dx,$$

weil $\left(\int_a^b f'(x, \alpha)\, dx\right)' = - a'f'(a\alpha) + b'f'(b, \alpha) + \int_a^b f''(x, \alpha)\, dx.$

Allgemein wird man daher erhalten:

$$J^{(n)} = \int_a^b f^{(n)}(x, \alpha)\, dx + [bf(b, \alpha) - af(a, \alpha)]^{(n)}$$
$$- [bf^{(n)}(b, \alpha) - af^{(n)}(a, \alpha)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wie sich leicht durch den Schluss von n auf $n + 1$ beweisen lässt. Durch nochmalige Differentiation nach α folgt nämlich:

$$J^{(n+1)} = \int_a^b f^{(n+1)}(x, \alpha)\, dx + f^{(n)}(b, \alpha)\, b' - f^{(n)}(a, \alpha)\, a'$$
$$+ [bf(b, \alpha) - af(a, \alpha)]^{(n+1)}$$
$$- [b'f^{(n)}(b, \alpha) + bf^{(n+1)}(b, \alpha) - a'f^{(n)}(a, \alpha) - af^{(n+1)}(a, \alpha)]$$
$$= \int_a^b f^{(n+1)}(x, \alpha)\, dx + [bf(b, \alpha) - af(a, \alpha)]^{(n+1)}$$
$$- [bf^{(n+1)}(b, \alpha) - af^{(n+1)}(a, \alpha)],$$

. Formel auch aus (1) hervorgeht, wenn man daselbst $(n + 1)$. setzt.

§. 115. Entwickelung neuer Integrale aus bekannten.

Das in §. 114 Vorgetragene gibt uns ein Mittel an die Hand, gewisse Integrale aus anderen bereits ermittelten Integralen zu bestimmen. Zur Erläuterung dienen nachstehende

Beispiele.

1) Da
$$\int \sin \alpha x \, dx = -\frac{\cos \alpha x}{\alpha} + C \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
so folgt, wenn man nach α differenzirt,
$$\int x \cos \alpha x \, dx = \frac{\alpha x \sin \alpha x + \cos \alpha x}{\alpha^2}$$
$$= \frac{x \sin \alpha x}{\alpha} + \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2} + C \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Allgemein findet man, wenn man beiderseits der Gleichung (1) den $n$ten Differentialquotienten bildet und berücksichtigt, dass auf analoge Weise wie in §. 36 Beisp. 4
$$\frac{d^n \sin \alpha x}{d\alpha^n} = x^n \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right)$$
resultirt,
$$\int x^n \sin\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right) dx = -\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{\cos \alpha x}{\alpha}\right) + C.$$

2) Aus
$$\int \cos \alpha x \, dx = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} + C$$
erhält man auf ganz analoge Weise:
$$\int x^n \cos\left(\alpha x + \frac{n\pi}{2}\right) dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\right) + C.$$

3) Differenzirt man die Gleichung
$$\int \frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b}\, l\,(a + bx) + C$$
beiderseits nach b, so folgt:
$$\int \frac{x}{(a + bx)^2}\, dx = \frac{l\,(a + bx)}{b^2} - \frac{x}{b\,(a + bx)}.$$

Da ferner
$$\frac{d\,(a + bx)^{-1}}{db} = -x\,(a + bx)^{-2}$$
$$\frac{d^2\,(a + bx)^{-1}}{db^2} = -1 \,.\, -2x^2\,(a + bx)^{-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^n\,(a + bx)^{-1}}{db^n} = -1 \,.\, -2 \,.\,.\, -nx^n\,(a + b$$
$$= (-1)^n \,.\, n!\, \frac{x^n}{(a + bx)^{n+1}},$$

so erhält man allgemein:

$$\int \frac{x^n}{(a+bx)^{n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial b^n}\left[\frac{1}{b}\; l\,(a+bx)\right] + C,$$

wo die rechte Seite leicht entwickelt werden kann.

4) Es ist bekanntlich

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\; arc\,tg\, \frac{x}{a} + C.$$

Differenzirt man nun nach a, so folgt:

$$-\int \frac{2a\,dx}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{1}{a}\cdot\frac{x}{a^2+x^2} - \frac{1}{a^2}\, arc\,tg\,\frac{x}{a}$$

oder
$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\, arc\,tg\,\frac{x}{a} + C.$$

5) Sind a und b positiv, so findet man

$$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\; arc\,tg\left(tg\,x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^{*)}$$

Daher wird
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$$

Differenzirt man diese Gleichung n mal nach a und bemerkt, dass

$$[(a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{-1}]^{(n)} = -1\,.-2\,.-3\ldots -n(a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{-n-1}(\sin^2 x)^n$$
$$= (-1)^n\,.\,n!\,(a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{-n-1}\sin^{2n} x$$

und
$$(a^{-\frac{1}{2}})^{(n)} = (-1)^n\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots 2n-1}{2^n}\,a^{-\frac{1}{2}-n}$$

so folgt:

$$(-1)^n n! \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{(a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{n+1}}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\,.\,(-1)^n\,.\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n a^n}$$

oder
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x}{(a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{n+1}}\,dx = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots 2n-1}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n\,.\,a^n}$$

Differenzirt man nun diese Gleichung m mal nach b und bemerkt, dass

$$[(a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{-(n+1)}]^{(m)} = (-1)^m (n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m).$$
$$(a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{-(n+m+1)}\cos^{2m} x$$

und
$$(b^{-\frac{1}{2}})^{(m)} = (-1)^m\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots 2m-1}{2^m}\,b^{-\frac{1}{2}-m}$$

al
$$\cdot 1)^m (n+1)(n+2)\ldots(n+m)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} x\cos^{2m} x}{(a\sin^2 x + b\cos^2 x)^{n+m+1}}\,dx$$

$$1)^m\,\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}\;\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2^n\,.\,n!\,a^n}\;\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2m-1)}{2^m\,.\,b^m}$$

ⁿn dividire Zähler und Nenner durch $\cos^2 x$ und setze $tg\,x = y$.

ist, so folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^{2n} x\, cos^{2m} x}{(a\, sin^2 x + b\, cos^2 x)^{n+m+1}}\, dx$$

$$= \frac{1}{(n+1)\,(n+2)\ldots(n+m)} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \cdot \frac{1.3.5\ldots(2n-1).1.3.5\ldots(2m-1)}{2^{m+n}\, n!\, a^n b^m}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{ab}} \frac{1.3.5\ldots(2n-1).1.3.5\ldots(2m-1}{2^{m+n}\,(n+m)!\, a^n b^m}.$$

Achtzehnter Abschnitt.

Reihen von Bürmann und Lagrange.

§. 116. Die Bürmann'sche Reihe.

Ist die Function $f(x)$, so wie auch deren Differentialquotient $f'(x)$ stetig innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = x$, so hat man:

$$\int_a^x f'(x)\, dx = f(x) - f(a)$$

für welches Integral man auch, wenn $\varphi(x)$ eine andere stetige Function von x bedeutet, schreiben kann:

$$\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(a)]' \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\, dx,$$

wenn man durch die rechts oben beigefügten Striche nach §. 7 die betreffenden Differentialquotienten nach x bezeichnet.

Setzt man nun in §. 85 a:

$$u = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\,;\; v = \varphi(x) - \varphi(a),$$

so wird

$$\int^x [\varphi(x) - \varphi(a)]' \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\, dx = [\varphi(x) - \varphi(a)] \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

$$- \int_a^x [\varphi(x) - \varphi(a)] \left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)' dx$$

$$x) - \varphi(a)] \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} - \frac{1}{1\,.\,2}\int \Big\{ [\varphi(x) - \varphi(a)]^2 \Big\}' \frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)},$$

oder wenn man in diesem Integrale wieder

$$u = \frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}\ ; \ v = [\varphi(x) - \varphi(a)]^2$$

setzt,

$$= [\varphi(x) - \varphi(a)]\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} - \frac{1}{1\,.\,2}[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 \frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(a)]^2 \left[\frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}\right]' dx$$

$$= [\varphi(x) - \varphi(a)]\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} - \frac{1}{1\,.\,2}[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 \frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\int_a^x \Big\{[\varphi(x) - \varphi(a)]^3\Big\}' \frac{\left[\frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}\right]'}{\varphi'(x)} dx$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = f_1\ ; \ \frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)} = \frac{f_1'}{\varphi'(x)} = f_2\ ; \ \frac{\left[\frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}\right]'}{\varphi'(x)} = \frac{f_2'}{\varphi'(x)} = f_3$$

u. s. w. setzen,

$$= [\varphi(x) - \varphi(a)]f_1 - \frac{[\varphi(x) - \varphi(a)]^2}{1\,.\,2} f_2$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\int_a^x \Big\{[\varphi(x) - \varphi(a)]^3\Big\}' f_3\, dx.$$

Allgemein wird hiernach sein:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x [\varphi(x) - \varphi(a)]' \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} dx = [\varphi(x) - \varphi(a)] f_1$$

$$- \frac{1}{1\,.\,2}[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 f_2 + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 f_3 -$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{(n-1)!}[\varphi(x) - \varphi(a)]^{n-1} f_{n-1}$$

$$+ (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\int_a^x \Big\{[\varphi(x) - \varphi(a)]^n\Big\}' f_n\, dx$$

oder wenn man die Zeichen ändert:

$$f(a) - f(x) = [\varphi(a) - \varphi(x)] f_1 + \frac{1}{1 \cdot 2} [\varphi(a) - \varphi(x)]^2 f_2$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} [\varphi(a) - \varphi(x)]^3 f_3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} [\varphi(a) - \varphi(x)]^{n-1} f_{n-1}$$
$$+ \frac{1}{n!} \int_a^x \left\{ [\varphi(a) - \varphi(x)]^n \right\}' f_n \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dem letzten Gliede dieser Reihe können wir aber eine andere Form geben, indem wir setzen:

$$\frac{1}{n!} \int_a^x \left\{ [\varphi(a) - \varphi(x)]^n \right\}' f_n dx = - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x [\varphi(a) - \varphi(x)]^{n-1} \varphi'(x) f_n dx$$

oder da

$$f_1 \varphi'(x) = f'(x) \; ; f_2 \varphi'(x) = \left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right)' = f_1' \, , f_3 \varphi'(x) = f'_2 \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{1}{n!} \int_a^x \left\{ [\varphi(a) - \varphi(x)] \right\}' f_n dx = - \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x [\varphi(a) - \varphi(z)]^{n-1} f'_{n-1} dz,$$

worin man den Integrationsbuchstaben x mit dem z vertauscht hat, was offenbar geschehen darf, wenn man nur berücksichtigt, dass in f'_{n-1} auch z statt x gesetzt werden muss.

Hiernach geht obige Reihe (1), wenn man noch x mit a vertauscht und die Werthe, welche $f_1, f_2, f_3 \dots$ für $x = a$ annehmen, der Reihe nach durch $A_1, A_2, A_3, \dots$ bezeichnet*), über in:

$$f(x) - f(a) = [\varphi(x) - \varphi(a)] A_1 + \frac{1}{1 \cdot 2} [\varphi(x) - \varphi(a)]^2 A_2$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} [\varphi(x) - \varphi(a)]^3 A_3 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} [\varphi(x) - \varphi(a)]^{n-1} A_{n-1}$$
$$- \frac{1}{(n-1)!} \int_x^a [\varphi(x) - \varphi(z)]^{n-1} f'_{n-1} \, dz$$

---

*) Es is also

$$A_1 = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right]_{x=a}$$

$$A_2 = \frac{\left(\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} \right)'}{\varphi'(a)} = \left[\frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right)'}{\varphi'(x)} \right]_{x=a}$$

$$A_3 = \frac{\left[\frac{\left(\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} \right)'}{\varphi'(a)} \right]'}{\varphi'(a)} = \left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right)'}{\varphi'(x)} \right)'}{\varphi'(x)} \right]_{x=a}$$

oder wenn man ein Glied weiter geht, und im Restintegrale die Grenzen vertauscht,

$$f(x) - f(a) = [\varphi(x) - \varphi(a)]\, A_1 + \frac{1}{1\,.\,2}\,[\varphi(x) - \varphi(a)]^2 A_2$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,[\varphi(x) - \varphi(a)]^3 A_3 + \ldots + \frac{1}{n!}\,[\varphi(x) - \varphi(a)]^n A_n$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(z)]^n f'_n\, dz \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Ist $\varphi(a) = 0$, so nimmt diese Gleichung die einfachere Form an:

$$f(x) = f(a) + A_1 \varphi(x) + \frac{A_2}{1\,.\,2}\,[\varphi(x)]^2$$
$$+ \frac{A_3}{1\,.\,2\,.\,3}\,[\varphi(x)]^3 + \ldots + \frac{A_n}{n!}\,[\varphi(x)]^n$$
$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x [\varphi(x) - \varphi(z)]^n f_n'\, dz \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

und liefert somit die Entwickelung einer Function $f(x)$ nach Potenzen von $\varphi(x)$.

Anmerk. Obige Reihe (2) wurde zuerst von Bürmann aufgestellt und heisst nach ihm die Bürmann'sche Reihe.

Beispiele.

1) Setzt man in der Gleich. (2):

$$f(x) = \cos x\,;\ a = 0\,;\ \varphi(x) = x^2;$$

also

$$f'(x) = -\sin x\,;\ \varphi'(x) = 2x$$

$$A_1 = \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} = \left[-\frac{\sin x}{2x}\right]_{x=0} = -\frac{1}{2}\ {}^{*)}$$

$$A_2 = \left[\frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} = -\left[\frac{\left(\frac{\sin x}{2x}\right)'}{2x}\right]_{x=0} = -\frac{1}{4}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right)_{x=0} = \frac{1}{12}\,.$$

$$A_3 = \left[\frac{\left(\frac{\left(\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}\right)'}{\varphi'(x)}\right]_{x=a} = -\left[\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right)'}{2x}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{x^2 \sin x + 3x\cos x - 3\sin x}{x^5}\right]_{x=0} = -\frac{1}{120} \text{ u. s.}$$

so folgt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \ldots$$

*) Vergl. §. 54 wegen des Werthes $\frac{0}{0}$.

2) Setzt man in (2)

$$f(x) = x\ ;\ a = 1\ ;\ \varphi(x) = lx,$$

also

$$f'(x) = 1\ ;\ \varphi'(x) = \frac{1}{x}\ ;\ A_1 = 1\ ;\ A_2 = 1\ ;\ A_3 = 1;\ \ldots$$

so folgt:

$$x = 1 + lx + \frac{l^2x}{1\,.\,2} + \frac{l^3x}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{l^4x}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots$$

3) Für $f(x) = x\ ;\ a = 0\ ;\ \varphi(x) = arc\,tg\,x;$

also

$$f'(x) = 1\ ;\ \varphi'(x) = \frac{1}{1 + x^2};$$

$$A_1 = (1 + x^2)_{x=0} = 1\ ;\ A_2 = 0\ ;\ A_3 = 2;\ \ldots$$

erhält man aus (2):

$$x = arc\,tg\,x - \frac{(arc\,tg\,x)^3}{3} + \frac{(arc\,tg\,x)^5}{5} - \ldots$$

Zusätze.

1) Aus der Bürmann'schen Reihe lässt sich leicht die in §. 50 hergeleitete Taylor'sche Reihe entwickeln.

Setzt man nämlich in der Gleichung (2)

$$\varphi(x) = x,$$

also

$$\varphi'(x) = 1\ ;\ f_1 = f'(x)\ ;\ f_2 = f''(x)\ ;\ \ldots f_n = f^{(n)}(x)$$

und somit $A_1 = f'(a)\ ;\ A_2 = f''(a)\ ;\ \ldots\ A_n = f^{(n)}(a)$,

so wird

$$f(x) - f(a) = (x - a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1\,.\,2\,.\,3} f'''(a)$$

$$+ \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x - z)^n f^{(n+1)}(z)\,dz.$$

Da aber $(x - z)^n$ innerhalb der Grenzen $z = a$ bis $z = x$ sein Zeichen nicht ändert*), so ist nach §. 112. 12, wenn man

$$\varphi(x) = f^{(n+1)}(z)\ ;\ f(x) = (x - z)^n$$

setzt,

$$\int_a^x (x - z)^n f^{(n+1)}(z)\,dz = f^{(n+1)}[a + \Theta(x - a)]\int_a^x (x - z)^n\,dz$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} f^{(n+1)}[a + \Theta(x - a)],$$

*) Für $x > a$ ist $(x - z)^n$ von $z = a$ bis $z = x$ positiv, für $x < a$ aber negativ.

wo $0 < \theta < 1$, und man hat daher:

$$f(x) - f(a) = (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots$$
$$+ \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]$$

oder wenn man $x - a = h$ setzt und darnach x mit a vertauscht,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[x + \theta h],$$

worin wir die bekannte Taylor'sche Reihe erkennen.

2) Die in §. 112. 8. (8) gefundene Gleichung

$$\int_a^x \varphi(z)\, dz = (x-a)\, \varphi[a + \theta(x-a)]$$

können wir benützen, um dem Restgliede der Taylor'schen Reihe eine andere Form zu geben.

Wenden wir nämlich diesen Satz auf das Rest-Integral

$$\frac{1}{n!} \int_a^x (x-z)^n f^{n+1}(z)\, dz$$

an und setzen

$$\varphi(z) = (x-z)^n f^{n+1}(z)$$

also

$$\varphi(a + \theta(x-a)) = [x - a - \theta(x-a)]^n f^{n+1}(a + \theta(x-a))$$
$$= (x-a)^n (1-\theta)^n f^{n+1}[a + \theta(x-a)],$$

so finden wir dafür:

$$\frac{(x-a)^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n f^{n+1}(a + \theta(x-a))$$

und erhalten nun:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^n(x) + \frac{h^{n+1}}{n!} (1-\theta)^n f^{n+1}(x + \theta h).$$

§. 117. Andere Form der Bürmann'schen Reihe.

Die Taylor'sche Reihe gibt uns ein Mittel an die Hand den ficienten $A_1, A_2, A_3, \dots$ der Bürmann'schen Reihe eine für ma Untersuchungen zweckdienlichere Form zu geben.

Nach §. 116 ist

$$A_1 = \left\{ \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right\}_{x=a}$$

$$A_2 = \left\{ \frac{A_1'}{\varphi'(x)} \right\}_{x=a} = \left\{ f''(x)\,[\varphi'(x)]^{-2} - f'(x)\,\varphi''(x)\,[\varphi'(x)]^{-3} \right\}_{x=a}$$

$$A_3 = \left\{ \frac{A_2'}{\varphi'(x)} \right\}_{x=a} = \Big\{ f'''(x)\,[\varphi'(x)]^{-3} - 3f''(x)\,\varphi''(x)\,[\varphi'(x)]^{-4}$$
$$+ 3f'(x)\,[\varphi''(x)]^2\,[\varphi'(x)]^{-5} - f'(x)\,\varphi'''(x)\,[\varphi'(x)]^{-4} \Big\}_{x=a}$$

$$A_4 = \left\{ \frac{A_3'}{\varphi'(x)} \right\}_{x=a} = \Big\{ f^{IV}(x)\,[\varphi'(x)]^{-4} - 6f'''(x)\,\varphi''(x)\,[\varphi'(x)]^{-5}$$
$$+ 15f''(x)\,[\varphi''(x)]^2\,[\varphi'(x)]^{-6} - 4f''(x)\,\varphi'''(x)\,[\varphi'(x)]^{-5}$$
$$- 15f'(x)[\varphi''(x)]^3[\varphi'(x)]^{-7} + 10f'(x)\,\varphi''(x)\,\varphi'''(x)[\varphi'(x)]^{-6}$$
$$- f'(x)\,\varphi^{IV}(x)\,[\varphi'(x)]^{-5} \Big\} \text{ u. s. w.}$$

Wenn wir nun im Nenner des für $x = a$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmenden Bruches $\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)}$ statt x den Ausdruck $a + x - a$ einführen und $\varphi\,[a + (x - a)]$ nach der Taylor'schen Reihe entwickeln, so nimmt dieser Bruch die Form $\frac{1}{u}$ an, wo

$$u = \varphi'(a) + \frac{x-a}{1\,.\,2}\,\varphi''(a) + \frac{(x-a)^2}{1\,.\,2\,.\,3}\,\varphi''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{n!}\,\varphi^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^n}{(n+1)!}\,\varphi^{(n+1)}\,[a + \theta\,(x-a)]$$

zu setzen ist, und wenn man hieraus die auf einander folgenden Differentialquotienten von u nach x bildet und in jedem derselben $x = a$ setzt, so ergeben sich der Reihe nach:

$$u_{x=a} = \varphi'(a)\,;\; u'_{x=a} = \frac{\varphi''(a)}{2}\,;\; u''_{x=a} = \frac{\varphi'''(a)}{3}\,;\; u'''_{x=a} = \frac{\varphi^{IV}(a)}{4}\,;\;\ldots.$$

und hiernach die auf einander folgenden Differentialquotienten von

$$\frac{1}{u^r} = u^{-r},$$

nämlich:

$$(u^{-r})'_{x=a} = -(ru^{-r-1}\,u')_{x=a} = -\,r\,[\varphi'(a)]^{-r-1}\,\frac{\varphi''(a)}{2}$$

$$(u^{-r})''_{x=a} = [-ru^{-r-1}u'' + r\,(r+1)\,u^{-r-2}\,(u')^2]_{x=a}$$
$$-\,r\,[\varphi'(a)]^{-r-1}\,\frac{\varphi'''(a)}{3} + r\,(r+1)\,[\varphi'(a)]^{-r-2}\,\frac{[\varphi''(a)]^2}{4}$$

$$(u^{-r})'''_{x=a} = -r[\varphi'(a)]^{-r-1}\frac{\varphi^{IV}(a)}{4} + 3r(r+1)[\varphi'(a)]^{-r-2}\frac{\varphi''(a)}{2}\,\frac{\varphi'''(a)}{3}$$
$$-\,r\,(r+1)\,(r+2)\,[\varphi'(a)]^{-r-3}\left[\frac{\varphi''(a)}{2}\right]^3 \text{ u. s. w.}$$

Setzt man nun in §. 38 (1) u^{-r} statt u; $v = f'(x)$; $n = r - 1$, so erhält man:

$$[f'(x)\, u^{-r}]^{(r-1)} = [f'(x)]^{(r-1)}\, u^{-r} + (r-1)\,[f'(x)]^{(r-2)}\,(u^{-r})' + \frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2}[f'(x)]^{(r-3)}(u^{-r})'' + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}[f'(x)]^{r-4}(u^{-r})''' + ..$$

oder wenn man $x = a$ setzt und vorstehende Werthe einführt,

$$\left\{ f'(x) \left[\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)}\right]^r \right\}^{(r-1)}_{x=a} = f^{(r)}(a)\,[\varphi'(a)]^{-r}$$
$$- \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} f^{(r-1)}(a)\,[\varphi'(a)]^{-r-1}\, \varphi''(a)$$
$$+ \frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2} f^{(r-2)}(a) \left\{ - r\,[\varphi'(a)]^{-r-1} \frac{\varphi'''(a)}{3} \right.$$
$$\left. + r(r+1)\,[\varphi'(a)]^{-r-2} \frac{[\varphi''(a)]^2}{4} \right\}$$
$$+ \frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{(r-3)}(a) \left\{ - r\,[\varphi'(a)]^{-r-1} \frac{\varphi^{IV}(a)}{4} \right.$$
$$+ r(r+1)\,[\varphi'(a)]^{-r-2}\, \varphi''(a)\, \varphi'''(a)$$
$$\left. - r(r+1)(r+2)\,[\varphi'(a)]^{-r-3} \frac{[\varphi''(a)]^3}{8} \right\} + \dots$$

Setzt man hierin der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \dots$, so folgt:

$$\left\{ f'(x) \frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)} \right\}_{x=a} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = A_1$$

$$\left\{ f'(x) \left[\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)}\right]^2 \right\}'_{x=a} = f''(a)\,[\varphi'(a)]^{-2} - f'(a)[\varphi'(a)]^{-3}\varphi''(a) = A_2$$

$$\left\{ f'(x) \left[\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)}\right]^3 \right\}'' = f'''(a)\,[\varphi'(a)]^{-3} - 3f''(a)[\varphi'(a)]^{-4}\varphi''(a)$$
$$+ 3f'(a)\,[\varphi''(a)]^2\,[\varphi'(a)]^{-5} - f'(a)\,\varphi'''(a)\,[\varphi'(a)]^{-4} = A_3$$

und allgemein:

$$\left\{ f'(x) \left[\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)}\right]^r \right\}^{(r-1)}_{x=a} = A_r$$

Durch Einführung der gefundenen Werthe von $A_1, A_2, A_3, \dots$ in die Bürmann'sche Reihe (§. 116) erhält man nun die gewünschte Form.

§. 118. Umkehrungsformel nach Lagrange.

Ist $$x = a + k\psi(x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; .$$
und man soll $f(x)$ in eine nach Potenzen von k fortschreitende I entwickeln, so schreibe man, da $f(x)$ eine Function von k ist, ·· aus (1) hervorgeht, dass x eine Function von k sein muss, na. Maclaurin'schen Formel:

$$f(x) = f(0) + kf'(0) + \frac{k^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \ldots,$$

wo $f(0)$ den Werth von $f(x)$ für $k = 0$ also $x = a$, daher $f(a)$ bezeichnet und $f'(0)$, $f''(0) \ldots$ die auf einander folgenden Differentialquotienten von $f(x)$ nach k für $k = 0$ oder $x = a$ andeuten.

Nun ist aber $\qquad f(0) = f(a);$

ferner

$$\frac{df(x)}{dk} = \frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dk} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und da aus (1) durch Differentiation nach k folgt:

$$\frac{dx}{dk} = \psi(x) + k\psi'(x) \frac{dx}{dk} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

so erhält man:

$$\frac{df(x)}{dk} = \frac{df(x)}{dx} \left\{ \psi(x) + k\psi'(x) \frac{dx}{dk} \right\}$$

oder $$\frac{df(x)}{dk} = f'(x) \frac{dx}{dk}{}^{*)} = f'(x) \left\{ \psi(x) + k\psi'(x) \frac{dx}{dk} \right\}$$

Hieraus findet man $f'(0)$, wenn man $k = 0$, also $x = a$ setzt. Man erhält:

$$f'(0) = \left[\frac{df(x)}{dk}\right]_{x=a}^{k=0} = f'(a)\, \psi(a).$$

Ferner ergibt sich aus (2) durch nochmalige Differentiation nach k:

$$\frac{d^2 f(x)}{dk^2} = f'(x) \frac{d^2x}{dk^2} + f''(x) \left(\frac{dx}{dk}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Aus (3) folgt aber, wenn man beiderseits den Differentialquotienten nach k nimmt:

$$\frac{d^2x}{dk^2} = 2\psi'(x) \frac{dx}{dk} + k \cdot \frac{d\left(\psi'(x) \frac{dx}{dk}\right)}{dk} \quad \ldots \quad (5)$$

und hiernach:

$$\frac{d^2f(x)}{dk^2} = f'(x) \left\{ 2\psi'(x) \frac{dx}{dk} + k \cdot \frac{d\left(\psi(x) \frac{dx}{dk}\right)}{dk} \right\} + f''(x) \left(\frac{dx}{dk}\right)^2,$$

woraus für $k = 0$, also $x = a$ sich unter Berücksichtigung, dass $\frac{dx}{dk}$

…se Annahme nach (3) gleich $\psi(a)$ und $\frac{d^2x}{dk^2}$ nach (5) gleich

$$2\psi'(a)\, \psi(a)$$

---

*) Wir bezeichnen hier nämlich der Kürze halber in gegenwärtiger Entwickelung … x zu bildenden Differentialquotienten nach der Lagrange'schen, die nach k zu …nenden aber nach der Leibnitz'schen Methode. Wegen $f(0)$, $f'(0)$, … ist das … oben bemerkt.

wird; sofort ergibt:

$$f''(0) = \left(\frac{d^2 f(x)}{dk^2}\right)_{x=a}^{k=0} = f'(a) \,.\, 2\psi'(a)\,\psi(a) + f''(a)\,[\psi(a)]^2$$

oder

$$f''(0) = \{f'(a)\,[\psi(a)]^2\}'$$

Aus (4) folgt nun durch nochmalige Differentiation nach k:

$$\frac{d^3 f(x)}{dk^3} = f'(x)\frac{d^3x}{dk^3} + 3f''(x)\frac{dx}{dk}\frac{d^2x}{dk^2} + f'''(x)\left(\frac{dx}{dk}\right)^3$$

und hieraus für $k = 0$, also $x = a$, $\frac{dx}{dk} = \psi(a)$, $\frac{d^2x}{dk^2} = 2\psi(a)\,\psi'(a)$:

$$f'''(0) = \left[\frac{d^3 f(x)}{dk^3}\right]_{x=a}^{k=0} = f'(a)\left(\frac{d^3x}{dk^3}\right)_{k=0} + 3f''(a)\,.\,\psi(a)\,.\,2\psi(a)\,\psi'(a)$$
$$+ f'''(a)\,[\psi(a)]^3$$
$$= f'(a)\left(\frac{d^3x}{dk^3}\right)_{k=0} + 2f''(a)\,\{[\psi(a)]^3\}' + f'''(a)\,[\psi(a)]^3 \,.\,.\quad (6)$$

Aus (5) folgt ferner, wenn man beiderseits den Differentialquotienten nach k nimmt:

$$\frac{d^3x}{dk^3} = 2\psi'(x)\frac{d^2x}{dk^2} + 2\psi''(x)\left(\frac{dx}{dk}\right)^2 + k\,.\,\frac{d^2\left(\psi'(x)\frac{dx}{dk}\right)}{dk^2} + \frac{d\left(\psi'(x)\frac{dx}{dk}\right)}{dk}$$

und hieraus für $k = 0$, also $x = a$, $\frac{dx}{dk} = \psi(a)$, $\frac{d^2x}{dk^2} = 2\psi(a)\,\psi'(a)$, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{d\psi'(x)\frac{dx}{dk}}{dk} = \psi'(x)\frac{d^2x}{dk^2} + \psi''(x)\left(\frac{dx}{dk}\right)^2 \text{ ist:}$$

$$\left(\frac{d^3x}{dk^3}\right)_{k=0} = 2\psi'(a)\,.\,2\psi(a)\,\psi'(a) + 2\psi''(a)\,[\psi(a)]^2$$
$$+ \psi'(a)\,.\,2\psi(a)\,\psi'(a) + \psi''(a)\,[\psi(a)]^2$$
$$= 6\psi(a)\,[\psi'(a)]^2 + 3\psi''(a)\,[\psi(a)]^2.$$

Durch Substitution dieses Werthes in (6) resultirt:

$$f'''(0) = f'(a)\,\{6\psi(a)\,[\psi'(a)]^2 + 3\psi''(a)\,[\psi(a)]^2\}$$
$$+ 2f''(a)\,\{[\psi(a)]^3\}' + f'''(a)\,[\psi(a)]^3$$
$$= f'(a)\,\{6\psi(a)\,[\psi'(a)]^2 + 3\psi''(a)\,[\psi(a)]^2\}$$
$$+ f''(a)\,\{[\psi(a)]^3\}' + \{f''(a)\,[\psi(a)]^3\}'$$
$$= 3f'(a)\,\{2\psi(a)\,[\psi'(a)]^2 + \psi''(a)\,[\psi(a)]^2\}$$
$$+ 3f''a\,[\psi(a)]^2\,\psi'(a) + \{f''(a)\,[\psi(a)]^3\}'$$
$$= 3f'(a)\,\{\psi(a)^2\,\psi'(a)\}' + 3f''(a)\,[\psi(a)]^2\,\psi'(a)$$
$$+ \{f''(a)\,[\psi(a)]^3\}'$$
$$= \{3f'(a)\,[\psi(a)]^2\,\psi'(a)\}' + \{f''(a)\,[\psi(a)]^3\}'$$
$$= \{f''(a)\,[\psi(a)]^3 + 3f'(a)\,[\psi(a)]^2\,\psi'(a)\}'$$
$$= \left\{\{f'(a)\,[\psi(a)]^3\}'\right\}' = \{f'(a)\,[\psi(a)]^3\}''.$$

Allgemein wird hiernach sein:

$$f^{(r)}(0) = \left\{ f'(a) \, [\psi(a)]^r \right\}^{(r-1)}$$

und man hat daher:

$$f(x) = f(a) + kf'(a)\,\psi(a) + \frac{k^2}{1\,.\,2} \left\{ f'(a)\,[\psi(a)]^2 \right\}'$$
$$+ \frac{k^3}{1\,.\,2\,.\,3} \left\{ f'(a)\,[\psi(a)]^3 \right\}'' + \frac{k^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \left\{ f'(a)\,[\psi(a)]^4 \right\}''' + \ldots (7)$$

Anmerk. Diese Reihe wurde zuerst von Lagrange aufgestellt und heisst nach ihm die Lagrange'sche Umkehrungsformel. Sie ist natürlich nur dann anwendbar, wenn die resultirenden Reihen convergiren.

Setzt man in dieser Reihe (7)

$$f(x) = x, \text{ also } f(a) = a\,;\, f'(a) = 1\,;$$

so ergibt sich als specieller Fall die Gleichung:

$$x = a + k\psi(a) + \frac{k^2}{1\,.\,2} \left\{ [\psi(a)]^2 \right\}' + \frac{k^3}{1\,.\,2\,.\,3} \left\{ [\psi(a)]^3 \right\}'' + \,.\,.\, (8)$$

Anmerk. Man kann die Lagrange'sche Reihe auch aus der Bürmann'schen entwickeln; denn da $k = \frac{x-a}{\psi(x)}$, so besteht die Aufgabe darin, die Function $f(x)$ nach Potenzen einer anderen Function zu entwickeln, welche aber gerade die Bürmann'sche Reihe löst. Das allgemeine Glied der Bürmann'schen Reihe ist nach Früherem:

$$A_r = \left\{ f'(x) \left[\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)} \right]^r \right\}^{(r-1)}$$

und wenn man nun hierin

$$\varphi(x) = \frac{x-a}{\psi(x)}\,;\; \varphi(x) - \varphi(a) = \frac{x-a}{\psi(x)},$$

wenn $\psi(a)$ nicht Null; also $\frac{x-a}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \psi(x)$ setzt, so geht dasselbe über in:

$$A_r = \left\{ f'(x)\,[\psi(x)]^r \right\}^{(r-1)}_{x=a}$$

was mit dem allgemeinen Gliede der Lagrange'schen Reihe übereinstimmt.

Beispiele.

1) Es sei $\psi(x) = x$, so wird nach (8)

$$x = a + ka + \frac{k^2}{1\,.\,2}\,.\,2a + \frac{k^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,6a + \ldots$$
$$= a\,(1 + k + k^2 + \ldots) = \frac{a}{1-k}.$$

Für $\psi(x) = x^2$ folgt nach (7) aus $x = a + kx^2$:

$$= \frac{1 - \sqrt{1 - 4ak}}{2k} = a + ka^2 + 2k^2a^3 + 5k^3a^4 + \ldots$$

Es sei $x = a + \varepsilon \sin x$.*)

---

*) Diese Gleichung repräsentirt bekanntlich das Kepler'sche Problem, wenn ε die ...e Excentricität bezeichnet.

Setzt man in (8) $k = \varepsilon$, $\psi(a) = \sin a$, so folgt:

$$x = a + \varepsilon \sin a + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} (\sin^2 a)' + \frac{\varepsilon^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\sin^3 a)''$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\sin^4 a)''' + \ldots$$

Durch Einführung der betreffenden Werthe erhält man:

$$x = a + \varepsilon \sin a + \frac{\varepsilon^2}{1 \cdot 2} \sin 2a + \frac{\varepsilon^3}{8} (3 \sin 3a - \sin a)$$
$$+ \frac{\varepsilon^4}{6} (2 \sin 4a - \sin 2a) + \frac{\varepsilon^5}{384} (125 \sin 5a - 81 \sin 3a + 2 \sin a)$$
$$+ \frac{\varepsilon^6}{480} (81 \sin 6a - 64 \sin 4a + 5 \sin 2a)$$
$$+ \frac{\varepsilon^7}{46080} (16807 \sin 7a - 15625 \sin 5a + 2187 \sin 3a - 5 \sin a) + \ldots$$

Neunzehnter Abschnitt.

Anwendung der bestimmten Integrale auf die Summirung von Reihen.

§. 119. Erläuterung des Verfahrens durch Beispiele.

Die bestimmten Integrale geben uns ein Mittel an die Hand in vielen Fällen Reihen von bestimmtem Bildungsgesetze rasch zu summiren. Das hierbei zu befolgende Verfahren wollen wir sogleich näher erläutern durch einige

Beispiele.

1) Die Summe S der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{4n-1}$$

zu bestimmen.

Aufl. Berücksichtigt man, dass für ein positives m:

$$\int_0^1 x^m\, dx = \frac{1}{m+1}$$

ist und darum jedes Glied der obigen Reihe als der Werth dieses Integrales für ein bestimmtes m angesehen werden kann, indem die Glieder der Reihe nach erhalten werden, wenn man successiv in dem Integrale

$$m = 0\,,\,2\,,\,4\,,\,6\,,\,\ldots\,4n-2$$

setzt, so folgt:

$$S = \int_0^1 (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots - x^{4n-2})\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{4n}-1}{-x^2-1}\, dx = \int_0^1 \frac{1-x^{4n}}{x^2+1}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \int_0^1 \frac{x^{4n}\, dx}{x^2+1}.$$

Nun ist aber
$$\frac{x^{4n}}{x^2+1} < x^{4n},$$
also
$$\int_0^1 \frac{x^{4n}\,dx}{x^2+1} < \int_0^1 x^{4n}\,dx \text{ oder } < \frac{1}{4n+1}$$
somit Null für $n = \infty$, und
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{4}$$
der Werth der Reihe für $n = \infty$, also
$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

2) Die Reihe
$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2n}$$
zu summiren.

Aufl. Setzt man wieder, wegen
$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1},$$
$$S = \int_0^1 (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{2n-1})\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{2n}-1}{-x-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x^{2n}}{1+x}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx$$
und berücksichtigt, dass
$$\frac{x^{2n}}{1+x} < x^{2n}, \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx < \int_0^1 x^{2n}\,dx < \frac{1}{2n+1}$$
für $n = \infty$ Null wird, aber
$$\int \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x), \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = l2$$
ist, so folgt:
$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots = l2.$$

3) Es sei die Summe
$$S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{8n-7} - \frac{1}{8n-5} - \frac{1}{8n-3} + \frac{1}{8n-1}\right) +$$
zu finden.

Aufl. Da die einzelnen Glieder aus

$$\int_0^1 x^m\,dx = \frac{1}{m+1}$$

erhalten werden, wenn man

$$m = 0, 2, 4, 6 \ldots 8n-8, 8n-6, 8n-4, 8n-2$$

setzt, so hat man:

$$\int_0^1 (x^{8n-8} - x^{8n-6} - x^{8n-4} + x^{8n-2})\,dx$$

als allgemeines Glied und somit als Summe

$$S = \int_0^1 [(1 + x^8 + x^{16} + \ldots + x^{8n-8}) - (x^2 + x^{10} + x^{18} + \ldots + x^{8n-6})$$
$$-(x^4 + x^{12} + x^{20} + \ldots + x^{8n-4}) + (x^6 + x^{14} + x^{22} + \ldots + x^{8n-2})]\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{x^{8n}-1}{x^8-1} - \frac{x^{8n+2}-x^2}{x^8-1} - \frac{x^{8n+4}-x^4}{x^8-1} + \frac{x^{8n+6}-x^6}{x^8-1}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{8n}(1-x^2-x^4+x^6) - 1 + x^2 + x^4 - x^6}{x^8-1}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{(x^{8n}-1)(1-x^2-x^4+x^6)}{x^8-1}\,dx = \int_0^1 \frac{(1-x^{8n})(1-x^2)(1-x^4)}{1-x^8}\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{(1-x^{8n})(1-x^2)}{1+x^4}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{8n}(1-x^2)}{1+x^4}\,dx.$$

Nun ist aber

$$\frac{x^{8n}(1-x^2)}{1+x^4} < x^{8n}, \text{ weil } \frac{1-x^2}{1+x^4} < 1,$$

folglich
$$\int_0^1 \frac{x^{8n}(1-x^2)}{1+x^4}\,dx < \int_0^1 x^{8n}\,dx < \frac{1}{8n+1}.$$

Daher Null für $n = \infty$, also

$$S = \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx$$

da nach §. 92 Beisp. 19.

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l\, \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2}$$

$$\frac{-x^2}{+x^4}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\, l(\sqrt{2}+1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, l(\sqrt{2}+1)$$

ist, auch:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} l(\sqrt{2}+1).$$

4) Die Reihe

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}\right)$$
$$+\ldots+\left(\frac{1}{8n-7}+\frac{1}{8n-5}-\frac{1}{8n-3}-\frac{1}{8n-1}\right)+\ldots$$

zu summiren.

Aufl. Nach Beisp. 3 wird die Summe

$$S=\int_0^1\left(\frac{x^{8n}-1}{x^8-1}+\frac{x^{8n+2}-x^2}{x^8-1}-\frac{x^{8n+4}-x^4}{x^8-1}-\frac{x^{8n+6}-x^6}{x^8-1}\right)dx$$
$$=\int_0^1\frac{(1-x^{8n})(x^2+1)}{1+x^4}dx=\int_0^1\frac{x^2+1}{1+x^4}dx-\int_0^1\frac{x^{8n}(1+x^2)}{1+x^4}dx$$

oder da $\frac{x^2+1}{x^4+1}<2$, also

$$\int_0^1\frac{x^{8n}(x^2+1)}{x^4+1}dx<2\int_0^1 x^{8n}dx<\frac{2}{8n+1}$$

für $n=\infty$ Null wird,

$$S=\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$$

oder da nach §. 92. Aufg. 20.

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\,arc\,tg\,\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

also

$$\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

ist, auch

$$S=\frac{\pi}{4}\sqrt{2}.$$

5) Zu summiren sei:

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-1}$$

Aufl. Setzt man das allgemeine Glied

$$=\int_0^1(x^{6n-6}-x^{6n-2})\,dx$$

so wird

$$S = \int_0^1 [(1 + x^6 + x^{12} + \ldots + x^{6n-6}) - (x^4 + x^{10} + x^{16} + \ldots + x^{6n-2})]\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^{6n} - 1}{x^6 - 1} - \frac{x^{6n+4} - x^4}{x^6 - 1}\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{x^{6n}(1 - x^4)}{x^6 - 1} + \frac{x^4 - 1}{x^6 - 1}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1 - x^{6n})(1 - x^4)}{(1 - x^2)(1 + x^2 + x^4)} = \int_0^1 \frac{1 + x^2}{1 + x^2 + x^4}\, dx - \int_0^1 \frac{x^{6n}(1 + x^2)}{1 + x^2 + x^4}\, dx$$

oder da $$\int_0^1 \frac{x^{6n}(1 + x^2)}{1 + x^2 + x^4}\, dx < \int_0^1 x^{6n}\, dx < \frac{1}{6n + 1}$$

für $n = \infty$ Null wird,

$$S = \int_0^1 \frac{1 + x^2}{1 + x^2 + x^4}\, dx$$

oder weil nach §. 92 Aufg. 21:

$$\int \frac{(1 + x^2)\, dx}{1 + x^2 + x^4} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\, tg\, \frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}$$

also $$\int_0^1 \frac{(1 + x^2)\, dx}{1 + x^2 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\sqrt{3}$$

wird, auch:

$$S = \frac{\pi}{6}\sqrt{3}.$$

6) Die Summe der Reihe

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{12n - 11} - \frac{1}{12n - 7} - \frac{1}{12n - 5} + \frac{1}{12n - 1}\right) + \ldots$$

zu finden.

Aufl. Man erhält als allgemeines Glied:

$$\int_0^1 (x^{12n-12} - x^{12n-8} - x^{12n-6} + x^{12n-2})\, dx$$

also wird die Summe

$$S = \int_0^1 [(1 + x^{12} + x^{24} + \ldots + x^{12n-12}) - (x^4 + x^{16} + \ldots + x^{12n-8})$$

$$- (x^6 + x^{18} + \ldots + x^{12n-6}) + (x^{10} + x^{22} + \ldots + x^{12n-2})]\, dx$$

$$\left(\frac{x^{12n} - 1}{x^{12} - 1} - \frac{x^{12n+4} - x^4}{x^{12} - 1} - \frac{x^{12n+6} - x^6}{x^{12} - 1} + \frac{x^{12n+10} - x^{10}}{x^{12} - 1}\right) dx$$

$$\frac{1 - x^{12n})(1 - x^4)}{1 + x^6}\, dx = \int_0^1 \frac{1 - x^4}{1 + x^6}\, dx - \int_0^1 \frac{x^{12n}(1 - x^4)}{1 + x^6}\, dx$$

oder da $\frac{1-x^6}{1+x^6} < 1$ also

$$\int_0^1 \frac{x^{12n}(1-x^4)}{1+x^6}\,dx < \int_0^1 x^{12n}\,dx < \frac{1}{12n+1}$$

Null wird für $n = \infty$,

$$S = \int_0^1 \frac{1-x^4}{1+x^6}\,dx = \int_0^1 \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\,dx$$

oder da nach §. 92, Beisp. 18

$$\int \frac{1-x^2}{1-x^2+x^4}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\, \frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}$$

so wird

$$S = \frac{1}{2\sqrt{3}}\, l\, \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, l\,(2+\sqrt{3}).$$

7) $$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\ldots$$
$$+\left(\frac{1}{10n-9}-\frac{1}{10n-7}-\frac{1}{10n-3}+\frac{1}{10n-1}\right)+\ldots$$

zu summiren.

Aufl. Die allgemeine Form der $n$ten Gruppe ist ausgedrückt durch

$$\int_0^1 (x^{10n-10}-x^{10n-8}-x^{10n-4}+x^{10n-2})\,dx$$

und somit die Summe der $n$ersten viergliedrigen Gruppen oder

$$S = \int_0^1 \left(\frac{x^{10n}-1}{x^{10}-1}-\frac{x^{10n+2}-x^2}{x^{10}-1}-\frac{x^{10n+6}-x^6}{x^{10}-1}+\frac{x^{10n+8}-x^8}{x^{10}-1}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-x^6)(1-x^{10n})}{1+x^2+x^4+x^6+x^8}\,dx$$

also für $n = \infty$:

$$S = \int_0^1 \frac{(1-x^6)\,dx}{1+x^2+x^4+x^6+x^8}$$

oder da nach §. 92, Beisp. 23

$$\int \frac{(1-x^6)\,dx}{1+x^2+x^4+x^6+x^8} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\, l\, \frac{(x^2+1)^2+x^2+x(x^2+1)}{(x^2+1)^2+x^2-x(x^2+1)}.$$

$$S = \frac{1}{2\sqrt{5}}\, l\, \frac{5+2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\, l\, \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\, l\,(\sqrt{5}+2)$$

8) Es soll die Reihe

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\dots$$
$$+\frac{1}{20n-19}+\frac{1}{20n-17}+\frac{1}{20n-13}+\frac{1}{20n-11}$$
$$-\frac{1}{20n-9}-\frac{1}{20n-7}-\frac{1}{20n-3}-\frac{1}{20n-1}+\dots$$

summirt werden.

Aufl. Allgemein heisst jede achtgliedrige Gruppe:

$$\int_0^1 (x^{20n-20}+x^{20n-18}+x^{20n-14}+x^{20n-12}-x^{20n-10}-x^{20n-8}$$
$$-x^{20n-4}-x^{20n-2})\,dx.$$

und hiernach wird

$$S=\int_0^1 \frac{(x^{20n}-1)(1+x^2+x^6+x^8-x^{10}-x^{12}-x^{16}-x^{18})}{x^{20}-1}\,dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(1-x^{20n})(1+x^2+x^6+x^8)}{1+x^{10}}\,dx$$

also für $n=\infty$:

$$S=\int_0^1 \frac{1+x^2+x^6+x^8}{1+x^{10}}\,dx$$

Nach §. 92, Beisp. 22 ist aber

$$\int \frac{1+x^2+x^6+x^8}{1+x^{10}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{x(1-x^2)\sqrt{5}}{x^4-3x^2+1}$$

Da jedoch der Nenner x^4-3x^2+1 für $x=\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$ Null, die betreffende Function also dafür unstetig wird, so nehmen wir besser den im angeführten Beispiele des §. 92 angegebenen Werth (μ) und setzen:

$$\int \frac{1+x^2+x^6+x^8}{1+x^{10}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{x^2-1}{\alpha x}-\frac{1}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{x^2-1}{\beta x}$$

wo
$$\alpha=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5}\;;\;\beta=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Da aber dieser Werth für $x=0$ unstetig und für $x=1$ Null wird, so schreiben wir, wenn δ eine positive unendlich kleine Zahl bezeichnet, für das bestimmte Integral:

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{\delta^2-1}{\alpha\delta}+\frac{1}{\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{\delta^2-1}{\beta\delta}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(arctg\,\frac{1-\delta^2}{\alpha\delta}-arctg\,\frac{1-\delta^2}{\beta\delta}\right),$$

hieraus, da α positiv, β negativ ist,

$$\left(arctg\,(+\infty)-\frac{1}{\sqrt{5}}\,arctg\,(-\infty)\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{5}\sqrt{5}.$$

9) Die Reihe

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\ldots$$

zu summiren.

Aufl. Das allgemeine Glied der $n$ten Gruppe ist ausgedrückt durch

$$\int_0^1 (x^{4n-4}+x^{4n-2}-2x^{4n-1})\,dx$$

und somit

$$S=\int_0^1\left(\frac{x^{4n}-1}{x^4-1}+\frac{x^{4n+2}-x^2}{x^4-1}-2\frac{x^{4n+3}-x^3}{x^4-1}\right)dx$$

$$=\int_0^1\frac{(x^{4n}-1)(1+x^2-2x^3)}{x^4-1}\,dx=-\int_0^1\frac{(x^{4n}-1)(1+x+2x^2)}{(x^2+1)(x+1)}\,dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1+x+2x^2}{(x^2+1)(x+1)}-x^{4n}\frac{1+x+2x^2}{(x^2+1)(x+1)}\right]dx$$

Nun ist aber $\dfrac{1+x+2x^2}{(x^2+1)(x+1)}=\dfrac{1+x+x^2+x^2}{1+x+x^2+x^3}$

also, da $x^2>x^3$ ist,

$$\frac{1+x+2x^2}{(x^2+1)(x+1)}>1 \text{ aber } <2,$$

folglich $$\int_0^1\frac{x^{4n}(1+x+2x^2)}{(x^2+1)(x+1)}\,dx<2\int_0^1 x^{4n}\,dx$$

oder $<\dfrac{2}{4n+1}$ und verschwindet somit für $n=\infty$. Man hat daher:

$$S=\int_0^1\frac{1+x+2x^2}{(x^2+1)(x+1)}\,dx=\int_0^1\left[\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}\right]dx$$

oder da $\displaystyle\int\frac{dx}{x+1}=l(x+1)\,;\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\tfrac{1}{2}l(x^2+1)$,

$$S=l2+\tfrac{1}{2}l2=\frac{3}{2}l2.$$

10) Die zu summirende Reihe sei

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{8}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\ldots$$
$$+\frac{3}{6n-3}-\frac{1}{6n-4}-\frac{1}{6n-2}-\frac{1}{6n}.$$

Aufl. Das allgemeine Glied ist

$$\int_0^1(3x^{6n-4}-x^{6n-5}-x^{6n-3}-x^{6n-1})\,dx$$

und daher die Summe

$$S=\int_0^1\frac{(x^{6n}-1)(x^5+x^3-3x^2+x)}{1-x^6}dx=\int_0^1-\frac{(x^{6n}+1)x(x^3+x^2+2x-1)}{(x^3+1)(x^2+x+1)}dx$$

$$=\int_0^1\frac{x(x^3+x^2+2x-1)}{(x^3+1)(x^2+x+1)}dx-\int_0^1\frac{x^{6n+1}(x^3+x^2+2x-1)}{(x^3+1)(x^2+x+1)}dx$$

oder für $n=\infty$

$$S=\int_0^1\frac{x(x^3+x^2+2x-1)}{(x^3+1)(x^2+x+1)}dx=\int_0^1\left[\frac{1}{x+1}-\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}\right]dx$$

Nun ist aber

$$\int\frac{dx}{x+1}=l(x+1),\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx=\tfrac{1}{2}l(x^2+x+1),$$

$$\int\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2-x+1}dx=\tfrac{1}{2}l(x^2-x+1),$$

also
$$S=l2+\tfrac{1}{2}l\tfrac{1}{3}.$$

Zwanzigster Abschnitt.

Quadratur und Rectification der ebenen Curven, Quadratur der Oberflächen und Cubatur von Rotationskörpern.

§. 120. Quadratur ebener Curven.

1) Unter der Quadratur einer Curve versteht man bei Zugrundelegung von recht- oder schiefwinkligen Coordinaten die Berechnung des Flächeninhaltes eines durch die Curve, die Abscissenachse und zwei bestimmte Ordinaten begrenzten Flächenstückes derselben, während man bei der Annahme von Polarcoordinaten darunter die Inhaltsbestimmung des durch zwei bestimmte Lagen des Radiusvectors und dem entsprechenden Curvenbogen bezeichneten Flächenstückes zu verstehen hat.

2) Setzen wir rechtwinklige Coordinaten voraus und nehmen an, dass mit wachsender Abscisse die Fläche gleichzeitig zunehme und daher die innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = x$ liegenden Ordinaten alle positiv seien (Fig. 110), so erhält man nach §. 110. α, bezüglich der Quadratur des den Abscissen $x = a$ bis $x = x$ entsprechenden Flächenstückes

Fig. 110.

$$u = \int_a^x y\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo $x > a$ vorausgesetzt wird. *)

*) Der Flächenraum $aAXx$ ist also die Grenze der Summe aller unendlich ... Rechtecke, in welche derselbe durch Parallele mit der YAchse zerlegt werd... Dieses ist aber eben auch die Bedeutung des bestimmten Integrales

$$\int_a^x f(x)\, dx.$$

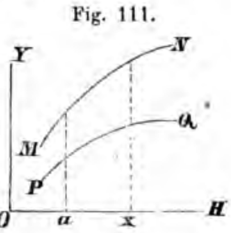
Anmerk. Ohne den Begriff des bestimmten Integrales vorauszusetzen, gelangt man zu demselben Resultate, wenn man aus $\frac{du}{dx} = y$ folgert:

$$u = \int y\,dx + C = F(x) + C,$$

wo $F(x)$ eine stetige Function von x bedeutet und nun hierin $C = -F(a)$ setzt, weil für $x = a$ der Flächenraum verschwindet, dafür also $F(a) + C = 0$ ist.

3) Sind $y = f(x)$ und $y_1 = f_1(x)$ die Gleichungen zweier Curven MN und PQ (Fig. 111) hinsichtlich desselben Coordinatensystemes und findet innerhalb der Strecke $x - a$ kein Durchschneiden derselben sowohl unter sich als mit der Abscissenachse statt, so wird der Inhalt des zwischen beiden liegenden und den Abscissen $x = a$ bis $x = x$ entsprechenden Flächenstückes

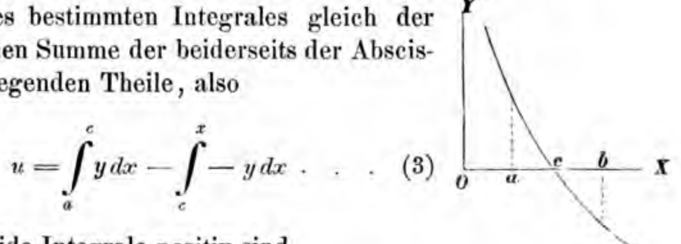
Fig. 111.



$$u = \int_a^x y_1\,dx - \int_a^x y\,dx = \int_a^x (y_1 - y)\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

4) Durchschneidet die Curve die Abscissenachse bei $x = c$ (Fig. 112), so wird das den Abscissen $x = a$ bis $x = x$ entsprechende Flächenstück nach dem Begriffe des bestimmten Integrales gleich der algebraischen Summe der beiderseits der Abscissenachse liegenden Theile, also

Fig. 112.



$$u = \int_a^c y\,dx - \int_c^x - y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wo jetzt beide Integrale positiv sind.

Anmerk. Nehmen wir sämmtliche Elemente der Fläche absolut, so wächst u mit wachsendem x und es muss somit $\frac{du}{dx}$ stets positiv sein. Je nachdem also y positiv oder negativ ist, hat man $\frac{du}{dx} = y$ oder $\frac{du}{dx} = -y$ zu setzen. Aendert so- Ordinate innerhalb der Integrationsgrenzen ihr Zeichen und ist dieselbe etwa $= a$ bis $x = c$ positiv, dagegen von $x = c$ bis $x = x$ negativ, so muss erste Flächenstück $\frac{du}{dx} = y$, für das zweite $\frac{du}{dx} = -y$ gesetzt werden, wo- ir wieder zu obigem Resultate gelangen.

ɔınd die rechtwinkligen Coordinaten x und y Functionen der ..igen t, so ist der Differentialquotient des betreffenden

Flächenstückes nach t gleich $y\frac{dx}{dt}$ und somit das Flächenstück

$$u = \int_a^t y \frac{dx}{dt}\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wenn α und t diejenigen Werthe von t bedeuten, welche den Grenzwerthen a und x entsprechen.

6) Nach §. 79 erhält man unmittelbar für das den Polarwinkeln $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \beta$ entsprechende Flächenstück

$$u = \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\varphi = F(\beta) - F(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

wenn $F(\varphi)$ das unbestimmte Integral bedeutet und vorausgesetzt wird, dass die Fläche gleichzeitig mit φ wächst.*)

Anmerk. Zu diesem Resultate gelangt man auch ohne Voraussetzung des Begriffes vom bestimmten Integrale auf folgende Weise: Wenn der Radius vector von α bis β beständig wächst, $\frac{\beta - \alpha}{n} = \delta$ gesetzt wird und $r = f(\varphi)$ ist, so liegt der gesuchte Flächenraum offenbar zwischen den zwei Grenzen:

$$S = \frac{\delta}{2}\Big\{ f^2(\alpha) + f^2(\alpha + \delta) + f^2(\alpha + 2\delta) + \ldots$$
$$+ f^2[\alpha + (n-1)\delta]\Big\} \text{ und}$$
$$S' = \frac{\delta}{2}\Big\{ f^2(\alpha + \delta) + f^2(\alpha + 2\delta) + f^2(\alpha + 3\delta) + \ldots$$
$$+ f^2[\alpha + (n-1)\delta] + f^2(\alpha + n\delta)\Big\},$$

wie man sogleich einsieht, wenn man die entsprechenden ein- und umgeschriebenen Kreissectoren beschreibt. Die Differenz dieser beiden Grenzen ist:

$$S' - S = \frac{\delta}{2}\Big\{ f^2(\alpha + n\delta) - f^2(\alpha)\Big\}$$
$$= \frac{\delta}{2}\Big\{ f^2(\beta) - f^2(\alpha)\Big\}.$$

Dieselbe wird also mit abnehmendem δ selbst unendlich klein und es ist somit der Flächenraum

$$u = \lim \frac{\delta}{2}\Big\{ f^2(\alpha) + f^2(\alpha + \delta) + f^2(\alpha + 2\delta) + \ldots + f^2[\alpha + (n-1)\delta]\Big\}$$

oder nach §. 110 $\quad u = \int_\alpha^\beta \tfrac{1}{2} r^2 d\varphi.$

---

*) Denn bezeichnet u das Flächenstück zwischen den Polarwinkeln α [...] hat man:

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{r^2}{2},$$

also:
$$u = \int \frac{r^2}{2}\, d\varphi + C = F(\varphi) + C,$$

wo die Constante durch die Bemerkung bestimmt ist, dass für $\varphi = \alpha$ der [...]raum $u = 0$, also $F(\alpha) + C = 0$ wird. Man hat daher:

$$u = F(\beta) - F(\alpha).$$

7) Aendert sich der Radius vector einer Curve sprungweise, so besteht der Sector derselben aus zwei oder mehren Sectoren, deren Flächen einzeln zu berechnen sind.

Ist die Unstetigkeit von der Art, dass der Umfang des Sprunges ein endlicher ist, so ist diese Zerlegung nicht nothwendig, wenn das unbestimmte Integral innerhalb der betreffenden Grenzen stetig bleibt.

8) Sind x und y Functionen der Unabhängigen t, so wird der Differentialquotient des Sectors

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

woraus nun der Sector bestimmt werden kann.

Beispiele.

1) Inhaltsbestimmung des Paralleltrapezes.

Aus der Gleichung der Geraden AB (Fig. 113)

$$y = a + x\,tg\,\alpha = a + mx$$

folgt für den Inhalt der Fläche ABB_1O, wenn man $OB_1 = h$ setzt:

$$u = \int_0^h y\,dx = \int_0^h (a + mx)\,dx$$

$$= \frac{h}{2}(2a + mh) = \frac{h}{2}(a + a + mh) = \frac{h}{2}(a+b).$$

Fig. 113.

2) Quadratur des Kreises.

Die Mittelpunktsgleichung des Kreises ist bekanntlich

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

und somit das den Abscissen $x = 0$ *bis* $x = x$ entsprechende Kreisstück

$$u = \int_0^x \sqrt{r^2 - x^2}\,dx,$$

oder da nach §. 97 (19)

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\,arcsin\,\frac{x}{r},$$

$$u = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\,arcsin\,\frac{x}{r}$$

folgt hieraus als Inhalt des Quadranten $= \frac{\pi r^2}{4}$ und es ist daher [l]es ganzen Kreises $= \pi r^2$.

3) Quadratur der Parabel.

Die Scheitelgleichung ist $y = \sqrt{px}$ und somit der Inhalt des den Abscissen $x = 0$ bis $x = x$ entsprechenden Stückes

$$u = \sqrt{p} \int_0^x \sqrt{x}\, dx$$

oder da

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$u = \frac{2}{3}\, x\sqrt{px} = \frac{2}{3}\, xy = ABC \text{ (Fig. 114).}$$

Man erhält demnach für den Theil

$$ADC = \frac{4}{3}\, xy,$$

d. i. $\frac{2}{3}$ des umschriebenen Rechteckes $DCEF$.

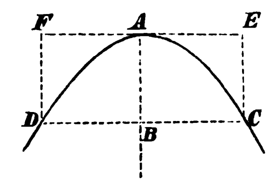


Fig. 114.

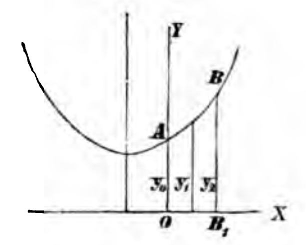


Fig. 115.

Wählt man $y = a + bx + cx^2$ als Parabelgleichung, so wird (Fig. 115) der Raum

$$ABOB_1 = u = \int_0^x (a + bx + cx^2)\, dx$$

$$= ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3}$$

$$= \frac{x}{3}\left(3a + 3b\,\frac{x}{2} + cx^2\right).$$

Sind nun y_0, y_1, y_2 die Ordinaten, welche den Abscissen 0, $\frac{x}{2}$, x entsprechen, so folgt:

$$y_0 = a$$

$$y_2 = a + bx + cx^2$$

$$\frac{y_0 + y_2}{2} = a + \frac{bx}{2} + \frac{cx^2}{2}.$$

Ferner ist:

$$y_1 = a + b\,\frac{x}{2} + c\,\frac{x^2}{4},$$

$$2y_1 = 2a + bx + c\,\frac{x^2}{2},$$

also
$$\frac{y_0 + y_2}{2} + 2y_1 = 3a + 3\,\frac{bx}{2} + cx^2$$

und somit:

$$u = \frac{x}{3}\left(\frac{y_0 + y_2}{2} + 2y_1\right)$$

oder
$$u = \frac{x}{6}\,(y_0 + 4y_1 + y_2),$$

wo $y_0\ y_1\ y_2$ also drei gleichweit von einander abstehende Ordinaten bezeichnen.

4) Quadratur der Ellipse.

Da für die Ellipse $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und nach §. 97 (19)

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\,arc\,sin\,\frac{x}{a}$$

ist, so folgt für

$$u = \int_0^x \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 arc\,sin\,\frac{x}{a}\right]$$

$$= \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2}\,arc\,sin\,\frac{x}{a}.$$

Für $x = a$, $y = 0$ folgt hieraus der Inhalt des Quadranten $= \frac{\pi ab}{4}$ und es ist somit der Inhalt der ganzen Ellipse $= \pi ab$; für einen Sector, wie mnp (Fig. 116) erhält man

Fig. 116.

$$mnp = mqnp - mnq = mqnp - \frac{xy}{2}$$

oder

$$mnp = \frac{ab}{2}\,arc\,sin\,\frac{x}{a}.$$

Anmerk. Um den Inhalt der elliptischen Fläche mittelst Polarcoordinaten aus-
...n, entwickle man zuerst aus

$$(2a - r)^2 = r^2 + 4c^2 + 4cr\cos\varphi$$

...rgleichung:

$$r = \frac{b^2}{a + c\cos\varphi},$$

die Fläche

$$u = \frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2\,d\varphi = \frac{b^4}{2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(a + c\cos\varphi)^2},$$

oder da, wenn man in §. 104, 14 (29) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $b = c$, $n = 2$, und b^2 statt $c^2 - a^2$ setzt,

$$\int \frac{d\varphi}{(a + c\cos\varphi)^2} = -\frac{c\sin\varphi}{b^2(a + c\cos\varphi)} + \frac{a}{b^2}\int \frac{d\varphi}{a + c\cos\varphi}$$

wird, so erhält man für die halbe Ellipse:

$$\frac{b^4}{2}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{(a + c\cos\varphi)^2} = \frac{b^4}{2} \cdot \frac{a}{b^2}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a + c\cos\varphi} = \frac{ab^2}{2}\int_0^\pi \frac{d\varphi}{a + c\cos\varphi}$$

oder nach §. 104. 27.

$$= \frac{ab^2}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{2}.$$

Daher ist die ganze Ellipse $= \pi ab$, wie vorhin.

5) Quadratur der Hyperbel.

Da
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

so folgt:
$$u = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$$

oder nach §. 97 (18):

$$u = \frac{b}{2a}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right] + \frac{ab}{2} la$$

Fig. 117.

oder (Fig. 117).

$$ACB = \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\, l\, \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$$

$$= \frac{xy}{2} - \frac{ab}{2}\, l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

also
$$ACD = xy - ab\, l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Anmerk. Da $xy = \frac{a^2}{2}$ die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf die Asymptoten ist, so erhält man dafür:

$$u = \int_{x_1}^{x_2} \frac{a^2}{2x}\, dx = \frac{a^2}{2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \frac{a^2}{2}\, l\, \frac{x_2}{x_1}.$$

Für $a^2 = 2$ und $x_1 = 1$ folgt hieraus:

$$u = lx_2$$

und es werden also die natürlichen Logarithmen durch Flächenstücke gleichseitiger Hyperbeln ausgedrückt. Dieser Eigenschaft wegen hat man die natürlichen Logarithmen auch **hyperbolische** genannt.

6) Quadratur der Cardioide.

Nach §. 81 ist

$$r = 2a(1 + \cos\varphi)$$

die Polargleichung dieser Curve, also nach (4) der Inhalt des den winkeln 0, φ entsprechenden Curvenstückes

$$u = \frac{1}{2}\int_0^\varphi 4a^2(1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi = 2a^2\int_0^\varphi (1 + \cos\varphi)^2\, d\varphi$$

Nun ist aber

$$\int(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi = \int(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= \varphi + 2\sin\varphi + \int\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= \varphi + 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\int\cos 2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{3\varphi}{2} + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\,;$$

folglich:

$$u = a^2\left(3\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)$$

Für $\varphi = \pi$ folgt als Inhalt der halben Cardioide $= 3\pi a^2$, also ist die ganze Fläche $= 6\pi a^2$.

7) Quadratur der Lemniscate.

Es ist bekanntlich

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

die betreffende Polargleichung und somit der Inhalt des von $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ bestimmten Flächenstückes

$$u = \frac{a^2}{2}\int_0^\varphi \cos 2\varphi\,d\varphi.$$

oder, da $\int\cos 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$ ist,

$$u = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi.$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ folgt hieraus als Inhalt des vierten Theiles der Curve $= \frac{a^2}{4}$ und somit ist der Inhalt der ganzen Lemniscate $= a^2$.

8) Quadratur der gemeinen Cycloide.

Nach Aufg. 4 des §. 81 ist

$$x = r(\varphi - \sin\varphi)\,,\; y = r(1-\cos\varphi)\,,\; \frac{dx}{d\varphi} = r(1-\cos\varphi),$$

also das Flächenstück AEB (Fig. 95) oder

$$u = \int_0^\varphi yx'\,d\varphi = r^2\int_0^\varphi(1-\cos\varphi)^2\,d\varphi$$

$$= r^2\int_0^\varphi(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= r^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right).$$

Für $\varphi = 2\pi$ folgt $3\pi r^2$ oder der dreifache Inhalt des rollenden Kreises als Inhalt der ganzen Cycloide.

9) Quadratur der Ellipsenevolute.

Nach §. 72 Beisp. 2 ist die betreffende Gleichung:

$$\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

also wird

$$\int y\,dx = \frac{c^2}{b}\int\left[1 - \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}} dx$$

oder, wenn man $x^{\frac{2}{3}} = z^2$, $\left(\frac{a}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \alpha$ setzt,

$$= \frac{3c^2}{b}\int z^2\,(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz.$$

Nach §. 97. 5. (5) ist aber

$$\int z^2\,(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz = -\frac{z\,(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha} + \frac{1}{6\alpha}\int (1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz$$

und nach §. 97. 2. (2):

$$\int (1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz = \frac{z\,(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4}\int (1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz$$

$$\int (1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}\,dz = \frac{z\,(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2}\int (1-\alpha z^2)^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$= \frac{z\,(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,arc\sin z\sqrt{\alpha},$$

also

$$\int z^2\,(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz = \frac{z\,(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}}{48\alpha}\,[14\alpha z^2 - 8\alpha^2 z^4 - 3]$$

$$+ \frac{1}{16\alpha\sqrt{\alpha}}\,arc\sin z\sqrt{\alpha}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}}\,(1-\alpha x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{48\alpha}\,[14\alpha x^{\frac{2}{3}} - 8\alpha^2 x^{\frac{4}{3}} - 3]$$

$$+ \frac{1}{16\alpha\sqrt{\alpha}}\,arc\sin x^{\frac{1}{3}}\sqrt{\alpha}.$$

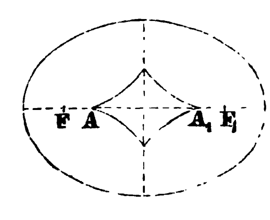


Fig. 118.

Um den vierten Theil der Curve zu erhalten, integrire man nun innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = \frac{c^2}{a}$ (Fig. 118). Man findet:

$$\frac{3c^2}{b}\int_0^{\sqrt[3]{\frac{c^2}{a}}} z^2\,(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz = \frac{\pi}{32}\cdot\frac{c^2}{a}\cdot\cdot$$

$$= \frac{3\pi}{32}\cdot\frac{c^4}{ab}.$$

Die ganze Evolutenfläche ist daher

$$= \frac{3\pi}{8}\,\frac{c^4}{ab} = \frac{3\pi}{8}\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}.$$

10) Quadratur des Blattes von Descartes.

Die Gleichung dieser Curve ist

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0$$

und somit in Polarcoordinaten:

$$r\,(sin^3\varphi + cos^3\varphi) - 3a\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi = 0.$$

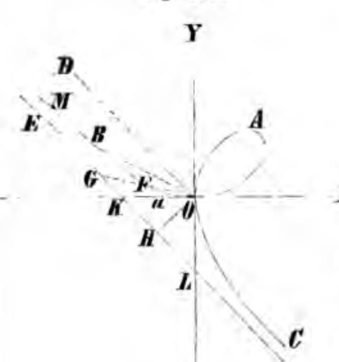
Man hat daher:

$$u = \tfrac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2}\int\frac{sin^2\varphi\,cos^2\varphi}{(sin^3\varphi + cos^3\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int\frac{tg^2\varphi}{(1+tg^3\varphi)^2}\,\frac{d\varphi}{cos^2\varphi} = \frac{3a^2}{2}\int\frac{3tg^2\varphi\,\dfrac{d\,tg\,\varphi}{d\varphi}}{(1+tg^3\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int\frac{\dfrac{d}{d\varphi}(1+tg^3\varphi)}{(1+tg^3\varphi)^2}\,d\varphi = -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{1+tg^3\varphi}.$$

Fig. 119.



Der Inhalt des geschlossenen Theiles OA (Fig. 119) ist hiernach

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\dfrac{d}{d\varphi}(1+tg^3\varphi)}{(1+tg^3\varphi)^2}\,d\varphi = \frac{3a^2}{2}.$$

Für $\varphi = \sphericalangle\,DOX = \frac{3\pi}{4}$ wird $r = \infty$ und wenn man nun irgend zwei Fahrstrahlen OE und OG zieht, welchen φ_1 und φ_2 als Polarwinkel entsprechen, ferner OH senkrecht zur Asymptote HE errichtet, so ist

$$EH\,tg\,OEH = EH\,tg\left(\varphi_1 - \frac{3\pi}{4}\right) = OH = \frac{a}{\sqrt{2}}\ ^{*)}$$

$$GH\,tg\,OGH = GH\,tg\left(\varphi_2 - \frac{3\pi}{4}\right) = OH = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$l = EH - GH = \frac{a}{\sqrt{2}}\left[cot\left(\varphi_1 - \frac{3\pi}{4}\right) - cot\left(\varphi_2 - \frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-tg\,\varphi_1}{1+tg\,\varphi_1} - \frac{1-tg\,\varphi_2}{1+tg\,\varphi_2}\right)$$

*) Denn aus der Asymptotengleichung (§. 75, Beisp. 6) $y + x + a = 0$ folgt, $= OL = a$ ist.

und hiernach der Inhalt des $\triangle OEG$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{1 - tg\,\varphi_1}{1 + tg\,\varphi_1} - \frac{1 - tg\,\varphi_2}{1 + tg\,\varphi_2}\right).$$

Für den Inhalt der Fläche $EBFG$ erhält man daher

$$\frac{a^2}{4}\left(\frac{1 - tg\,\varphi_1}{1 + tg\,\varphi_1} - \frac{1 - tg\,\varphi_2}{1 + tg\,\varphi_2}\right) - \frac{3a^2}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\frac{d}{d\varphi}(1 + tg^3\varphi)}{(1 + tg^3\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(\frac{1 - tg\,\varphi_1}{1 + tg\,\varphi_1} - \frac{1 - tg\,\varphi_2}{1 + tg\,\varphi_2}\right) - \frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{1 + tg^3\varphi_1} - \frac{1}{1 + tg^3\varphi_2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(-1 + \frac{2}{1 + tg\,\varphi_1} + 1 - \frac{2}{1 + tg\,\varphi_2}\right)$$

$$- \frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{1 + tg^3\varphi_1} - \frac{1}{1 + tg^3\varphi_2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{1 + tg\,\varphi_1} - \frac{1}{1 + tg\,\varphi_2}\right) - \frac{3a^2}{2}\left(\frac{1}{1 + tg^3\varphi_1} - \frac{1}{1 + tg^3\varphi_2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{tg\,\varphi_1 - 2}{1 - tg\,\varphi_1 + tg^2\varphi_1} - \frac{tg\,\varphi_2 - 2}{1 - tg\,\varphi_2 + tg^2\varphi_2}\right),$$

wenn man nämlich bemerkt, dass $\frac{1}{1 + m} - \frac{3}{1 + m^3} = \frac{m - 2}{m^2 - m + 1}$ ist.

Setzt man hierin $\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi_2 = \pi$, so erhält man $\frac{a^2}{2}$ als Inhalt der von OK, der Asymptote und dem Aste OM begrenzten Fläche. Da der Inhalt des $\triangle OKL$ ebenfalls $\frac{a^2}{2}$ ist, so folgt $\frac{3a^2}{2}$ als Inhalt der zwischen den Asymptoten und den beiden Curvenästen liegenden Fläche. Der ganze Inhalt ist somit $\frac{6a^2}{2} = 3a^2$.

11) Quadratur der Epicycloide.

Nach §. 81. Aufg. 5 ist, wenn man $\frac{R}{r} = n$ und $(n + 1)\,\varphi = \beta$ setzt:

$$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\beta$$
$$y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\beta$$

also

$$\frac{dx}{d\varphi} = (R + r)(\sin\beta - \sin\varphi)$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = (R + r)(\cos\varphi - \cos\beta)$$

und somit nach der Anmerkung zu §. 79 der Differentialquoti[illegible] Fläche ABM (Fig. 98)

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2}\,(R + r)\,[x\,(\cos\varphi - \cos\beta) - y\,(\sin\beta - \sin\varphi)]$$

$$= \frac{1}{2}\,(R + r)\,[R + 2r - (R + r)\cos(\beta - \varphi) - r\cos(\beta - \varphi)]$$

$$= \frac{1}{2}\,(R + r)\,[R + 2r - (R + 2r)\cos n\varphi]$$

$$= \frac{1}{2}\,(R + r)\,(R + 2r)\,(1 - \cos n\varphi).$$

Folglich ist

$$u = \frac{1}{2}\,(R + r)\,(R + 2r)\int\limits_0^{\varphi}(1 - \cos n\varphi)\,d\varphi$$

oder da

$$\int(1 - \cos n\varphi)\,d\varphi = \int d\varphi - \int\cos n\varphi\,d\varphi = \varphi - \frac{1}{n}\sin n\varphi,$$

auch:

$$u = \frac{1}{2}\,(R + r)\,(R + 2r)\left(\varphi - \frac{1}{n}\sin n\varphi\right).$$

Für $\varphi = \frac{2\pi r}{R}$ folgt hiernach:

$$u = (R + r)\,(R + 2r)\,\frac{\pi r}{R}$$

als Inhalt der Fläche $ABLK$ und wenn man hiervon den Inhalt des Kreissectors

$$ABK = \frac{2\pi r}{R}\,.\,R\,.\,\frac{R}{2} = \pi R r$$

subtrahirt, ergibt sich als Inhalt der Epicycloide:

$$(R + r)\,(R + 2r)\,\frac{\pi r}{R} - \pi R r = 3\pi r^2 + \frac{2\pi r^3}{R}.$$

Für $R = \infty$ folgt hieraus wieder $3\pi r^2$ als Inhalt der gemeinen Cycloide.

12) Quadratur der Kreisevolvente.

Bezeichnet a den Halbmesser der Evolute (Fig. 120), α den mit der Einheit zwischen CA und CB beschriebenen Bogen, so ist

$$r^2 = a^2\,(1 + \alpha^2)\,;\; tg\,(\alpha - \varphi) = \frac{a\alpha}{a} = \alpha,$$

lso:

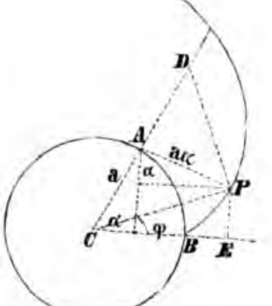
$$- arc\,tg\,\alpha\,;\; \frac{d\varphi}{d\alpha} = 1 - \frac{1}{1+\alpha^2} = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

t nach §. 8 (1)

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{r^2}{2}$$

$$u = \frac{r^2}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{a^2(1+\alpha^2)}{2}\,\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} = \frac{a^2\alpha^2}{2}$$

Fig. 120.



folglich:

$$u = \int_0^\alpha \frac{a^2\alpha^2}{2}\,d\alpha = \frac{a^2\alpha^3}{6}.$$

Zieht man $PD \perp CP$, so ist $AD = a\alpha\, tg\,(\alpha - \varphi) = a\alpha^2$

und
$$\triangle PAD = \frac{a\alpha\,.\,a\alpha^2}{2} = \frac{a^2\alpha^3}{2}.$$

woraus hervorgeht, dass

$$CBP = \tfrac{1}{3}\triangle PAD.$$

Um den Inhalt des Sectors CBP noch auf eine andere Art herzuleiten, seien $CE = x$, $PE = y$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes P der Curve, so hat man:

$$y = a \sin\alpha - a\alpha\cos\alpha$$
$$x = a\cos\alpha + a\alpha\sin\alpha$$
$$\frac{dy}{d\alpha} = a\alpha\sin\alpha\,;\; \frac{dx}{d\alpha} = a\alpha\cos\alpha,$$

folglich nach der Anmerkung zu §. 79:

$$\text{Inh. } CBP = \int_0^\alpha \frac{1}{2}\big[(a\cos\alpha + a\alpha\sin\alpha)\, a\alpha\sin\alpha$$
$$- (a\sin\alpha - a\alpha\cos\alpha)\, a\alpha\cos\alpha\big]\, d\alpha$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^\alpha \alpha^2\, d\alpha = \frac{a^2\alpha^3}{6}.$$

Anmerk. Nach §. 81. Aufg. 5. sind, wenn man $\frac{r}{R} = n$ setzt,

$$\frac{x}{R} = (1 + n)\cos\varphi - n\cos\left(\varphi + \frac{\varphi}{n}\right)$$
$$\frac{y}{R} = (1 + n)\sin\varphi - n\sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{n}\right)$$

die Gleichungen der Epicycloide. Entwickelt man hierin $\cos\left(\varphi + \frac{\varphi}{n}\right)$ und $\sin\left(\varphi + \frac{\varphi}{n}\right)$, so kann man auch schreiben:

$$\frac{x}{R} = \cos\varphi\left(1 + 2n\sin^2\frac{\varphi}{2n}\right) + \varphi\sin\varphi\,\frac{\sin\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}}$$

$$\frac{y}{R} = \sin\varphi\left(1 + 2n\sin^2\frac{\varphi}{2n}\right) - \varphi\cos\varphi\,\frac{\sin\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}}$$

Lässt man nun r unendlich gross werden, während R unverändert bleibt, rd

$n = \infty$, also $\frac{\varphi}{n}$ unendlich klein, $\frac{\sin\frac{\varphi}{n}}{\frac{\varphi}{n}} = 1$,

$$2n \sin^2 \frac{\varphi}{2n} = 2n \left(\frac{\varphi}{2n}\right)^2 = 0,$$

und somit

$$\frac{x}{R} = \cos\varphi + \varphi \sin\varphi$$

$$\frac{y}{R} = \sin\varphi - \varphi\cos\varphi$$

Dieses sind aber, wie wir oben gesehen haben, die Gleichungen der Kreisevolvente und es kann diese demnach als eine Epicycloide angesehen werden, bei welcher der Radius des rollenden Kreises unendlich gross ist.

13) Quadratur der logarithmischen Spirale.

Nach §. 81. Aufg. 8 ist

$$r = a^{\varphi}$$

die Gleichung dieser Curve. Nach §. 79 ist somit deren Inhalt

$$u = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi} a^{2\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{4la}(a^{2\varphi} - 1).$$

§. 121. Näherungsweise Bestimmung eines bestimmten Integrales.

Ist keine der früher gelehrten Methoden auf die Ermittelung eines vorgelegten bestimmten Integrales anwendbar, so muss man sich mit einem annähernden Resultate begnügen. Man kann zu einem solchen auf verschiedenen Wegen gelangen. Wir wollen nachstehend die einfachsten Methoden, welche zum Ziele führen, kennen lernen.

Erste Methode. Man suche die betreffende Function in eine, innerhalb der Integrationsgrenzen convergirende Reihe zu verwandeln und integrire nun diese durch Integration der einzelnen Glieder.

Zweite Methode. Da man das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

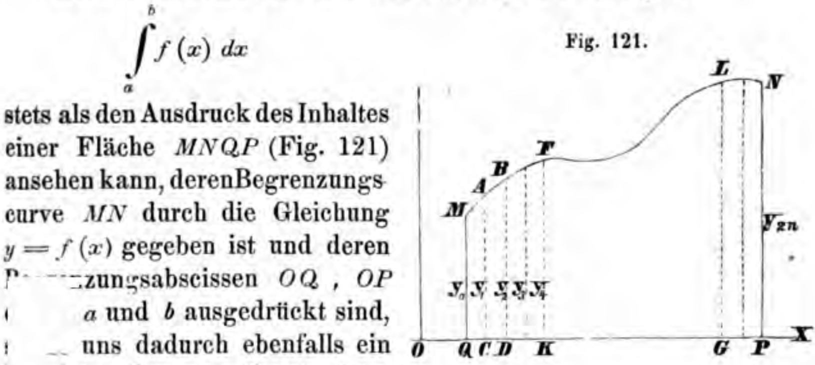


Fig. 121.

stets als den Ausdruck des Inhaltes einer Fläche $MNQP$ (Fig. 121) ansehen kann, derenBegrenzungs curve MN durch die Gleichung $y = f(x)$ gegeben ist und deren B[illegible]zungsabscissen OQ, OP [illegible] a und b ausgedrückt sind, [illegible] uns dadurch ebenfalls ein [illegible] gegeben, bestimmte Inte[illegible], welche sich etwa nicht nach den bisher gelehrten Methoden [illegible]n ermitteln lassen, annähernd zu bestimmen, indem wir jenen [illegible]henraum auf folgende Arten annähernd berechnen.

α) Theilen wir QP in n gleiche Theile, errichten in den Theilpunkten Ordinaten, so wird bei hinreichend grossem n der Flächenraum in schmale Streifen zerlegt, die man als Rechtecke betrachten kann. Bezeichnet man daher die Ordinaten von Q an gerechnet der Reihe nach durch $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ und setzt $PQ = nh$, so erhält man als annähernden Werth:

$$h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}).$$

β) Eine weitergehende Annäherung wird erreicht, wenn man jene Streifen als Paralleltrapeze, also MN als eine gebrochene Linie betrachtet. Es wird alsdann die betreffende Fläche

$$= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$= h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

γ) Noch mehr nähert man sich dem wahren Werthe, wenn man QP in eine gerade Anzahl ($2n$) gleicher Theile theilt und zwei unmittelbar auf einander folgende Streifen als parabolischen Streifen betrachtet. Man erhält alsdann nach §. 120 Beisp. 3. als Ausdruck des Flächenraumes:

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

$$= \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right]$$

Diese zur annähernden Berechnung bestimmter Integrale dienende Formel hat zuerst Simpson aufgestellt und heisst darum auch die Simpson'sche Formel.

Dritte Methode. Setzt man in der Taylor'schen Reihe §. 50 (16) $x = a$, $h = x - a$, so geht dieselbe über in:

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \ldots$$

Diese Gleichung ist giltig, wenn die Reihe der rechten Seite convergent ist. Unter dieser Voraussetzung hat man hiernach:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)\int_a^b dx + f'(a)\int_a^b (x - a)\,dx + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}\int_a^b (x - a)^2 \ldots$$

$$= (b - a) f(a) + \frac{(b - a)^2}{1 \cdot 2} f'(a) + \frac{(b - a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''(a)$$

oder wenn wir die Differenz

$$b - a = \delta$$

setzen,

$$\int_a^{a+\delta} f(x)\,dx = \delta\left[f(a) + \frac{\delta}{1\,.\,2} f'(a) + \frac{\delta^2}{1\,.\,2\,.\,3} f''(a) + \ldots\right]$$

Um nun die Kenntniss dieser einzelnen Differentialquotienten nicht voraussetzen zu müssen, nehmen wir an, es sei die innerhalb der Klammern stehende Reihe hinreichend genau gleich der Summe

$$Af(a) + Bf\left(a + \frac{\delta}{2}\right) + Cf(a + \delta)$$

oder der Summe

$$Af(a) + Bf\left(a + \frac{\delta}{5}\right) + Cf\left(a + \frac{2\delta}{5}\right) + Df\left(a + \frac{3\delta}{5}\right)$$
$$+ Ef\left(a + \frac{4\delta}{5}\right) + Ff(a + \delta)$$

u. s. w. je nachdem es die Genauigkeit des vorgelegten Integrales verlangt und wo $A, B, C, \ldots$ noch zu bestimmende Coefficienten bezeichnen.

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, es sei

$$Af(a) + Bf\left(a + \frac{\delta}{2}\right) + Cf(a + \delta) = f(a) + \frac{\delta}{2} f'(a) + \frac{\delta^2}{6} f''(a) + \ldots$$

so folgt, wenn man $f\left(a + \frac{\delta}{2}\right)$ und $f(a + \delta)$ nach der Taylor'schen Reihe entwickelt:

$$Af(a) + B\left[f(a) + \frac{\delta}{2} f'(a) + \frac{\delta^2}{8} f''(a) + \ldots\right]$$
$$+ C\left[f(a) + \delta f'(a) + \frac{\delta^2}{2} f''(a) + \ldots\right] = f(a)$$
$$+ \frac{\delta}{2} f'(a) + \frac{\delta^2}{6} f''(a) + \ldots$$

oder

$$+ C) f(a) + (B + 2C)\frac{\delta}{2} f'(a) + \left(\frac{3B}{4} + 3C\right)\frac{\delta^2}{6} f''(a) + \ldots$$
$$= f(a) + \frac{\delta}{2} f'(a) + \frac{\delta^2}{6} f''(a) + \ldots$$

ı nun die drei ersten Glieder der linken Seite mit den drei . Gliedern der rechten Seite in Uebereinstimmung zu bringen, ·· ir nach dem Satze von den unbestimmten Coefficienten:

$$A + B + C = 1$$
$$B + 2C = 1$$
$$\frac{3B}{4} + 3C = 1,$$

so ergibt sich hieraus:

$$A = \frac{1}{6} \; ; \; B = \frac{2}{3} \; ; \; C = \frac{1}{6}$$

und man kann somit auch annähernd setzen:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{\delta}{6}\left[f(a) + 4f\left(a + \frac{\delta}{2}\right) + f(a + \delta)\right] \quad . \quad . \quad (2)$$

Dieses Resultat stimmt mit dem aus der Simpson'schen Formel erhaltenen überein.

Setzt man

$$f(a) + \frac{\delta}{1\,.\,2} f'(a) + \frac{\delta^2}{1\,.\,2\,.\,3} f''(a) + \frac{\delta^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} f'''(a)$$
$$= Af(a) + Bf\left(a + \frac{\delta}{3}\right) + Cf\left(a + \frac{2\delta}{3}\right) + Df(a + \delta)$$

so erhält man zur Bestimmung von A, B, C, D die Gleichungen:

$$A + B + C + D = 1$$
$$B + 2C + 3D = \frac{3}{2}$$
$$B + 4C + 9D = 3$$
$$B + 8C + 27D = \frac{27}{4}$$

und hieraus

$$B = C = \frac{3}{8},$$
$$A = D = \frac{1}{8}.$$

Daher:

$$\int_a^{a+\delta} f(x)\, dx = \frac{\delta}{8}\left\{ f(a) + 3f\left(a + \frac{\delta}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2\delta}{3}\right) + f(\right.$$

Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die so erh– Näherungsformeln um so genauer werden, je mehr man Function– der Bildung obiger Summe annimmt.

Vierte Methode. Setzt man $b - a = \delta$, $a + \frac{1}{2}\delta = c$, also:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c-\frac{1}{2}\delta}^{c+\frac{1}{2}\delta} f(x)\,dx$$

und nun $$x = c + z,$$

so folgt, da die Integrationsgrenzen bezüglich z alsdann $-\frac{1}{2}\delta$ und $+\frac{1}{2}\delta$ sind,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{+\frac{1}{2}\delta} f(c+z)\,dz$$

oder da nach der Taylor'schen Reihe

$$f(c+z) = f(c) + zf'(c) + \frac{z^2}{2} f''(c) + \frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3} \cdot f''' c$$
$$+ \frac{z^4}{4!} f^{IV}(c) + \ldots\,.$$

auch:

$$\int_{-\frac{1}{2}\delta}^{+\frac{1}{2}\delta} f(c+z)\,dz = \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{+\frac{1}{2}\delta} f(c)\,dz + \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{+\frac{1}{2}\delta} f'(c)\,zdz + \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}\delta}^{+\frac{1}{2}\delta} f''(c)\,z^2dz + \ldots$$
$$= \delta f(c) + \frac{\delta^3}{2^2\,.\,3!} f''(c) + \frac{\delta^5}{2^4\,.\,5!} f^{IV}(c) + \ldots$$
$$= \delta\left[f(c) + \frac{\delta^2}{2^2\,.\,3!} f''(c) + \frac{\delta^4}{2^4\,.\,5!} f^{IV}(c) + \ldots\right].$$

Statt der Reihe innerhalb der Parenthesen führen wir nun wieder je nach der zu erzielenden Genauigkeit 2, 3 oder mehr Functionen, verbunden mit noch zu bestimmenden constanten Coefficienten ein. Angenommen, es sei

$$Af(c) + Bf(c + \alpha\delta) + Cf(c + \beta\delta) = f(c)$$
$$+ \frac{\delta^2}{4\,.\,3!} f''(c) + \frac{\delta^4}{16\,.\,5!} f^{IV}(c).$$

Entwickeln wir die Glieder der linken Seite nach der Taylor'schen Reihe, so folgt:

$$+ C) f(c) + \delta(B\alpha + C\beta) f'(c) + \frac{\delta^2}{2}(B\alpha^2 + C\beta^2) f''(c)$$
$$+ \frac{\delta^3}{2\,.\,3}(B\alpha^3 + C\beta^3) f'''(c) + \ldots = f(c)$$
$$+ \frac{\delta^2}{4\,.\,3!} f''(c) + \frac{\delta^4}{16.5!} f^{IV}(c) + \ldots$$

Damit nun wieder die ersten Glieder beider Seiten übereinstimmen, muss

$$A + B + C = 1 \ ; \ B\alpha + C\beta = 0 \ ; \ B\alpha^2 + C\beta^2 = \frac{1}{12} \ ;$$

$$B\alpha^3 + C\beta^3 = 0 \ ; \ B\alpha^4 + C\beta^4 = \frac{1}{80}$$

sein, woraus zunächst hervorgeht, dass $B = C$, $\alpha = -\beta$.

Vorstehende Gleichungen gehen dann über in:

$$A + 2B = 1 \ ; \ B\alpha^2 = \frac{1}{24} \ ; \ B\alpha^4 = \frac{1}{160}$$

woraus sich ergibt:

$$B = C = \frac{5}{18} \ ; \ A = \frac{4}{9} \ ; \ \alpha = -\beta = \frac{1}{10}\sqrt{15}$$

Man hat daher als Näherungswerth des bestimmten Integrales

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}\delta}^{+\frac{1}{2}\delta} f(x+z)\,dz = \delta\left[\frac{4}{9}f(c) + \frac{5}{18}f\left(c + \frac{\delta}{10}\sqrt{15}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{5}{18}f\left(c - \frac{\delta}{10}\sqrt{15}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wo $c = \frac{1}{2}(a + b)$ und $\delta = b - a$.

Beispiel.

Man soll $\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2}$ annähernd bestimmen.

Aufl. 1) Setzt man in (1)

$$a = 1 \ ; \ b = 2 \ ; \ h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$$

so folgt

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{6}\left[f(1) + f\left(\frac{7}{6}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{5}{3}\right) + f\left(\frac{11}{6}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{12}\left[f(2) - f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2} + \frac{36}{85} + \frac{9}{25} + \frac{4}{13} + \frac{9}{34} + \frac{36}{157}\right] + \frac{1}{21}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= 0{,}347537 - 0{,}025 = 0{,}322537.$$

Da bekanntlich auch

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tg\,2 - arc\,tg\,1 = arc\,tg\,\frac{1}{3}$$

und aus

$$tg\,\alpha = \tfrac{1}{3},\ \alpha = 18^0 26' 5{,}81''$$

und hieraus

$$arc\,tg\,\tfrac{1}{3} = 0{,}321750526$$

folgt, so ist das gefundene Resultat auf 2 Decimalstellen genau. Für $n > 6$ wäre dasselbe natürlich genauer ausgefallen.

2) Setzt man in (2)

$$a = 1\,,\ \delta = 2 - 1 = 1,$$

so wird

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{6}\left[f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right]$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{16}{13} + \frac{1}{5}\right) = 0{,}321794,$$

also auf 4 Decimalstellen genau.

3) Setzt man in (3):

$$a = 1\ ;\ b = 2\ ;\ \delta = 2 - 1 = 1\,,\ c = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{3}{2},$$

so folgt:

$$\int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4}{9} f\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{5}{18} f\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{10}\sqrt{15}\right) + \frac{5}{18} f\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{10}\sqrt{15}\right)$$
$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{13} + \frac{5}{18}\cdot\frac{10}{34+3\sqrt{15}} + \frac{5}{18}\cdot\frac{10}{34-3\sqrt{15}}$$
$$= \frac{16}{117} + \frac{25}{9}\cdot\frac{68}{1021} = 0{,}321755.$$

also auf 5 Decimalstellen genau.

§. 122. Rectification ebener Curven.

1) Unter der Rectification einer Curve versteht man die Auffindung der Länge eines gewissen Bogens derselben. Die Bestimmung des Bogens geschieht durch Angabe der Abscissen seiner Grenzpunkte.

Nach §. 10 ist für rechtwinklige Coordinaten der Differentialquotient des Bogens

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Man erhält somit für die Länge des durch die Grenzpunkte

$$x = a\,,\ x = b$$

[illegible]en und gleichzeitig mit x wachsenden Bogens

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Anmerk. Zu demselben Resultate gelangt man auch direct auf folgende Weise: Stellt AB (Fig. 122) einen nach unten concaven Bogen dar, ist also $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, so nimmt $\frac{dy}{dx}$ mit wachsendem x stets ab und es lässt sich nun leicht zeigen, wenn AA_1, BB_1 die in den Punkten A und B gezogenen Berührenden sind, dass

Fig. 122.

$$AA_1 > arc\,AB > BB_1$$

oder, wenn wir $Oa = a$, $Ob = a + \delta$ setzen und $y = f(x)$ die Gleichung der betreffenden Curve ist, dass

$$\delta\sqrt{1 + [f'(x)]^2} > arc\,AB > \delta\sqrt{1 + [f'(x + \delta)]^2}$$

Denkt man sich nun ab in n gleiche Theile, wovon jeder $= h$ sei, getheilt, in den Theilpunkten die entsprechenden Ordinaten errichtet und für jedes Bogenelement vorstehende Ungleichheit niedergeschrieben und sämmtliche Ungleichungen addirt, so folgt:

$$h\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \\ + \sqrt{1 + [f'(x + h)]^2} \\ + \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ + \sqrt{1 + [f'(x + (n - 1)\,h)]^2}\end{array}\right\} > arc\,AB > h\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1 + [f'(x + h)]^2} \\ + \sqrt{1 + [f'(x + 2h)]^2} \\ + \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ + \sqrt{1 + [f'(x + nh)]^2}\end{array}\right\}$$

oder

$$S_1 > arc\,AB > S.$$

Nun ist aber

$$S - S_1 = h\left\{\sqrt{1 + [f'(x + nh)]^2} - \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\right\}$$

und wird somit unendlich klein, wenn wir h in's Unendliche abnehmen lassen.

Man hat daher $\qquad lim\,S = lim\,S_1 = arc\,AB$

oder nach dem Begriffe des bestimmten Integrales,

$$arc\,AB = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx$$

Nehmen wir an, es sei AB convex nach unten, so bleibt die Entwickelung dieselbe, nur hat man das Zeichen $>$ durch $<$ zu ersetzen.

Da man nun jeden Bogen in solche Theile zerlegen kann, dass dieselben ihrer ganzen Länge nach concav oder convex nach unten sind, so ist vorstehende Rectificationsformel von allgemeiner Giltigkeit.

Nimmt der Bogen ab, wenn die Abscisse wächst, so ist zu setzen

$$s = -\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \;. \quad (1a)$$

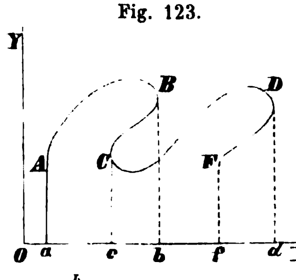


Fig. 123.

Hiernach wäre die Länge des Bogens AF der Curve (Fig. 123), wenn den Abscissen $x = a, b, \ldots f$ die tangirenden Ordinaten $Aa, Bb \ldots Ff$ entsprechen, ausgedrückt durch:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx - \int_b^c \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx + \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx -$$

$$\int_d^f \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

2) Sind x und y Functionen der Unabhängigen t, so wird der Bogen

$$s = \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

3) Bei Zugrundelegung von Polarcoordinaten erhält man nach §. 78 aus der Gleichung

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}$$

unmittelbar für die Länge des durch $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \beta$ bestimmten Bogens

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Beispiele.

1) Rectification der Parabel.

Aufl. Aus der Parabelgleichung

$$y^2 = px$$

folgt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{p}{2y}\right)^2 = \frac{p^2}{4px} = \frac{p}{4x}$$

und man erhält daher nach (1) für die Länge eines Bogenstückes vom Scheitel bis zum Punkte, welchem die Abscisse x entspricht:

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{p}{4x}}\, dx.$$

Zur Bestimmung von $\int \sqrt{1 + \frac{p}{4x}}\, dx$ setzen wir $\sqrt{1 + \frac{p}{4x}} = z$,

also

$$1 + \frac{p}{4x} = z^2, \; x = \frac{p}{4(z^2 - 1)}, \; \frac{dx}{dz} = -\frac{p}{2} \frac{z}{(z^2 - 1)^2};$$

so folgt:

$$\int \sqrt{1 + \frac{p}{4x}}\, dx = -\frac{p}{2} \int \frac{z^2 dz}{(z^2 - 1)^2}$$

[illegible]h §. 90 Beisp. 6

$$-\frac{p}{8}\left(l\,\frac{z-1}{z+1} - \frac{2z}{z^2 - 1}\right) = \frac{p}{8}\left(\frac{2z}{z^2 - 1} + l\,\frac{z+1}{z-1}\right)$$

[illegible]rt man nun den Werth von z wieder ein, so geht dieser Ausdruck

$$\frac{1}{2}\sqrt{x(p + 4x)} + \frac{p}{8}\, l\, \frac{p + 8x + 4\sqrt{x(p + 4x)}}{p}$$

und man hat daher für den verlangten Parabelbogen:

$$\int_0^x \sqrt{1+\frac{p}{4x}}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{x(p+4x)} + \frac{p}{8}\,l\,\frac{p+8x+4\sqrt{x(p+4x)}}{p} \quad (1')$$

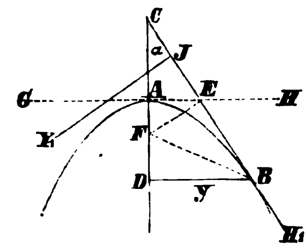
$$= \frac{1}{2}\sqrt{x(p+4x)} + \frac{p}{8}\,l\left(\frac{\sqrt{p+4x}+\sqrt{4x}}{\sqrt{p}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x(p+4x)} + \frac{p}{4}\,l\,\frac{\sqrt{p+4x}+\sqrt{4x}}{\sqrt{p}}$$

$$= \frac{y}{2p}\sqrt{4y^2+p^2} + \frac{p}{4}\,l\,\frac{\sqrt{4y^2+p^2}+2y}{p} \quad \ldots \quad (2')$$

Anmerk. Bezeichnet t die Länge der im Endpunkte B (Fig. 124) des Bogens AB gezogenen Tangente BC, so ist bekanntlich

Fig. 124.



$$t^2 = y^2 + 4x^2 = \frac{y^2(4y^2+p^2)}{p^2}$$

also

$$t = \frac{y}{p}\sqrt{4y^2+p^2}$$

und somit nach (2') der Bogen

$$AB = \frac{t}{2} + \frac{p}{4}\,l\,\frac{\sqrt{4y^2+p^2}+2y}{p}$$

oder wenn man

$$\measuredangle\, BCD = \alpha$$

setzt,

$$AB = \frac{t}{2} + \frac{p}{4}\,l\cot\frac{\alpha}{2} = \frac{t}{2} - \frac{p}{4}\,l\,tg\,\frac{\alpha}{2},$$

also

$$\cos\alpha = \frac{2x}{t} = \frac{2\frac{y^2}{p}}{\frac{y}{p}\sqrt{4y^2+p^2}} = \frac{2y}{\sqrt{4y^2+p^2}}$$

und

$$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \cot^2\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{\sqrt{4y^2+p^2}+2y}{p}\right)^2$$

Ist nun F der Brennpunkt, GH die Tangente im Scheitel, so steht $FE \perp BC$*) und man hat daher:

$$FE = \frac{t}{2}\,tg\,\alpha = \frac{t\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{y}{2\cos\alpha}$$

oder da auch

$$tg\,\alpha = \frac{y}{2x} = \frac{p}{2y},$$

also

$$y = \frac{p}{2\,tg\,\alpha} = \frac{p\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

ist,

$$FE = \frac{p}{4\sin\alpha}.$$

---

*) Denn es ist $FB = FC = x + \frac{p}{4}$; $AC = AD$, also auch $CE =$ somit $FE \perp BC$.

Denkt man sich nun den Bogen $AB = s$ nach BJ getragen, JX_1 als Abscissenachse und JY_1 als Ordinatenachse angenommen, so erhält man für die Coordinaten des Brennpunktes F bezüglich dieses neuen Achsensystemes:

$$JE = x_1 = s - \frac{t}{2} = -\frac{p}{4}\, l\,tg\,\frac{\alpha}{2}\,;\quad FE = y_1 = \frac{p}{4 \sin\alpha}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen resultirt:

$$-\frac{4x_1}{p} = l\,tg\,\frac{\alpha}{2} \text{ oder } e^{-\frac{4x_1}{p}} = tg\frac{\alpha}{2} \text{ und } e^{\frac{4x_1}{p}} = cot\,\frac{\alpha}{2},$$

somit

$$e^{-\frac{4x_1}{p}} + e^{\frac{4x_1}{p}} = tg\,\frac{\alpha}{2} + cot\,\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sin\alpha};$$

aus der zweiten folgt:

$$\frac{1}{2 \sin\alpha} = \frac{2y_1}{p}, \text{ also } \frac{2}{\sin\alpha} = \frac{8y_1}{p}$$

und man hat daher

$$\frac{8y_1}{p} = e^{\frac{4x_1}{p}} + e^{-\frac{4x_1}{p}}$$

oder

$$y_1 = \frac{p}{8}\left(e^{\frac{4x_1}{p}} + e^{-\frac{4x_1}{p}}\right) = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

wenn man nämlich $\frac{p}{4} = m$ setzt.

Diese Gleichung repräsentirt also diejenige Curve, welche der Brennpunkt beschreibt, wenn die Parabel, ohne zu gleiten, auf einer festen Geraden fortrollt. Diese Curve heisst Kettenlinie.

2) Rectification der Kettenlinie.

Es sei $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ die Gleichung der Kettenlinie, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}} - \frac{1}{a}e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right),$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

Daher:

$$\int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = dx\,\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

-t aber

$$\left(\frac{2y}{a}\right)^2 = e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2,$$

al

$$\sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2 - 4} = e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} = \frac{2}{a}\sqrt{y^2 - a^2}$$

und somit auch
$$\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{y^2-a^2}$$
welcher Ausdruck sich leicht construiren lässt.

3) Rectification der Ellipse.

Aus der Mittelpunktsgleichung
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ oder } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$
folgt
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
und man hat daher nach (1) für den durch die Abscissen $x=0$ bis $x=x$ bezeichneten Bogen
$$s=\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_0^x \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$
$$=\int_0^x \sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2-x^2)}}\,dx.$$
Setzt man
$$a^2-b^2=\alpha^2a^2,$$
also
$$\alpha^2=\frac{a^2-b^2}{a^2},$$
so geht vorstehendes Integral über in:
$$s=\int_0^x \sqrt{\frac{a^2-\alpha^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx.$$

Da dieses Integral sich nicht in endlicher Form darstellen lässt, so suchen wir den betreffenden Ausdruck in eine convergirende Reihe zu verwandeln. Berücksichtigt man zu diesem Ende, dass $\frac{x}{a}$ stets ein ächter Bruch ist, man also setzen kann
$$x=a\cos\varphi\,,\ \frac{dx}{d\varphi}=-a\sin\varphi$$
so folgt
$$s=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\sqrt{\frac{1-\alpha^2\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi}}\,\sin\varphi\,d\varphi=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\sqrt{1-\alpha^2\cos^2\varphi}\,d\varphi$$
$$=-a\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\cos^2\varphi-\frac{1}{2}\,\frac{\alpha^4}{4}\cos^4\varphi-\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{\alpha^6}{6}\cos^6\varphi\right)\ldots.$$

Da nun allgemein nach §. 104 (16)
$$\int\cos^n x\,dx=\frac{\sin x\cos^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}x\,dx$$

so erhält man der Reihe nach:

$$\int cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} sin\,\varphi\, cos\,\varphi + \frac{1}{2}\varphi$$

$$\int cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4} sin\,\varphi\, cos^3\varphi + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} sin\,\varphi\, cos\,\varphi + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\varphi$$

$$\int cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{1}{6} sin\,\varphi\, cos^5\varphi + \frac{1 \,.\, 5}{4 \,.\, 6} sin\,\varphi\, cos^3\varphi + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} sin\,\varphi\, cos\,\varphi$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\varphi \text{ u. s. w.}$$

folglich ist

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} sin\,\varphi\, cos\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{1}{4} sin\,\varphi\, cos^3\varphi + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4} sin\,\varphi\, cos\,\varphi + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} cos^6\varphi\, d\varphi = \frac{1}{6} sin\,\varphi\, cos^5\varphi + \frac{1 \,.\, 5}{4 \,.\, 6} sin\,\varphi\, cos^3\varphi + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} sin\,\varphi\, cos\,\varphi$$
$$+ \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \text{ u. s. w.}$$

Führt man diese Werthe in obige Reihe ein und setzt sogleich $x = a$, also $\varphi = 0$ und $cos\,\varphi = 1$, so erhält man für die Bogenlänge des elliptischen Quadranten

$$s = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\right)^2 \alpha^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\right)^2 \alpha^6 - \frac{1}{7}\left(\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8}\right)^2 \alpha^8 - \ldots\right]$$

Für $a = b$, also $\alpha = 0$ wird hieraus der Bogen des Kreisquadranten

also der ganze Umfang $= 2\pi a$.

4) Rectification der Hyperbel.

der Mittelpunktsgleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ oder } y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

folgt
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$
und für den Bogen innerhalb der Abscissen $x = a$ bis $x = x$ erhält man somit:
$$s = \int_a^x \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{x^2 - a^2}}\, dx = \int_a^x \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)\, x^2 - a^4}{a^2 (x^2 - a^2)}}\, dx.$$
oder wenn man analog wie vorhin
$$a^2 + b^2 = \beta^2 a^2\,,\ \beta^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$$
setzt,
$$s = \int_a^x \sqrt{\frac{\beta^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}\, dx.$$

Da $x > a$, so setze man
$$a = x \cos\varphi\,,\ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{a \sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,,$$
also:
$$s = a \int_0^\varphi \sqrt{\frac{\beta^2 - \cos^2\varphi}{1 - \cos^2\varphi}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi$$
$$= a \int_0^\varphi \frac{1}{\cos^2\varphi} \sqrt{\beta^2 - \cos^2\varphi}\, d\varphi = a \int_0^\varphi \frac{\beta}{\cos^2\varphi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\beta^2}}\, d\varphi$$
$$= a \int_0^\varphi \frac{\beta}{\cos^2\varphi} \left[1 - \frac{1}{2\beta^2} \cos^2\varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\beta^4} \cos^4\varphi - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{1}{6\beta^6} \cos^6\varphi - \ldots\right] d\varphi$$
$$= a \int_0^\varphi \left[\frac{\beta}{\cos^2\varphi} - \frac{1}{2\beta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\beta^3} \cos^2\varphi - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{1}{6\beta^5} \cos^4\varphi - \ldots\right] d\varphi\,,$$
wo nun die einzelnen Integrale wie vorhin bestimmt werden können.

Man erhält nämlich:
$$s = a \left[\beta\, tg\,\varphi - \frac{1}{2\beta}\varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\beta^3} \left(\frac{1}{2} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right)\right.$$
$$- \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{1}{6\beta^5} \left(\frac{1}{4} \sin\varphi \cos^3\varphi + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\varphi\right)$$
$$- \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{1}{8\beta^7} \left(\frac{1}{6} \sin\varphi \cos^5\varphi + \frac{1\,.\,5}{4\,.\,6} \sin\varphi \cos^3\varphi\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\varphi\right) - \ldots\right].$$

Nun ist aber (Fig. 125)

$$a\beta \, tg\, \varphi = B_1 C_1$$

und wenn man daher $B_1 C_1 = t$ setzt, so folgt:

$$t - s = a\left[\frac{1}{2\beta}\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\beta^3}\left(\frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi\right) + \ldots\right]$$

Fig. 125

Für $x = \infty$ wird $\cos\varphi = 0$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und somit für diesen Fall:

$$\lim\,(t - s) = a\left[\frac{1}{2\beta}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\beta^3}\cdot\frac{\pi}{4} + \ldots\right]$$

$$= \frac{a\pi}{4\beta}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2\beta^2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\frac{1}{3\beta^4} + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\frac{1}{4\beta^6} + \ldots\right]$$

Die Differenz zwischen der ganzen Asymptote und dem ganzen Hyperbelbogen ist daher eine endliche Grösse.

5) Rectification der Cardioide.

Aufl. Nach der ersten Aufgabe des §. 81 ist

$$r = 2a\,(1 + \cos\varphi)$$

die Polargleichung der Cardioide,

also
$$\frac{dr}{d\varphi} = -\,2a\sin\varphi$$

und somit nach (2) die Länge des durch $\varphi = \alpha$ und $\varphi = \beta$ bestimmten Bogens

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + 4a^2\sin^2\varphi}\;d\varphi = \int_\alpha^\beta 2a\sqrt{2\,(1 + \cos\varphi)}\;d\varphi$$

$$= \int_\alpha^\beta 2a\sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\;d\varphi = 4a\int_\alpha^\beta \cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8a\int_\alpha^\beta \cos\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\,\frac{\varphi}{2}}{d\varphi}\,d\varphi$$

$$= 8a\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Setzt man $\alpha = 0$, $\beta = \pi$, so folgt für den halben Umfang $= 8a$, also ist der ganze Umfang $= 16a$.

6) Rectification der Cissoide.

[illegible]fl. Nach der zweiten Aufgabe des §. 81 ist

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

[illegible]chung der Cissoide und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a - x)\,x^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{3}{2}}}$$

also nach (1) die Länge des durch $x = 0$ und $x = x$ begrenzten Bogens

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{(3a - x)^2 x}{(2a - x)^3}}\, dx = a \int_0^x \sqrt{\frac{8a - 3x}{(2a - x)^3}}\, dx.$$

Um nun das bestimmte Integral $\int_0^x \sqrt{\frac{8a - 3x}{(2a - x)^3}}\, dx$ zu ermitteln, setzen wir

$$\frac{8a - 3x}{2a - x} = z^2,$$

also
$$x = \frac{2a(4 - z^2)}{3 - z^2} = \frac{2a(3 - z^2 + 1)}{3 - z^2} = 2a + \frac{2a}{3 - z^2},$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{4az}{(3 - z^2)^2},$$

so geht

$$\int \sqrt{\frac{8a - 3x}{(2a - x)^3}}\, dx = \int \frac{1}{2a - x} \sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}}\, dx$$

über in:

$$-2\int \frac{z^2}{3 - z^2}\, dz = 2\int \frac{3 - z^2 - 3}{3 - z^2}\, dz = 2z + 6\int \frac{dz}{z^2 - 3}$$

und ist somit nach §. 90 Beisp. 7:

$$= 2z + \frac{6}{2\sqrt{3}}\, l\, \frac{z - \sqrt{3}}{z + \sqrt{3}} = 2z + \sqrt{3}\, l\, \frac{z - \sqrt{3}}{z + \sqrt{3}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}} + \sqrt{3}\, l\, \frac{1}{a}\left[7a - 3x - \sqrt{3(8a - 3x)(2a - x)}\right]$$

Man hat daher:

$$s = a\left\{2\sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}} + \sqrt{3}\, l\, \frac{1}{a}\left[7a - 3x - \sqrt{3(8a - 3x)(2a - x)}\right] - 4 - \sqrt{3}\, l\,(7 - 4\sqrt{3})\right\}$$

7) Rectification der gemeinen Cycloide.

Aufl. Nach der vierten Aufgabe des §. 81 ist für die gemeine Cycloide

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ry - y^2}}{y}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ry - y^2}},$$

also

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\frac{dy}{dx}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}$$

und somit der Bogen von $y = 0$ bis $y = y$:

$$s = \int_0^y \sqrt{\frac{y^2}{2ry - y^2} + 1}\, dy = \sqrt{2r} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{2r - y}}$$

oder da

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2r - y}} = -\int \frac{d\,(2r - y)}{\frac{dy}{\sqrt{2r - y}}}\, dy = -2\sqrt{2r - y}$$

$$s = -2\sqrt{2r\,(2r - y)} + \sqrt{2r}\,.\,2\sqrt{2r} = 4r - 2\sqrt{2r\,(2r - y)}.$$

Setzt man $y = 2r$, so findet man für den halben Cycloidenbogen $4r$, also ist der ganze Bogen $= 8r$ d. h. gleich dem vierfachen Durchmesser des beschreibenden Kreises.

8) Rectification der Epicycloide.

Aufl. Nach §. 81 Aufg. 5 ist, wenn man der Kürze halber $\frac{R}{r} = n$ setzt,

$$\frac{dx}{d\varphi} = (R + r)\,[\sin\,(n + 1)\,\varphi - \sin\varphi]$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = (R + r)\,[\cos\varphi - \cos\,(n + 1)\,\varphi],$$

also

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = (R + r)^2\,(2 - 2\cos n\varphi)$$

$$= (R + r)^2\, 4\sin^2 \frac{n\varphi}{2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = 2\,(R + r)\,\sin\frac{n\varphi}{2}$$

und

$$\int \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = +\frac{4}{n}\,(R + r) \int \frac{n}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$= -\frac{4}{n}\,(R + r)\cos\frac{n\varphi}{2} + C.$$

Für ein durch $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ bestimmtes Bogenstück erhält man daher:

$$s = \frac{4\,(R + r)}{n}\left[1 - \cos\frac{n\varphi}{2}\right] = \frac{8}{n}\,(R + r)\sin^2\frac{n\varphi}{4}$$

c nach der Andeutung zu §. 81 Aufg. 5, $n\varphi = \psi$ ist, auch:

$$s = \frac{8}{n}\,(R + r)\sin^2\frac{\psi}{4} = \frac{8r\,(R + r)}{R}\sin^2\frac{\psi}{4}.$$

$\psi = 2\pi$ folgt als Länge des ganzen Curvenastes

$$s = \frac{8r\,(R + r)}{R}$$

9) Rectification der archimedischen Spirale.

Aufl. Nach dem Beisp. des §. 80 ist $r = \frac{\varphi}{2\pi}$ deren Polargleichung, also $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{2\pi}$ und somit der durch $\varphi = 0$ und $\varphi = \varphi$ bestimmte Bogen

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{r^2 + \frac{1}{4\pi^2}}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^\varphi \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi.$$

Nach §. 97 (18) ist aber

$$\int \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi = \frac{\varphi}{2}\sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2}\, l\,(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})$$

und somit der verlangte Bogen

$$s = \frac{1}{4\pi}\,[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + l\,(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2})]$$

10) Rectification der logarithmischen Spirale.

Aufl. Nach Aufg. 8 des §. 81 ist $r = a^\varphi$ die Polargleichung dieser Curve, also

$$\frac{dr}{d\varphi} = a^\varphi la = rla$$

und somit die Länge des den Grenzen $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi$ entsprechenden Bogens

$$s = \int_0^\varphi \sqrt{r^2 + a^{2\varphi} l^2 a}\, d\varphi = \sqrt{1 + l^2 a}\int_0^\varphi a^\varphi\, d\varphi.$$

Da nun $\int a^\varphi\, d\varphi = \frac{a^\varphi}{la}$, so folgt:

$$s = \frac{\sqrt{1 + l^2 a}}{la}\, a^\varphi - \frac{\sqrt{1 + l^2 a}}{la} = (a^\varphi - 1)\, \frac{\sqrt{1 + l^2 a}}{la}$$

11) Rectification der Lemniscate.

Aufl. Nach Aufg. 6 des §. 81 ist

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

die Polargleichung der Lemniscate.

Hieraus folgt:

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{r}$$

und es ist somit die Länge des den Polarwinkeln $\varphi = 0$ bis $\varphi =$
sprechenden Bogens

$$s = \int_0^{\varphi} \sqrt{r^2 + \frac{a^4 sin^2 2\varphi}{r^2}}\, d\varphi = \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{r^4 + a^4 sin^2 2\varphi}{r^2}}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{a^4\,(cos^2 2\varphi + sin^2 2\varphi)}{a^2 cos\, 2\varphi}}\, d\varphi = a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{cos\, 2\varphi}}$$

$$= a \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2 sin^2\varphi}} = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \left(\frac{1}{2} - sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Da φ niemals grösser als $\frac{\pi}{4}$ sein wird, so kann man nun

$$\left(\frac{1}{2} - sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}$$

nach dem binomischen Satze entwickeln und dann die Integrale der einzelnen Glieder nach dem Früheren bestimmen.

12) Rectification der Kreisevolvente.

Fig. 126.

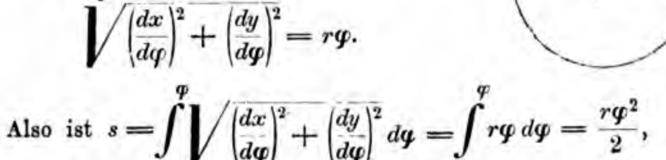
Die Gleichungen derselben sind nach §. 81. 5. Anmerk. 4:

$$x = r\, cos\,\varphi + r\varphi\, sin\,\varphi,$$
$$y = r\, sin\,\varphi - r\varphi\, cos\,\varphi.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{d\varphi} = r\varphi\, cos\,\varphi$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r\varphi\, sin\,\varphi$$



$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = r\varphi.$$

Also ist $s = \int_0^{\varphi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int_0^{\varphi} r\varphi\, d\varphi = \frac{r\varphi^2}{2}$,

d. h. (Fig. 126) $arc\, BP = \frac{1}{2} AD$, wenn $DP \perp CP$.

§. 123. Cubatur der Rotationskörper.

¹) Unter Cubatur eines Rotationskörpers versteht man die Be-
ng dessen Cubikinhaltes.

r den Inhalt des den Abscissen $x = a$, $x = b$ entsprechenden
heiles erhält man aus §. 13 unmittelbar den Ausdruck:

$$u = \pi \int_a^b y^2\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

2) Sind y und x Functionen von t, so ist der Differentialquotient des Inhaltes $\frac{du}{dt} = \pi y^2 \frac{dx}{dt}$ und daher der Inhalt des Rotationskörpers

$$u = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \frac{dx}{dt} dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

3) Setzt man in Gl. (1):

$$y = r \sin \varphi \; ; \; x = r \cos \varphi$$

wo r und φ Functionen von t sind, so erhält man, in Polarcoordinaten ausgedrückt, für den Cubikinhalt:

$$u = \pi \int_{t_1}^{t_2} r^2 \sin^2 \varphi \left(- r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos \varphi \frac{dr}{dt} \right) dt \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Für $t = \varphi$ folgt hieraus:

$$u = \pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin^2 \varphi \left(- r \sin \varphi + \cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} \right) d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Beispiele.

1) Cubatur des Paraboloides.

Für den innerhalb der Abscissen $x = 0$ und $x = x$ liegenden Körpertheil erhält man unmittelbar:

$$u = \pi \int_0^x px\, dx = \pi p \int_0^x x\, dx$$

oder da $\int x\, dx = \frac{x^2}{2}$ ist,

$$u = \frac{1}{2} \pi p x^2 = \frac{1}{2} \pi y^2 x.$$

Ein Paraboloid ist also gleich der Hälfte des umschriebenen Cylinders.

2) Cubatur des Ellipsoides.

Wird die grosse Achse als Rotationsachse angenommen, so erhält man

$$u = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^x (a^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{\pi b^2}{3a^2} (3a^2 x - x^3)$$

und wenn die kleine Achse als Rotationsachse angesehen wird,

$$u = \frac{\pi a^2}{b^2} \int_0^x (b^2 - x^2)\, dx = \frac{\pi a^2}{3b^2} (3b^2 x - x^3)$$

Setzt man $x = a$, so findet man für den Kubikinhalt des ganzen Ellipsoides im ersten Falle $= \frac{4\pi ab^2}{3}$ und im zweiten Falle $= \frac{4\pi ba^2}{3}$.

Wenn $b = a$ wird, so geht das Ellipsoid in eine Kugel über und der Kubikinhalt wird $= \frac{4\pi a^3}{3}$.

3) Cubatur des Hyperboloides.

Die Mittelpunktsgleichung ist bekanntlich

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$$

und somit der Kubikinhalt des innerhalb der Grenzen $x = a$ bis $x = x$ liegenden Körpertheiles

$$u = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_a^x (x^2 - a^2)\,dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(\frac{x^3}{3} - a^2x + \frac{2a^3}{3}\right)$$

4) Eine Cycloide ASN (Fig. 95) dreht sich um die Achse AX, man soll den Kubikinhalt des betreffenden Rotationskörpers bestimmen.

Aufl. Aus der Cycloidengleichung

$$x = r \arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry - y^2}$$

folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}}$$

und wenn man nun $\pi\int_0^x y^2\,dx$ in ein anderes Integral nach y umformt, so wird der Kubikinhalt

$$u = \pi\int_0^y y^2\sqrt{\frac{y}{2r-y}}\,dy.$$

Setzt man nun

$$\sqrt{\frac{y}{2r-y}} = z\,,\ \frac{y}{2r-y} = z^2\,;\ y = \frac{2rz^2}{1+z^2},$$

also

$$\frac{dy}{dz} = \frac{4rz}{(1+z^2)^2},$$

so folgt:

$$\pi\int y^2\sqrt{\frac{y}{2r-y}}\,dy = 16\pi r^3\int\frac{z^6}{(1+z^2)^4}\,dz$$

$$16\pi r^3\int\left[\frac{1}{1+z^2} - \frac{3}{(1+z^2)^2} + \frac{3}{(1+z^2)^3} - \frac{1}{(1+z^2)^4}\right]dz.$$

Nach §. 85. a. Beisp. 6 ist aber allgemein:

$$\frac{dz}{(1+z^2)^m} = \frac{z}{2(m-1)(1+z^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}$$

und somit

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = arctg\, z\,; \int \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \frac{z}{2(1+z^2)} + \tfrac{1}{2}\, arctg\, z;$$

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^3} = \frac{3z^3+5z}{8(1+z^2)^2} + \frac{3}{8}\, arctg\, z$$

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^4} = \frac{z}{48(1+z^2)^3}\,[15z^4+40z^2+33] + \frac{5}{16}\, arctg\, z.$$

Durch Einführung dieser Werthe geht obiger Ausdruck über in:

$$5\pi r^3 arctg\, z - \frac{\pi r^3 z}{3(1+z^2)^3}\,(33z^4+40z^2+15)$$

und wenn man nun wieder z in y ausdrückt und berücksichtigt, dass für $y=0$ auch $z=0$ wird, so erhält man nach gehöriger Reduction:

$$u = 5\pi r^3 arctg \sqrt{\frac{y}{2r-y}} - \frac{\pi}{6}\,(2y^2+5ry+15r^2)\sqrt{2ry-y^2}.$$

Für $y=2r$ folgt hieraus $\frac{5\pi^2 r^3}{2}$ als Kubikinhalt des halben und somit $5\pi^2 r^3$ als Inhalt des ganzen Rotationskörpers.

Um auch den Kubikinhalt im Wälzungswinkel auszudrücken, setzen wir nach Beisp. 4 des §. 81:

$$x = r\varphi - r\sin\varphi = r(\varphi - \sin\varphi)$$
$$y = r - r\cos\varphi = r(1-\cos\varphi)$$

also
$$\frac{dx}{d\varphi} = r(1-\cos\varphi),$$

so folgt:

$$u = \pi\int_0^{\varphi} y^2 \frac{dx}{d\varphi}\, d\varphi = \pi r\int_0^{\varphi} y^2(1-\cos\varphi)\, d\varphi = \pi r^3\int_0^{\varphi}(1-\cos\varphi)^3\, d\varphi$$

$$= \pi r^3\int_0^{\varphi}(1-3\cos\varphi+3\cos^2\varphi-\cos^3\varphi)\, d\varphi$$

$$= \pi r^3\left[\varphi - 3\sin\varphi + \frac{3}{2}\int_0^{\varphi}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{4}\int_0^{\varphi}(\cos 3\varphi + 3\cos\varphi)^{*)}\, d\varphi\right]$$

$$= \pi r^3\left[\varphi - 3\sin\varphi + \frac{3}{2}\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{12}\sin 3\varphi - \frac{3}{4}\sin\varphi\right]$$

$$= \pi r^3\left[\frac{5}{2}\varphi - \frac{15}{4}\sin\varphi + \frac{3}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{12}\sin 3\varphi\right].$$

Für $\varphi = \pi$ findet man $\frac{5}{2}\pi^2 r^3$ als Hälfte des Inhaltes wie vor.

---

*) Vergl. E. Tr. §. 16.

5) Die Cycloide ASN (Fig. 95) dreht sich um die Achse ST, man soll den Kubikinhalt des erzeugten Rotationskörpers bestimmen.

Aufl. Wird S als Coordinatenursprung angesehen, so ist nach §. 81, Beisp. 4.

$$x = r - r\cos\varphi\,;\; y = r\varphi + r\sin\varphi\,;\; \frac{dx}{d\varphi} = r\sin\varphi$$

und somit der Inhalt

$$u = \pi\int_0^\varphi y^2\frac{dx}{d\varphi}\,d\varphi = \pi r^3\int_0^\varphi(\varphi^2 + 2\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \pi r^3\int_0^\varphi(\varphi^2\sin\varphi + 2\varphi\sin^2\varphi + \sin^3\varphi)\,d\varphi.$$

Nun ist aber nach §. 104. (18) und (22):

$$\int\varphi^2\sin\varphi\,d\varphi = -\varphi^2\cos\varphi + 2\int\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

und $$\int\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \varphi\sin\varphi - \int\sin\varphi\,d\varphi = \varphi\sin\varphi + \cos\varphi,$$

also $$\int\varphi^2\sin\varphi\,d\varphi = -\varphi^2\cos\varphi + 2\varphi\sin\varphi + 2\cos\varphi.$$

Ferner ist

$$\int\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\varphi\,(1-\cos2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{1}{2}\int\varphi\cos2\varphi\,d\varphi$$

und

$$\int\varphi\cos2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\sin2\varphi - \frac{1}{2}\int\sin2\varphi\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}\varphi\sin2\varphi + \frac{1}{4}\cos2\varphi,$$

also auch

$$\int\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{1}{4}\varphi\sin2\varphi - \frac{1}{8}\cos2\varphi$$

und endlich

$$\int\sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{1}{4}\int(-\sin3\varphi + 3\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\cos3\varphi - 3\cos\varphi\right)$$
$$= \frac{1}{12}\cos3\varphi - \frac{3}{4}\cos\varphi.$$

ırch Einführung dieser Werthe wird der Inhalt

$$\frac{\pi r^3}{2}(\cos3\varphi - 3\cos2\varphi - 6\varphi\sin2\varphi - 12\varphi^2\cos\varphi + 15\cos\varphi$$
$$+ 24\varphi\sin\varphi + 6\varphi^2 - 13).$$

'zt man hierin $\varphi = \pi$, so findet man den Inhalt des ganzen Körpers

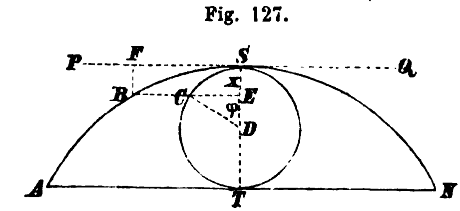
$$= \frac{\pi r^3}{6}(9\pi^2 - 16).$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ findet man als Inhalt des entsprechenden Rotationskörpers

$$\frac{\pi r^3}{12}(3\pi^2 + 24\pi - 20).$$

6) Die Cycloide ASN (Fig. 127) rotirt um die im Scheitel S gezogene Tangente; man soll den hierdurch erzeugten Rotationskörper berechnen.

Fig. 127.



Aufl. Ist S der Coordinatenursprung, $SE = x$, $BE = y$, so hat man analog wie in §. 120, Aufg. 8:

$$x = r\varphi + r\sin\varphi$$
$$y = r - r\cos\varphi$$

Führt man aus diesen Gleichungen die betreffenden Werthe in die Inhaltsformel (2) ein, so folgt:

$$u = \pi\int_0^{\varphi} y^2 \frac{dx}{d\varphi}\,d\varphi = \pi\int_0^{\varphi} r^2(1 - \cos\varphi)^2\, r(1 + \cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= \pi r^3\int_0^{\varphi}(1 - \cos\varphi)\sin^2\varphi\,d\varphi = \pi r^3\left[\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi\,d\varphi - \int_0^{\varphi}\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right]$$

oder da

$$\int\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int(1 - \cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)$$

und

$$\int\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \int\sin^2\varphi\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{3}\sin^3\varphi,$$

so folgt:

$$u = \pi r^3\left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right].$$

Für $\varphi = \pi$ ergibt sich hieraus $\frac{1}{2}\pi^2 r^3$ als Inhalt des von der halben Cycloide erzeugten Körpers. Der Inhalt des durch die ganze Cycloide beschriebenen Körpers ist daher $= \pi^2 r^3$ und somit nur $\frac{1}{5}$ des durch u drehung um die Basis AN entstandenen Rotationskörpers.

7) Ein Parabelsegment BCD (Fig. 128), das bei C den Scheitel hat, rotirt um FE als Achse; man soll den Kubikinhalt des hierdurch erzeugten Körpers bestimmen, wenn DF = BE = a, AC = b, JD = JB = h gegeben ist.

Aufl. Nehmen wir AX als Abscissenachse, setzen $AG = x$, $GH = y$, so folgt aus der Parabelgleichung

$$KH^2 = p \cdot CK$$

unmittelbar:

$$x^2 = p\,(b - y)$$

oder da

$$h^2 = p\,(b - a)$$

ist,

$$x^2 = \frac{h^2}{b - a}\,(b - y)$$

und hieraus:

$$y = b - \frac{b - a}{h^2}\,x^2.$$

Fig. 128.

Der Kubikinhalt des von CB erzeugten Körpers ist daher

$$= \pi \int_0^h \left[b^2 - 2b \left(\frac{b - a}{h^2}\right) x^2 + \left(\frac{b - a}{h^2}\right)^2 x^4 \right] dx$$

$$= \pi h \left[b^2 - \frac{2b\,(b - a)}{3} + \frac{(b - a)^2}{5} \right]$$

$$= \frac{\pi h}{15}\,(3a^2 + 4ab + 8b^2)$$

und somit der ganze Inhalt

$$= \frac{2\pi h}{15}\,(3a^2 + 4ab + 8b^2)$$

$$= 2\pi h \left[\frac{a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} - \frac{2}{15}\,(a - b)^2 \right]$$

oder wenn man $2h = H$ setzt,

$$= \frac{1}{3}\,\pi a^2 H + \frac{2}{3}\,\pi b^2 H - \frac{2}{15}\,\pi\,(a - b)^2\,H.$$

Anmerk. Diese Formel kann zur annäherungsweisen Berechnung eines Fasses benutzt werden.

8) Man soll den Inhalt des durch Rotation einer Lemniscate erzeugten Körpers bestimmen.

Aufl. Nach §. 81 Aufg. 6 ist

$$y^2 = -\,x^2 - c^2 + c\sqrt{c^2 + 4x^2}$$

der Ausdruck für den Kubikinhalt eines den Abscissen $x = 0$ und x entsprechenden Theiles

$$= \pi \int_0^x (-\,x^2 - c^2 + c\sqrt{c^2 + 4x^2})\,dx$$

$$\pi \left(-\frac{x^3}{3} - c^2 x + c \int_0^x \sqrt{c^2 + 4x^2}\,dx \right)$$

Um nun $\int \sqrt{c^2 + 4x^2}\, dx$ zu ermitteln, setze man in §. 85. (1):

$$u = \sqrt{c^2 + 4x^2}\,,\; v = x$$

so folgt:

$$\int \sqrt{c^2 + 4x^2}\, dx = x\sqrt{c^2 + 4x^2} - \int \frac{4x^2}{\sqrt{c^2 + 4x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{c^2 + 4x^2} - \int \frac{4x^2 + c^2 - c^2}{\sqrt{c^2 + 4x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{c^2 + 4x^2} - \int \sqrt{c^2 + 4x^2}\, dx + c^2 \int \frac{dx}{\sqrt{c^2 + 4x^2}}$$

und hieraus:

$$\int \sqrt{c^2 + 4x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{c^2 + 4x^2} + \frac{c^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 + 4x^2}}\,.$$

oder nach §. 94:

$$\int \sqrt{c^2 + 4x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{c^2 + 4x^2} + \frac{c^2}{4}\, l\,(2x + \sqrt{c^2 + 4x^2}).$$

Es wird hiernach das verlangte Volumen

$$= \pi\left[-\frac{x^3}{3} - c^2x + \frac{cx}{2}\sqrt{c^2 + 4x^2} + \frac{c^3}{4}\, l\,(2x + \sqrt{c^2 + 4x^2}) - \frac{c^3}{4}\, lc\right]$$

$$= \pi\left[-\frac{x^3}{3} - c^2x + \frac{cx}{2}\sqrt{c^2 + 4x^2} + \frac{c^3}{4}\, l\,\frac{2x + \sqrt{c^2 + 4x^2}}{c}\right].$$

Setzt man $x = c\sqrt{2} = a$; $x^2 = 2c^2 = a^2$, so findet man für die Hälfte des Inhaltes:

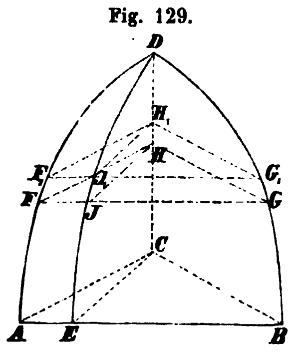
$$\frac{\pi c^3}{6}\left[-\sqrt{2} + 3l\,(1 + \sqrt{2})\right] = \frac{\pi a^3}{4}\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\,(1 + \sqrt{2})\right]$$

also ist der Inhalt des ganzen Körpers

$$= \frac{\pi a^3}{3}\left[-\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, l\,(1 + \sqrt{2})\right].$$

9) Den Kubikinhalt eines elliptischen Klostergewölbes zu bestimmen.

Fig. 129.



Aufl. Es sind (Fig. 129) DCA, DCB Ellipsenquadranten, also ist $DC \perp \triangle ABC$. Bezeichnen wir nun DC durch a, BC durch b, AC durch b_1, CH durch x, so ist, wenn der Schnitt $FGH \perp DC$ geführt wird:

$$GH = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,;\; FH = \frac{b_1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

und es verhält sich somit:

$$GH : FH = b : b_1 = BC : AC;$$

demnach ist

$$\triangle FGH \backsim \triangle ABC,$$

also

$$FG \parallel AB.$$

Denkt man sich nun zu jedem x eine solche Ebene $FGH \perp DC$, so besti... alle zu AB parallelen Geraden, wie FG, das elliptische Klostergew...

Setzen wir $\triangle ABC = \varDelta$, $\triangle FGH = \delta$, so verhält sich:

$$\varDelta : \delta = BC^2 : GH^2 = a^2 : a^2 - x^2,$$

woraus folgt:

$$\delta = \varDelta \frac{a^2 - x^2}{a^2}.$$

Für den Kubikinhalt des Körpers $ABCD$ hat man daher:

$$\frac{\varDelta}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{\varDelta}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\varDelta a$$

d. h. $\frac{2}{3}$ des Productes aus Grundfläche und Höhe.

10) Man soll vorhergehende Aufgabe für den Fall lösen, dass DA und DB Parabelbogen sind, deren Scheitel in D liegen und deren Achse mit DC zusammenfallen.

Aufl. Da sich verhält:

$$BC^2 : GH^2 = CD : HD$$
$$AC^2 : FH^2 = CD : HD,$$

so hat man:

$$BC : GH = AC : FH$$

und es ist daher:

$$\triangle ABC \backsim \triangle FGH,\ AB \parallel FG.$$

Ferner verhält sich:

$$\triangle ABC : \triangle FGH = BC^2 : GH^2 = CD : HD$$

oder wenn man $HD = x$ setzt:

$$\varDelta : \delta = a : x,$$

also ist

$$\delta = \frac{\varDelta x}{a}$$

und demnach das verlangte Volumen

$$u = \frac{\varDelta}{a}\int_0^a x\,dx = \frac{\varDelta a}{2}.$$

11) Ein Körper, wie das Prismatoid, habe die Eigenschaft, dass im Abstande x von der einen der Parallelflächen G und g ein zu dieser parallel geführte Schnitt gleich ist $g + bx + cx^2$; man soll den Kubikinhalt desselben bestimmen, wenn die Höhe durch h bezeichnet wird.

Aufl. Kubikinhalt $u = \int_0^h (g + bx + cx^2)\,dx =$

$$gh + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} = \frac{h}{3}\left(3g + \frac{3}{2}bh + ch^2\right)$$

o[illegible]

$$G = g + bh + ch^2,$$

d[illegible] lere Schnitt

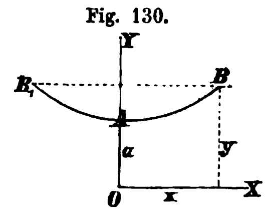
$$M = g + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4},$$

also
$$\frac{G+g}{2} = g + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{2}$$
$$2M = 2g + bh + \frac{ch^2}{2}$$
$$\frac{G+g}{2} + 2M = 3g + \frac{3}{2}\,bh + ch^2$$
ist, auch
$$u = \frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2} + 2M\right)^{*)}$$

Anmerk. Setzt man den in der Entfernung x zu g parallel geführten Schnitt $= g + bx + cx^2 + dx^3$, so ist der Inhalt
$$= h\left(g + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{3} + \frac{dh^3}{4}\right)$$
Aber:
$$G = g + bh + ch^2 + dh^3$$
$$\frac{G+g}{2} = g + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{2} + \frac{dh^3}{2}$$
$$M = g + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}$$
$$\frac{G+g}{2} + 2M = 3\left(g + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{3} + \frac{dh^3}{4}\right)$$
folglich auch der Inhalt
$$= \frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2} + 2M\right)$$
und es gilt somit derselbe Satz wie vorhin.

12) Den Inhalt des Rotationskörpers zu berechnen, welcher entsteht, wenn sich der Bogen AB (Fig. 130) der Kettenlinie $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ um die XAche dreht.

Fig. 130.



Aufl. Man erhält:
$$u = \pi\int_0^x \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{\pi a^2}{4}\int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) dx$$
$$= \frac{\pi a^2}{4}\left[2x + \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi a^2}{4}\left[2x + \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]$$
$$= \frac{\pi a^2}{4}\left[2x + y\left(e^{\frac{x}{x}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)\right]$$

*) Vergl. mein Lehrb. d. Stereom. 3. Aufl. §. 156.

oder da
$$e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} = \frac{2}{a}\sqrt{y^2 - a^2}$$
$$u = \frac{\pi a^2}{4}\left(2x + \frac{2y}{a}\sqrt{y^2 - a^2}\right)$$
$$= \frac{\pi a^2}{2}\left(x + \frac{y}{a}\sqrt{y^2 - a^2}\right).$$

13) Den Inhalt des Rotationskörpers zu berechnen, welcher entsteht, wenn sich (Fig. 131) die Kettenlinie $x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right)$ um die vertikale Achse AO dreht.

Fig. 131.

Aufl. Setzt man behufs theilweiser Integration, in dem Ausdrucke $\int y^2 dx$:
$$u = y^2 ; \frac{dv}{dx} = 1$$
also
$$\frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} ; v = x,$$
so wird
$$\pi\int y^2 dx = \pi\left[xy^2 - \int 2xy\frac{dy}{dx}dx\right]$$
$$= \pi\left[xy^2 - \int 2xy\, dy\right]$$
$$= \pi\left[xy^2 - a\int (e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}})\, y\, dy\right]$$
$$= \pi xy^2 - \pi a\int (e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}})\, y\, dy.$$
Durch theilweise Integration findet man aber:
$$\int e^{\frac{y}{a}}\, y\, dy = ae^{\frac{y}{a}}(y - a)$$
$$\int e^{-\frac{y}{a}}\, y\, dy = -ae^{-\frac{y}{a}}(y + a)$$
ist somit:
$$\int y^2 dx = \pi xy^2 - \pi a\,(aye^{\frac{y}{a}} - a^2e^{\frac{y}{a}} - aye^{-\frac{y}{a}} - a^2e^{-\frac{y}{a}})$$
$$= \pi xy^2 - \pi a^2y\,(e^{\frac{y}{a}} - e^{-\frac{y}{a}}) + 2\pi a^2x$$
$$= \pi xy^2 + 2\pi a^2x - \pi a^2y\,.\,\frac{2}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Berücksichtigt man nun, dass für $x = a$, $y = 0$ das Integral verschwinden muss, so ergibt sich für den gewünschten Inhalt:

$$\pi x y^2 + 2\pi a^2 x - 2\pi a y \sqrt{x^2 - a^2} - 2\pi a^3$$
$$= \pi (x y^2 + 2a^2 x - 2a^3 - 2ay \sqrt{x^2 - a^2})$$
$$= \pi x y^2 + 2a\pi (ax - a^2 - y \sqrt{x^2 - a^2})$$
$$= \pi x y^2 + 2a\pi [a(x - a) - y \sqrt{x^2 - a^2}].$$

§. 124. Complanation der Oberfläche eines Rotationskörpers.

1) Dreht sich eine Curve um eine als feste Achse (Rotationsachse) angenommene Gerade, so erzeugt dieselbe eine krumme Fläche (Rotationsfläche), welche in Bezug auf den von ihr begrenzten Körper (Rotationskörper) dessen Oberfläche heisst.

Als Rotationsachse nehmen wir gewöhnlich die Abscissenachse an.

Unter Complanation der Oberfläche versteht man die Bestimmung des Inhaltes derselben.

Bezeichnen a und b die Abscissen der Endpunkte des rotirenden Curventheiles, so ist nach §. 41 der Inhalt des dadurch erzeugten Theiles der Oberfläche

$$u = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \ldots (1)$$

2) Setzt man $y = r \sin\varphi$, $x = r \cos\varphi$ und führt hieraus die betreffenden Werthe in vorstehende Gleichung (1) ein, so erhält man als Ausdruck für die Oberfläche in Polarcoordinaten:

$$u = 2\pi \int r \sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi \quad \ldots \ldots (2)$$

3) Wird die Ordinatenachse als Rotationsachse angenommen, so hat man in vorstehender Formel (1) x mit y zu vertauschen.

4) Sind y und x Functionen von t, so findet man für den Differentialquotienten der Oberfläche des Rotationskörpers:

$$\frac{du}{dt} = 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

und für die Oberfläche selbst daher:

$$u = 2\pi \int y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \quad \ldots \ldots (3)$$

Beispiele.

1) Complanation des Paraboloides.

Da bekanntlich $y^2 = px$, $y = \sqrt{px}$, so hat man für die den Abs. $x = 0$, $x = x$ entsprechende krumme Oberfläche

$$u = 2\pi \int_0^x \sqrt{px\left[1 + \left(\frac{p}{2\sqrt{px}}\right)^2\right]}\, dx = \pi \int_0^x \sqrt{p^2 + 4px}$$

oder da

$$\int \sqrt{p^2 + 4px}\, dx = \frac{1}{4p} \int (p^2 + 4px)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (p^2 + 4px)\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4p} (p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6p} (p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}},$$

so ist

$$u = \frac{\pi}{6p} (p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi p^2}{6} = \frac{\pi}{6p} \left[(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} - p^3 \right]$$

2) Complanation des Ellipsoides.

α) Geschieht die Rotation um die grosse Achse, so folgt aus der Mittelpunktsgleichung

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

und obiger Formel, die Oberfläche der durch $x = 0$ bis $x = x$ bestimmten Zone

$$u = \frac{2\pi b}{a} \int_0^x \sqrt{(a^2 - x^2)\left(1 + \frac{b^2 x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}\right)}\, dx$$

$$= \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x \sqrt{a^4 - c^2 x^2}\, dx,$$

wenn nämlich $a^2 - b^2 = c^2$ gesetzt wird.

Nach §. 97 (19) ist aber

$$\int \sqrt{a^4 - c^2 x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^4 - c^2 x^2} + \frac{a^4}{2c} \arcsin \frac{cx}{a^2}$$

und somit

$$u = \frac{\pi b}{a^2} \left[x \sqrt{a^4 - c^2 x^2} + \frac{a^4}{c} \arcsin \frac{cx}{a^2} \right].$$

Für $x = a$ folgt als halbe Oberfläche

$$= \frac{\pi b}{a^2} \left(a^2 b + \frac{a^4}{c} \arcsin \frac{c}{a} \right) = \pi b \left(b + \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{c}{a} \right)$$

und die ganze Oberfläche ist daher

$$= 2\pi b \left(b + \frac{a^2}{c} \sin \frac{c}{a} \right)$$

β) Dreht sich die Ellipse bei Erzeugung des Körpers um die kleine Achse, so vertausche man in der Ellipsengleichung b mit a. Man erhält alsdann:

$$u = \frac{2\pi a}{b^2} \int_0^x \sqrt{b^4 + c^2 x^2}\, dx$$

da nach §. 97 (18)

$$\int \sqrt{b^4 + c^2 x^2}\, dx = \frac{x}{2} \sqrt{b^4 + c^2 x^2} + \frac{b^4}{2c}\, l\left(cx + \sqrt{b^4 + c^2 x^2}\right)$$

auch

$$= \frac{\pi a}{b^2} \left[x \sqrt{b^4 + c^2 x^2} + \frac{b^4}{c}\, l\left(cx + \sqrt{b^4 + c^2 x^2}\right) - \frac{b^4}{c}\, l b^2 \right].$$

Setzt man hierin $x = b$, so folgt für die halbe Oberfläche

$$= \pi a \left[a + \frac{b^2}{c}\, lb\,(a + c)\right] - \frac{\pi a b^2}{c}\, lb^2$$

$$= \pi a \left[a + \frac{b^2}{c}\, l\, \frac{b\,(a + c)}{b^2}\right] = \pi a \left[a + \frac{b^2}{c}\, l\, \frac{a + c}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right]$$

$$= \pi a \left[a + \frac{b^2}{c}\, l \sqrt{\frac{a + c}{a - c}}\right] = \pi a \left[a + \frac{b^2}{2c}\, l\, \frac{a + c}{a - c}\right].$$

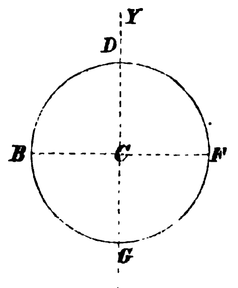
Die ganze Oberfläche ist somit

$$= 2\pi a \left[a + \frac{b^2}{2c}\, l\, \frac{a + c}{a - c}\right].$$

Anmerk. Setzt man in beiden Ausdrücken $a = b$, also $c = 0$, so erhält man für die Oberfläche der Kugel den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$ und wenn man nach §. 73 den wirklichen Werth bestimmt, so findet man dafür $4\pi a^2$.

3) Complanation des durch Rotation eines Kreises erzeugten ringförmigen Körpers.

Fig. 132.



Dreht sich der Kreis C vom Radius r um die in derselben Ebene liegende und als Abscissenachse angenommene Achse XX_1 (Fig. 132) und ist die durch den Mittelpunkt auf XX_1 gezogene Senkrechte AY die Ordinatenachse ferner $AC = a$, so hat man:

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

wo das Doppelzeichen $\pm$ sich bezüglich auf die beiden Halbkreise BDF und BGF bezieht.

Aus vorstehender Gleichung folgt

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Für die von BDF beschriebene Fläche hat man daher:

$$2\pi \int_{-r}^{+r} y \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi r \int_{-r}^{+r} \frac{a + \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

und für die von BGF beschriebene:

$$2\,\pi r \int_{-r}^{+r} \frac{a - \sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx.$$

Die Oberfläche des ganzen Ringes ist somit

$$= 4\pi r a \int_{-r}^{+r} \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi^2 r a = 2\pi r\,.\,2\pi a;$$

d. h. die Oberfläche des Ringes ist gleich dem Umfange des erzeug Kreises, multiplicirt mit dem Wege, den der Mittelpunkt des Kreise einer Umdrehung beschreibt.

4) Complanation des durch Rotation einer Cissoide erzeugten Körpers.

Aus der Gleichung $$y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \qquad (\S.\ 81.\ 2)$$

folgt: $$\frac{dy}{dx} = \frac{(3a - x)\, x^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{(8a - 3x)\, a^2}{(2a - x)^3},$$

folglich ist die Rotationsfläche von $x = 0$ *bis* $x = x$:

$$2\pi a \int_0^x y \sqrt{\frac{8a - 3x}{(2a - x)^3}}\, dx = 2\pi a \int_0^x \frac{x^2}{(2a - x)^2} \sqrt{\frac{8a - 3x}{x}}\, dx$$

oder wenn man $\frac{8a - 3x}{x} = z^2$; $x = \frac{8a}{z^2 + 3}$, $\frac{dx}{dz} = -\frac{16az}{(z^2 + 3)^2}$;

$2a - x = \frac{2a\,(z^2 - 1)}{z^2 + 3}$; $\frac{x}{2a - x} = \frac{4}{z^2 - 1}$ setzt,

$$\text{Rotationsfl.} = -512\pi a^2 \int \frac{z^2 dz}{(z^2 - 1)^2\,(z^2 + 3)^2}.$$

Um $\int \frac{z^2 dz}{(z^2 - 1)^2\,(z^2 + 3)^2}$ zu bestimmen, setze $\frac{z^2}{(z^2 - 1)^2\,(z^2 + 3)^2}$

$$= \frac{B_1}{(z + 1)^2} + \frac{B_2}{z + 1} + \frac{B_3}{(z - 1)^2} + \frac{B_4}{z - 1} + \frac{P_1 z + Q_1}{(z^2 + 3)^2} + \frac{P_2 z + Q_2}{z^2 + 3}$$

so folgt hieraus

$$B_1 = \frac{1}{64};\ B_2 = 0;\ B_3 = \frac{1}{64};\ B_4 = 0;\ P_1 = 0;\ Q_1 = -\frac{3}{16};$$

$$P_2 = 0;\ Q_2 = -\frac{1}{32}$$

und es ist somit

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2 - 1)^2 (z^2 + 3)^2} = \frac{1}{64} \int \left[\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{12}{(z^2+3)^2} - \frac{2}{z^2+3}\right] dz.$$

oder da $\int \frac{dz}{(z + 1)^2} = -\frac{1}{z + 1}$; $\int \frac{dz}{(z - 1)^2} = -\frac{1}{z - 1}$;

$$\int \frac{dz}{(z^2 + 3)^2} = \int \frac{\frac{dz}{9}}{\left[\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \int \frac{\frac{d}{dz}\frac{z}{\sqrt{3}}}{\left[\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]^2}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \left(\frac{z\sqrt{3}}{z^2 + 3} + arc\,tg\,\frac{z}{\sqrt{3}}\right)^{*)}$$

$$\int \frac{2dz}{z^2 + 3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\, arc\,tg\,\frac{z}{\sqrt{3}} \text{ ist,}$$

Denn aus

$$\frac{[illegible]}{x^2 + 1} = -\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{x^2 + 1 - 2}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{x}{x^2 + 1} = -\,arc\,tg\,x + 2\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

…aus $$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x}{2\,(x^2 + 1)} + \tfrac{1}{2}\,arc\,tg\,x.$$

$$\int \frac{z^2 dz}{(z^2-1)^2(z^2+3)^2} = \frac{1}{64}\left\{-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z-1}-\frac{2z}{z^2+3}\right.$$
$$\left.-\frac{2}{\sqrt{3}}\, arc\,tg \frac{z}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\, arc\,tg \frac{z}{\sqrt{3}}\right\}$$
$$=\frac{1}{64}\left\{-\frac{2z}{z^2-1}-\frac{2z}{z^2+3}-\frac{4}{\sqrt{3}}\, arc\,tg \frac{z}{\sqrt{3}}\right\}$$
$$=\frac{1}{64}\left\{-\frac{\sqrt{(8a-3x)\,x}}{4a-2x}-\frac{1}{4a}\sqrt{(8a-3x)\,x}-\frac{4}{\sqrt{3}}\, arc\,tg\sqrt{\frac{8a-3x}{3x}}\right\}$$
$$=-\frac{1}{64}\left\{\frac{4a-x}{4a\,(2a-x)}\sqrt{(8a-3x)\,x}+\frac{4}{\sqrt{3}}\, arc\,tg\sqrt{\frac{8a-3x}{3x}}\right\}$$

Die fragliche Oberfläche ist somit

$$=8\pi a^2\left\{\frac{4a-x}{4a\,(2a-x)}\sqrt{(8a-3x)\,x}+\frac{4}{\sqrt{3}}\, arc\,tg\sqrt{\frac{8a-3x}{3x}}-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right\}$$

5) Die Cycloide ASN (Fig. 95) dreht sich um die Achse AX, man soll die vom Bogen AB beschriebene Fläche bestimmen.

Auflös. Nach §. 81. Beisp. 4 hat man als entsprechende Gleichung:

$$x = r\, arc\cos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2}.$$

und hiernach:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2ry-y^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{2r-y}{y}},\ 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{2r}{y},$$

also für die verlangte Fläche:

$$2\pi\int_0^x y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\sqrt{2r}\int_0^y \sqrt{y}\sqrt{\frac{y}{2r-y}}\,dy$$
$$= 2\pi\sqrt{2r}\int\frac{y\,dy}{\sqrt{2r-y}}.$$

Um nun dieses Integral zu bestimmen, setze man $\sqrt{2r-y} = z$, so wird

$$\int\frac{y\,dy}{\sqrt{2r-y}} = -2\int(2r-z^2)\,dz = -2\left(2rz-\frac{z^3}{3}\right)$$
$$= -2\left[2r\sqrt{2r-y}-\tfrac{1}{3}(2r-y)\sqrt{2r-y}\right].$$

Man hat daher für den gewünschten Inhalt:

$$-4\pi\sqrt{2r}\sqrt{2r-y}\left(2r-\frac{2r-y}{3}\right)+\frac{32\pi r^2}{3}$$
$$\frac{32\pi r^2}{3}-\frac{(4r+y)\,4\pi\sqrt{2r\,(2r-y)}}{3}$$
$$\frac{4\pi}{3}\left[8r^2-(4r+y)\sqrt{2r\,(2r-y)}\right]$$

Für $y = 2r$ folgt hieraus $\frac{32\pi r^2}{3}$ als halbe Oberfläche und die von der ganzen Cycloide erzeugte Fläche ist daher $\frac{64\pi r^2}{3}$. oder das $5\frac{1}{3}$ fache der Oberfläche einer Kugel vom Radius r.

Anmerk. Man kann diesen Ausdruck für die Oberfläche auch auf folgende Art herleiten.

Nach Beisp. 4 des §. 81. ist

$$x = r\varphi - r \sin\varphi \; ; \; y = r - r\cos\varphi$$

also

$$\frac{dx}{d\varphi} = r(1 - \cos\varphi) \; ; \; \frac{dy}{d\varphi} = r \sin\varphi$$

und somit nach (3):

$$u = 2\pi \int_0^\varphi y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} \, d\varphi$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^\varphi (1 - \cos\varphi) \sqrt{2(1 - \cos\varphi)} \, d\varphi$$

$$= 8\pi r^2 \int_0^\varphi \sin^3 \frac{\varphi}{2} \, d\varphi$$

oder da nach E. T. §. 16.

$$\sin 3\varphi = 3 \sin\varphi - 4 \sin^3\varphi$$

oder

$$\sin^3\varphi = \frac{3}{4} \sin\varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi$$

ist, auch:

$$u = 2\pi r^2 \int_0^\varphi \left(3 \sin \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{3\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= 2\pi r^2 \left(-6\cos \frac{\varphi}{2} + \frac{2}{3} \cos \frac{3\varphi}{2} + 6 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= 2\pi r^2 \left(\frac{16}{3} - 6\cos \frac{\varphi}{2} + \frac{2}{3} \cos \frac{3\varphi}{2}\right).$$

Für $\varphi = \pi$ resultirt nun hieraus wieder der oben gefundene Ausdruck für die Oberfläche.

6) Die Cycloide ASN (Fig. 127) drehe sich um die Achse ST, man soll die Oberfläche des entsprechenden Rotationskörpers bestimmen.

Aufl. Ist S der Coordinatenursprung $SE = x$, $BE = y$, so hat man

$$x = r - r\cos\varphi$$
$$y = r\varphi + r \sin\varphi,$$
$$\frac{dx}{d\varphi} = r\sin\varphi \; ; \; \frac{dy}{d\varphi} = r(1 + \cos\varphi)$$
$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 2r^2(1 + \cos\varphi) = 4r^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

rhält somit nach obiger Gleichung (3) für die Complanation:

$$u = 4\pi r^2 \int_0^\varphi (\varphi + \sin\varphi)\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= 4\pi r^2 \left[\int_0^\varphi \varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi + \int_0^\varphi \sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\right].$$

Um $\int_0^\varphi \varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$ zu bestimmen, setzt man in der Formel für theilweise Integration [§. 85. (1)]:

$$u = 2\varphi \;;\; \frac{du}{d\varphi} = 2 \;;\; \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \;;\; v = \sin\frac{\varphi}{2},$$

so folgt

$$\int_0^\varphi \varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2\varphi\sin\frac{\varphi}{2} - \int_0^\varphi 2\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= 2\varphi\sin\frac{\varphi}{2} + 4\cos\frac{\varphi}{2} - 4.$$

Ferner wird

$$\int \sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 2\int \sin\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= 2\int \sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - 2\int \sin^3\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= -4\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\int\left(3\sin\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{3\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$= -4\cos\frac{\varphi}{2} + 3\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\varphi}{2},$$

also

$$\int_0^\varphi \sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = -4\cos\frac{\varphi}{2} + 3\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\varphi}{2} + \frac{4}{3}.$$

Durch Einführung dieser Werthe ergibt sich:

$$u = 4\pi r^2\left[2\varphi\sin\frac{\varphi}{2} + 3\cos\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{2} - \frac{8}{3}\right].$$

Setzt man hierin $\varphi = \pi$, so resultirt

$$\frac{4\pi r^2}{3}(6\pi - 8)$$

als Ausdruck für die ganze Oberfläche.

7) Die Cycloide ASN (Fig. 127) dreht sich um die im Scheitel S g… Tangente PQ, man soll die Complanation des entsprechenden Rotati… körpers vornehmen.

Aufl. Nimmt man PQ als Abscissenachse, S als Ursprung wird

$$SF = x = r\varphi + r\sin\varphi \;;\; BF = y = r - r\cos\varphi$$

und wenn man hieraus $\frac{dx}{d\varphi} = r + r\cos\varphi$; $\frac{dy}{d\varphi} = r\sin\varphi$ bestimmt und in die Complanationsformel

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2\,[(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi]$$

$$= 2r^2\,(1+\cos\varphi) = 4r^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

einführt,

$$u = 8\pi r^2 \int_0^\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{16}{3}\,\pi r^2 \sin^3\frac{\varphi}{2}.$$

Für $\varphi = \pi$ wird die von der halben Cycloide erzeugte Fläche $= \frac{16}{3}\,\pi r^2$ und die von der ganzen Cycloide beschriebebe Fläche ist daher $= \frac{32}{3}\,\pi r^2$, also nur halb so gross, als die Fläche, welche eine um die Basis AN rotirende Cycloide erzeugt.

8) Die Oberfläche des durch Umdrehung einer Lemniscate erzeugten Körpers zu bestimmen.

Aufl. Nach §. 81 Aufg. 6 ist

$$r^2 = a^2\cos 2\varphi$$

die Polargleichung dieser Curve und nach §. 124 (2) wird somit die Oberfläche des den Abscissen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \varphi$ entsprechenden Theiles

$$= 2\pi \int_0^\varphi r\sin\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^\varphi \sin\varphi\,d\varphi$$

$$= 2\pi a^2\,(1-\cos\varphi) = 4\pi a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

Setzt man hierin $\varphi = 45^0$, so folgt $2\pi a^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ als halbe Oberfläche und die des ganzen Körpers ist somit

$$= 2\pi a^2\,(2 - \sqrt{2})$$

9) Die Oberfläche des Rotationskörpers zu berechnen, welcher entsteht, wenn die Kettenlinie $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ um die XAchse rotirt.

Aufl. Da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

also

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right)$$

und

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

wird, so folgt:

$$u = \frac{\pi a}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$$

$$= \frac{\pi a}{2} \int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) dx$$

$$= \frac{\pi a}{2} \left[\frac{a}{2} \left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right) + 2x\right]$$

$$= \pi a x + \frac{\pi a^2}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$= \pi a x + \frac{\pi a y}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$= \pi a x + \frac{\pi a y}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{y^2 - a^2}$$

$$= \pi a x + \pi y \sqrt{y^2 - a^2} = \pi \left(a x + y \sqrt{y^2 - a^2}\right).$$

Anhang.

Vermischte Uebungsaufgaben.

a) Ueber die Bestimmung des ersten Differentialquotienten.

1) $y = 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt[3]{x^5} + 4\sqrt[5]{x^7}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{28}{5}\sqrt[5]{x^2}$.

2) $y = (x^3 + 3x^2 - 2)^6$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 18x\,(x + 2)\,(x^3 + 3x^2 - 2)^5$.

3) $y = (x^2 + 2x + 3)\,(x - 5)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 7$.

4) $y = \frac{3x + 1}{x^3 + x^2}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^3 + 6x^2 + 2x}{(x^3 + x^2)^2}$.

5) $y = \frac{x^2 + 3}{x^3 - x + 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^4 + 10x^2 - 2x - 3}{(x^3 - x + 1)^2}$.

6) $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 5}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 5}}$.

7) $y = \frac{4\sqrt{x}}{4 - x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2\,(4 + x)}{(4 - x)^2\sqrt{x}}$.

$y = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right)(x - \sqrt{x})$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

9) $y = (x - a)(x - b)(x - c)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2(a + b + c)x + ab + ac + bc.$

10) $y = \frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha b - a\beta + 2(\alpha c - a\gamma)x + (\beta c - b\gamma)x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}.$

11) $y = (2x^2 + 1)^5 (x - 2)^6$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 2(2x^2 + 1)^4 (x - 2)^5 (16x^2 - 20x + 3).$

12) $y = (x^2 - 2)^7 (x^3 - 3)^6 (x^7 - 1)^8$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = (x^2 - 2)^6 (x^3 - 3)^5 (x^7 - 1)^7 x (88x^{10} - 148x^8 - 210x^7 + 336x^5 - 32x^3 + 36x + 42).$

13) $y = \frac{\sqrt{1 + x} + 1}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{1 + x}} + \frac{2x + 1}{2\sqrt{x(x + 1)}}.$

Andeut. **Mache den Nenner rational!**

14) $y = \frac{(x + 5)^2}{\sqrt{x^2 - 25}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{(x + 10)\sqrt{x + 5}}{(x - 5)\sqrt{x - 5}}.$

15) $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1}}.$

16) $y = \sqrt[7]{\frac{(x + 1)^3}{(x - 2)^5}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 11}{7(x + 1)^{\frac{4}{7}}(x - 2)^{\frac{12}{7}}}$

17) $y = x\sqrt{3x + 5}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{9x + 10}{2\sqrt{3x + 5}}.$

18) $y = x^3 \sqrt[3]{x^2 + 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{11x^4 + 9x^2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}.$

19) $y = \sqrt{\frac{x(x+1)}{x+3}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 6x + 3}{2(x+3)\sqrt{x(x+1)(x+3)}}$.

20) $y = \frac{\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{3(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^2}}$
$+ \frac{x(3x-2)}{3(x-1)\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Andeut. **Multiplicire Zähler und Nenner mit**
$\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x^2-1)}$.

21) $y = l\,\frac{x+1}{x^2-3}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2-3)}$.

22) $y = l(b + x + \sqrt{a + 2bx + x^2})$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a + 2bx + x^2}}$.

23) $y = l\,\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$.

24) $y = \frac{12x^3 + 18x^2 + 4x - 1}{2x^2(x+1)^2} + 6l\,\frac{x}{x+1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3(x+1)^3}$.

25) $y = l(x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x+1}{x^2 - x - 2}$.

26) $y = l[(x^2+1)(x-1)(x+1)^2]$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 - 1}$.

27) $y = a^{\sqrt[m]{x^n}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{m}\, a^{\sqrt[m]{x^n}} \sqrt[m]{x^{n-m}}\, la$.

28) $y = l\,\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 10};$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 - 14x + 19}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 7x + 10)}.$

29) $y = \dfrac{a^x + lx - x}{a^x + 1};$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\left[\dfrac{1}{x} - 1 + (1 + x - lx)\,la\right]}{(a^x + 1)^2}.$

30) $y = \sqrt{xe^x};$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(1 + x)\,e^{\frac{x}{2}}}{2\sqrt{x}}.$

31) $y = l\,\dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}};$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(1 - x)\sqrt{x}}.$

32) $y = a^{x^2+3x-7};$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = a^{x^2+3x-7}\,(2x + 3)\,la.$

33) $y = a^{x^b};$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = ba^{x^b}\,x^{b-1}\,la.$

34) $y = a^{lx}\,l\sqrt{x^2 + 3x - 5};$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = a^{lx}\left[\dfrac{2x + 3}{2(x^2 + 3x - 5)} + \dfrac{l\sqrt{x^2 + 3x - 5}}{x}\,la\right].$

35) $y = e^x\,(x^6 - 6x^5 + 30x^4 - 120x^3 + 360x^2 - 720x + 720);$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = e^x x^6.$

36) $y = (5x^4 - 60x^2 + 120)\sin x - (x^5 - 20x^3 + 120x)\cos x;$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = x^5 \sin x.$

37) $y = \dfrac{1}{80}\sin 5x + \dfrac{5}{48}\sin 3x + \dfrac{5}{8}\sin x;$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x) = \cos$

38) $y = 2(\cos^3 x + \sin^3 x) + 3(\cos^2 x \sin x + \cos x \sin^2 x);$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = 3(\cos^3 x - \sin^3 x).$

39) $y = (8\cos^4 x + 20\cos^2 x \sin^2 x + 15\sin^4 x)\dfrac{a\cos x}{15}$

$+ (15\cos^4 x + 20\cos^2 x \sin^2 x + 8\sin^4 x)\dfrac{b\sin x}{15}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = b\cos^5 x - a\sin^5 x.$

40) $y = \sin(x\sqrt{x} - x^2)$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{3}{2}\sqrt{x} - 2x\right)\cos(x\sqrt{x} - x^2).$

41) $y = \dfrac{a + b\sin x + c\cos x}{\alpha + \beta\sin x + \gamma\cos x}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\alpha b - a\beta)\cos x + (a\gamma - \alpha c)\sin x + b\gamma - \beta c}{(\alpha + \beta\sin x + \gamma\cos x)^2}.$

42) $y = \sin\dfrac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{(\sqrt{x} - 1)^2\sqrt{x}}\cos\dfrac{x + \sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}.$

43) $y = \cos l(x^2 + x + 1)$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\sin l(x^2 + x + 1).$

44) $y = tg\,\dfrac{x}{lx}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x}{lx}} \cdot \dfrac{lx - 1}{l^2 x}.$

45) $y = l\,\dfrac{\sin x}{1 + e^x}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x + (\cos x - \sin x)e^x}{(1 + e^x)\sin x}.$

46) $y = e^x \sin x \,.\, l\cos x$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = e^x\left[(\cos x + \sin x)\,l\cos x - \sin x\, tg\, x\right].$

47) $y = \sin\dfrac{x + lx}{x - lx}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2(1 - lx)}{(x - lx)^2}\cos\dfrac{x + lx}{x - lx}.$

) $y = e^{\frac{\sin x}{e^x}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = (\cos x - \sin x)\, e^{\frac{\sin x}{e^x}}\, e^{-x}.$

49) $y = \sin \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{4\, la}{(a^x + a^{-x})^2} \cos \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$.

50) $y = \frac{\sin x + 3\cos x}{\cos x - 4\sin x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{13}{(\cos x - 4\sin x)^2}$.

51) $y = tg \sqrt{\frac{x}{x+1}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\,(x+1)\sqrt{x\,(x+1)}\,\cos^2 \sqrt{\frac{x}{x+1}}}$.

52) $y = tg \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{\cos^2 \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{(1-\sqrt{x})^2}$

53) $y = tg\,(x^2 \sin x^3 + \cos x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 \cos x^3 + 2x \sin x^3 - \sin x}{\cos^2 (x^2 \sin x^3 + \cos x)}$.

54) $y = tg \frac{x^2 + 3x + 5}{x^3 + 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^4 + 6x^3 + 15x^2 - 2x - 3}{(x^3+1)^2 \cos^2 \frac{x^2 + 3x + 5}{x^3 + 1}}$.

55) $y = \cot \frac{x}{x^4 - 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^4 + 1}{(x^4 - 1)^2 \sin^2 \frac{x}{x^4 - 1}}$.

56) $y = \cot \frac{x + lx}{x - lx}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2\,(1 - lx)}{(x - lx)^2 \sin^2 \frac{x + lx}{x - lx}}$.

57) $y = \cot \frac{l^2 x}{e^x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{(2 - x lx)\, lx}{x e^x \sin^2 \frac{l^2 x}{e^x}}$.

58) $y = \cos(x\,tg\,x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\left(tg\,x + \frac{x}{\cos^2 x}\right)\sin(x\,tg\,x)$.

59) $y = l\,(x\,tg\,x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{2}{\sin 2x}$.

60) $y = \cot(lx \sin x^2)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x^2 + 2x^2\,lx\cos x^2}{x\sin^2(lx\sin x^2)}$.

61) $y = a^{x\,tg\,x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{\cos^2 x} + tg\,x\right)e^{x\,tg\,x}\,la$.

62) $y = tg\,\frac{e^x + (x+1)^2}{e^x - (x-1)^2}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2e^x(x-1)^2 + 4(x^2-1)}{[e^x - (x-1)^2]^2\cos^2\frac{e^x + (x+1)^2}{e^x - (x-1)^2}}$.

63) $y = \sin(\sin x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \cos x\cos(\sin x)$.

64) $y = arc\sin\frac{x-1}{x+1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \mp\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}$.

65) $y = arc\sin\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+5}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2+2x+5}$.

66) $y = arc\sin\sqrt{\frac{1}{1+x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$.

67) $y = arc\sin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$.

68) $y = l\,(x + arc\sin x)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{(x + arc\sin x)\sqrt{1-x^2}}$.

69) $y = arc\sin \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x-1}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2\,(x-2)}{3\,(x-1)^{\frac{4}{3}} \sqrt{(x-1)^{\frac{2}{3}} - (x+1)^2}}$.

70) $y = \dfrac{arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x\, arc\sin x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

71) $y = arc\sin \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}}{1+x}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-1}{2\,(1+x)\sqrt{x\,(1+x+x^2)}}$.

72) $y = arc\sin lx$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x\sqrt{1-l^2 x}}$.

73) $y = arc\sin \dfrac{e^x}{e^x+1}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{(e^x+1)\sqrt{1+2e^x}}$.

74) $y = arc\sin \dfrac{2}{e^{2x}+e^{-2x}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{e^{2x}+e^{-2x}}$.

75) $y = arc\sin (x\, lx)$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{lx+1}{\sqrt{1-x^2 l^2 x}}$.

76) $y = e^{arc\sin \frac{x\,(x+2)}{x^2+2x+2}}$;

Auf. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x^2+2x+2}\, e^{arc\sin \frac{x\,(x+2)}{x^2+2x+2}}$.

7 $y = arc\sin\,(arc\sin x)$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)\,[1-(arc\sin x)^2]}}$.

78) $y = arc\cos \dfrac{2x+3}{x^2-1}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2\,(x^2+3x+1)}{(x^2-1)\sqrt{x^4-6x^2-12x-8}}$.

79) $y = arc\cos \dfrac{2x}{\sqrt{9x^2+1}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{(9x^2+1)\sqrt{5x^2+1}}$.

80) $y = arc\cos \dfrac{e^{2x} - x^2}{e^{2x} + x^2}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2(x-1)e^x}{e^{2x} + x^2}$.

81) $y = arc\cos \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + 2\cos x}{(2+\cos x)\sqrt{4 + \cos 2x + 4\cos x}}$.

82) $y = arc\,tg \dfrac{x-1}{x+1}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2+1}$.

83) $y = arc\,tg \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{x}}{2(x+1)}$.

84) $y = arc\,tg \dfrac{2x}{1-2x^2}$;

3

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3(2x^2+1)}{(x^2+1)(4x^2+1)}$.

85) $y = arc\,tg \dfrac{a + b\cos x}{b - a\cos x}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 x}$.

86) $y = arc\,tg \dfrac{x}{\sqrt[4]{1-x^4}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{(1-x^4)^{\frac{3}{4}}\left[x^2 + (1-x^4)^{\frac{1}{2}}\right]}$.

87) $y = arc\,tg \dfrac{1 + x + \sqrt{2x+x^2}}{1 + x - \sqrt{2x+x^2}}$;

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{2x+x^2}} \cdot \dfrac{(1+x+\sqrt{2x+x^2})^2}{1 + (1+x+\sqrt{2x+x^2})^4}$.

88) $y = arc\,tg\,\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$.

89) $y = arc\,tg\,\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

90) $y = arc\,tg\,\frac{x^2 + 5x - 2}{x^3 + 4}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^4 + 10x^3 - 6x^2 - 8x - 20}{x^6 + x^4 + 18x^3 + 21x^2 - 20x + 20}$.

91) $y = (x^2 + 3x + lx)\,arc\,tg\,x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3x + lx}{x^2 + 1} + \left(2x + 3 + \frac{1}{x}\right) arc\,tg\,x$.

92) $y = arc\,tg\,\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{(x^2 - x + 2\sqrt{x} + 2)\,2\sqrt{x}}$.

93) $y = arc\,tg\,\frac{\sin x}{x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 + \sin^2 x}$.

94) $y = (1 + x^2)\sqrt{x}\,arc\,tg\,x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^2 + 1}{2\sqrt{x}}\,arc\,tg\,x + \sqrt{x}$.

95) $y = \frac{e^x + arc\,tg\,x}{e^x - arc\,tg\,x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{2e^x\left(\frac{1}{1 + x^2} - arc\,tg\,x\right)}{(e^x - arc\,tg\,x)^2}$.

96) $y = arc\,tg\left(a\,tg\,\frac{x}{2}\right)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{1 + a^2 + (1 - a^2)\cos x}$.

97) $y = \frac{tg\,x + arc\,tg\,x}{1 + x^2}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1 + x^2}{\cos^2 x} + 1 - 2x\,(tg\,x + arc\,tg\,x)}{(1 + x^2)^2}$.

98) $y = arctg \frac{x \sin x}{1 + x \cos x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + \sin x + x \cos x}{1 + x^2 + 2x \cos x}$.

99) $y = lx \,.\, \sin x \,.\, arctg\, e^x$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \sin x \; arctg\, e^x + lx \cos x \; arctg\, e^x$

$+ \frac{e^x}{1 + e^{2x}} lx \sin x$.

100) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{\frac{1}{x}} (1 - lx)}{x^2}$.

101) $y = \sin x^{\cos x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x l \sin x\right) \sin x^{\cos x}$.

102) $y = (x^2 + 1)^{x^2 - 1}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + l(x^2 + 1)\right] 2x (x^2 + 1)^{x^2 - 1}$.

103) $y = [\sin (ax + b)]^{\alpha x + \beta}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = [a (\alpha x + \beta) \cot (ax + b)$

$+ \alpha l \sin (ax + b)] [\sin (ax + b)]^{\alpha x + \beta}$.

104) $y = x^{\sqrt{x}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{(lx + 2) x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

105) $y = (x + lx)^{arc\,tg\, x}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \left[\frac{l(x + lx)}{1 + x^2} + \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) arc\,tg\, x}{x + lx}\right] (x + lx)^{arc\,tg\, x}$.

106) $y = f(x)$; $\frac{d}{dx}(y' y''^2) = ?$

Aufl. $y''^3 + 2y' y'' y'''$.

107) $y = f(x)$; $\frac{dy}{dx}\left(\frac{y''^2}{x^3}\right) = ?$

Aufl. $\frac{2x y'' y''' - 3y''^2}{x^4}$.

[108]) $y = f(x)$; $\frac{dy}{dx}(ly') = ?$

Aufl. $\frac{y''}{y'}$.

109) $y = f(x)$; $\frac{d}{dx} \arcsin y' = ?$

Aufl. $\frac{y''}{\sqrt{1 - y'^2}}$.

110) $y = e^t$; $x = a + bt + ct^2$; $\frac{dy}{dx} = ?$

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^t}{b + 2ct}$.

111) $y = \arcsin \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$; $x = lt$; $\frac{dy}{dx} = ?$

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2t}{1 + t^2}$.

112) $y = \frac{u}{u + 1}$; $u = e^v$; $v = t^2$; $\frac{dy}{dt} = ?$

Aufl. $\frac{dy}{dt} = \frac{2t\, e^{t^2}}{(e^{t^2} + 1)^2}$.

113) $y = l(u + 1)$; $u = \frac{x + 1}{x - 1}$; $\frac{dy}{dx} = ?$

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x(x - 1)}$.

114) $y = u^{v^w}$, wo u, v, w Functionen von x sind.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = u^{v^w} v^w \left(\frac{u'}{u} + \frac{w}{v} v' lu + w' lu\, lv\right)$.

Andeut. Setze $u^v = z$ und verfahre nach §. 29.

115) $y = t^{u^{v^w}}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = t^{u^{v^w}} u^{v^w} \Big(\frac{t'}{t} + \frac{u'}{u} v^w\, lt + v^{w-1} wv'\, lu\, lt$
$+ v^w w'\, lu\, lv\, lt\Big)$.

Andeut. Setze $u^{v^w} = z$, so wird
$y = t^z$, $ly = zlt$, $\frac{y'}{y} = \frac{zt'}{t} + z'lt$; $y' = y\left(z\frac{t'}{t} + z'lt\right)$ u. s. w.

116) $\sin(x + y) = xy$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - \cos(x + y)}{\cos(x + y) - x}$.

117) $x + y + xy = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y + 1}{x + 1}$.

118) $\frac{\sin x}{x} + x^2 y \cos y + lx = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{x \cos x - \sin x + 2x^3 y \cos y + x}{x^4 (y \sin y - \cos y)}$.

119) $y^2 + 2ya^x + xlx = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = - \frac{2ya^x la + lx + 1}{2(y + a^x)}$.

120) $y^3 + x^3 - 3xy = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$.

121) $e^{xy} - x - y = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = - \frac{ye^{xy} - 1}{xe^{xy} - 1}$.

122) $x \cos y + y \sin x = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x + \cos y}{x \sin y - \sin x}$.

123) $\frac{x\, ly}{y\, lx} = \frac{y\, lx}{x\, ly}$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 (lx - 1)}{x^2 (ly - 1)}$.

124) $e^{xy} - l(xy) = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = - \frac{y}{x}$.

125) $xy(y^n + 1) = x^n + 1$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{nx^{n-1} - y(y^n + 1)}{(n+1)xy^n + x}$.

126) $\cos x \cos y + \sin x \sin y = 0$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = 1$.

127) $e^{x+y} + e^{x-y} = k$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y}}{e^{x-y} - e^{x+y}}$.

128) $a + 2b \sin(x + y) = c(x + y)^2$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -1$.

) $\sin(xy) = al(xy)$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = - \frac{y}{x}$.

) $a + bxy = l(e^{xy} + e^{-xy})$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = - \frac{y}{x}$.

131) $f\left(\frac{y}{x}\right) = k$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

132) $f(x, y) = a$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

133) $f(\varphi(xy)) = a$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$.

134) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$
$x + y + z = a$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{z - x}{y - z}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{x - y}{y - z}$.

Anmerk. Da statt der ersten Gleichung auch geschrieben werden kann:

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = 0,$$

so sind die vorgelegten Gleichungen gleichbedeutend mit

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0$$

und

$$x + y + z = a.$$

135) $x^2 + y^2 + 2axy = b$;
$xy + xz + yz = c$.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x + ay}{ax + y}$;

$\frac{dz}{dx} = \frac{z(x - y)(1 - a) + x^2 - y^2}{(x + y)(ax + y)}$.

136) $x^3 + y^3 + z^3 = 0$
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x(x - z)}{y(y - z)}$, $\frac{dz}{dx} = -\frac{x(y - x)}{z(y - z)}$.

137) $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = r^2$
$x + y + z + t = a$
$xyzt = b$.

Aufl. $\frac{dx}{dt} = \frac{x(z - t)(t - y)}{t(x - z)(x - y)}$;

$\frac{dy}{dt} = \frac{y(z - t)(t - x)}{t(y - z)(y - x)}$.

138) $x + y - z - 2 = 0$; $y^2 + z^2 - 5x^2 + 7z + 11 =$

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{10x - 2z - 7}{2z + 2y + 7}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{10x + 2y}{2z + 2y + 7}$.

Anmerk. Löst man obige Gleichungen nach y und z auf, so folgt:

$$y = x - 1 \text{ oder } -2x - \tfrac{1}{2}$$
$$z = 2x - 3 \quad ,, \quad -x - \tfrac{5}{2}$$

und hiernach:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \text{ oder } -2$$
$$\frac{dz}{dx} = 2 \quad ,, \quad -1.$$

b) Ueber wiederholte Differentiation.

139) $y = 2x^3 + 5x^2 + 2x \sin x + e^x$;

Aufl. $y' = 6x^2 + 10x + 2x\cos x + 2\sin x + e^x$
$y'' = 12x + 10 - 2x\sin x + 4\cos x + e^x$
$y''' = 12 - 2x\cos x - 6\sin x + e^x$
$y^{IV} = -2\cos x + 2x\sin x - 6\cos x + e^x$
$y^{V} = 10\sin x + 2x\cos x + e^x$
$y^{VI} = 12\cos x - 2x\sin x + e^x$ u. s. w.

140) $y = 3x^3 - 7x^2 + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x}$;

Aufl. $y' = 9x^2 - 14x + x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}}$
$y'' = 18x - 14 - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$
$y''' = 18 + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} + \frac{10}{9}x^{-\frac{8}{3}}$
$y^{IV} = -\frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}} - \frac{80}{27}x^{-\frac{11}{3}}$ u. s. w.

141) $y = \sin lx$;

Aufl. $y' = x^{-1}\cos lx$
$y'' = -x^{-2}(\cos lx + \sin lx)$
$y''' = x^{-3}(\cos lx + 3\sin lx)$
$y^{IV} = -10x^{-4}\sin lx$
$y^{V} = 10x^{-5}(4\sin lx - \cos lx)$
$y^{VI} = 10x^{-6}(9\cos lx - 19\sin lx)$
$y^{VII} = 10x^{-7}(105\sin lx - 73\cos lx)$.

142) $y = x + ly$;

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-y}{(y-1)^3}$

$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{y(2y+1)}{(y-1)^5}$.

143) $y = e^{x^2}$;

Aufl. $y' = 2xe^{x^2}$

$y'' = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$

$y''' = 4e^{x^2}(3x + 2x^3)$

$y^{IV} = 4e^{x^2}(4x^4 + 12x^2 + 3)$

$y^{V} = 8e^{x^2}(4x^5 + 20x^3 + 15x)$ u. s. w.

. . . .

$$y^{(n)} = e^{x^2}\left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \,.\, 2}(2x)^{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}(2x)^{n-6} + \ldots\right].$$

144) $y = xlx$;

Aufl. $y' = lx + 1$

$y'' = x^{-1}$; $y''' = -x^{-2}$

$y^{IV} = -1 \,.\, -2x^{-3}$; $y^{V} = -1 \,.\, -2 \,.\, -3x^{-4}$

$y^{(n)} = (-1)^{n-2}(n-2)!\, x^{-(n-1)}$

$= (-1)^n (n-2)!\, x^{-(n-1)}$.

145) $y = x^2 lx$;

Aufl. $y' = 2xlx + x$; $y'' = 3 + 2lx$

$y''' = 2x^{-1}$; $y^{IV} = -2x^{-2}$;

$y^{V} = 2 \,.\, -1 \,.\, -2x^{-3}$; . . . . . .

$y^{(n)} = 2(-1)^{n-3}(n-3)!\, x^{-(n-2)}$

$= 2(-1)^{n-1}(n-3)!\, x^{-(n-2)}$.

146) $y = x^n lx$;

Aufl. $y' = x^{n-1}(nlx + 1)$

$y'' = x^{n-2}[n(n-1)lx + 2n - 1]$

$y''' = x^{n-3}[n(n-1)(n-2)lx + 3n^2 - 6n + 2]$

$y^{IV} = x^{n-4}[n(n-1)(n-2)(n-3)lx + 4n^3 - 18n^2 + 22n - 6]$ u. s. w.

147) $y = \frac{3x+1}{x^2 - 2x - 15}$;

Aufl. $y' = -\frac{3x^2 + 2x + 43}{(x^2 - 2x - 15)^2} = -\frac{1}{(x+3)^2} - ($

$y'' = \frac{6x^3 + 6x^2 + 258x - 142}{(x^2 - 2x - 15)^3}$

$= -1 \,.\, -2\left[\frac{1}{(x+3)^3} + \frac{2}{(x-5)^3}\right]$

$$y''' = -1.-2.-3\left[\frac{1}{(x+3)^4} + \frac{2}{(x-5)^4}\right]$$

. . . .

$$y^{(n)} = (-1)^n\, n!\left[\frac{1}{(x+3)^{n+1}} + \frac{2}{(x-5)^{n+1}}\right].$$

148) $y = \sin e^x$;

Aufl. $y' = e^x \cos e^x$

$$y'' = e^x (\cos e^x - e^x \sin e^x)$$

$$y''' = e^x (\cos e^x - 3e^x \sin e^x - e^{2x} \cos e^x)$$

$$y^{IV} = e^x (\cos e^x - 7e^x \sin e^x - 6e^{2x} \cos e^x + e^{3x} \sin e^x) \text{ u. s. w.}$$

149) $y = e^x \sin x$;

Aufl. $y' = e^x (\cos x + \sin x) = \frac{e^x}{\sin\frac{\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$y'' = \frac{e^x}{\sin\frac{\pi}{4}}\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{e^x}{\sin^2\frac{\pi}{4}} \sin\left(x + 2\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y''' = \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}}\left[e^x \sin\left(x+2\frac{\pi}{4}\right) + e^x \cos\left(x+2\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{e^x}{\sin^3\frac{\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

. . . .

$$y^{(n)} = \frac{e^x}{\sin^n\frac{\pi}{4}} \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$$

150) $y = e^x \cos x$;

Aufl. $y' = e^x \cos x - e^x \sin x = \frac{e^x}{\sin\frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$y'' = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}\left\{e^x \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - e^x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^x}{\sin^2\frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{2\pi}{4}\right)$$

$$y''' = \frac{e^x}{\sin^3 \frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

. . . .

$$y^{(n)} = \frac{e^x}{\sin^n \frac{\pi}{4}} \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

151) $y = e^x \sin(x \, tg\, \alpha)$;

Aufl. $y' = \dfrac{e^x}{\cos\alpha} \sin(x\, tg\, \alpha + \alpha).$

$$y'' = \frac{e^x}{\cos^2\alpha} \sin(x\, tg\, \alpha + 2\alpha)$$

. . . .

$$y^{(n)} = \frac{e^x}{\cos^n \alpha} \sin(x\, tg\, \alpha + n\alpha).$$

152) $y = e^x \cos(x\, tg\, \alpha)$;

Aufl. $y' = \dfrac{e^x}{\cos\alpha} \cos(x\, tg\, \alpha + \alpha)$

$$y'' = \frac{e^x}{\cos^2\alpha} \cos(x\, tg\, \alpha + 2\alpha)$$

. . . .

$$y^{(n)} = \frac{e^x}{\cos^n\alpha} \cos(x\, tg\, \alpha + n\alpha).$$

153) $y = e^x f(x)$;

Aufl. $y' = e^x [f(x) + f'(x)]$

$$y'' = e^x [f(x) + 2f'(x) + f''(x)]$$

$$y''' = e^x [f(x) + 3f'(x) + 3f''(x) + f'''(x)]$$

. . . .

154) $y = \sin(x^2)$;

Aufl. $y' = (2x)\cos(x^2) = (2x)\sin\left(x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = 2\sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) + (2x)^2 \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (2x)^2 \sin\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right) + 2 \,.\, 1 \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = (2x)^3 \cos\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right) + 2 \,.\, 2\,(2x) \sin\left(x^2 + \right.$$

$$+ 2 \,.\, 1 \,.\, (2x) \cos\left(x^2 + \right.$$

$$= (2x)^3 \sin\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 \,.\, 2 \,.\, (2x) \sin\left(x^2 + \right.$$

$$y^{IV} = (2x)^4 \cos\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 \cdot 2\, (2x)^2 \sin\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$+ 3 \cdot 2\, (2x)^2 \cos\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right) + 3 \cdot 2 \cdot 2 \sin\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$= (2x)^4 \sin\left(x^2 + \frac{4\pi}{2}\right) + 4 \cdot 3\, (2x)^2 \sin\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \sin\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y^{V} = (2x)^5 \cos\left(x^2 + \frac{4\pi}{2}\right) + 4 \cdot 2 \cdot (2x)^3 \sin\left(x^2 + \frac{4\pi}{2}\right)$$

$$+ 4 \cdot 3\, (2x)^3 \cos\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$+ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2\, (2x) \sin\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} (2x) \cos\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$= (2x)^5 \sin\left(x^2 + \frac{5\pi}{2}\right) + 5 \cdot 4\, (2x)^3 \sin\left(x^2 + \frac{4\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2} (2x) \sin\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right).$$

Allgemein ist

$$y^{(n)} = (2x)^n \sin\left(x^2 + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n\,(n-1)}{1} (2x)^{n-2} \sin\left(x^2 + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \cdot 2} (2x)^{n-4} \sin\left(x^2 + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{n(n-1(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (2x)^{n-6} \sin\left(x^2 + (n-3)\frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

wie sich durch den Schluss von n auf $(n+1)$ beweisen lässt.

155) $y = \cos(x^2)$;

Aufl. $y' = -(2x) \sin(x^2) = (2x) \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$

$$y'' = -(2x)^2 \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (2x)^2 \cos\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right) + 2\cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = -(2x)^3 \sin\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right) + 2 \cdot 2 \cdot (2x) \cos\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$- 2 \cdot 1\, (2x) \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (2x)^3 \cos\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right) + 3 \cdot 2\, (2x) \cos\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$y^{IV} = -(2x)^4 \sin\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right) + 3.2\,(2x)^2 \cos\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$- 3 . 2\,(2x)^2 \sin\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right) + 3 . 2 . 2 \cos\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right)$$
$$= (2x)^4 \cos\left(x^2 + \frac{4\pi}{2}\right) + 4 . 3\,(2x)^2 \cos\left(x^2 + \frac{3\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{4 . 3 . 2}{1 . 2} \cos\left(x^2 + \frac{2\pi}{2}\right)$$

Allgemein findet man:

$$y^{(n)} = (2x)^n \cos\left(x^2 + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{n\,(n-1)}{1}\,(2x)^{n-2} \cos\left(x^2 + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 . 2}\,(2x)^{n-4} \cos\left(x^2 + (n-2)\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 . 2 . 3}(2x)^{n-6} \cos\left(x^2 + (n-3)\frac{\pi}{2}\right) + \ldots$$

wie sich durch den Schluss von n auf $n + 1$ beweisen lässt.

156) $y = x \operatorname{arctg} x$;

Aufl. $y' = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1 + x^2}$

$$y'' = \frac{2}{(1 + x^2)^2}$$
$$y''' = -8x\,(1 + x^2)^{-3}$$
$$y^{IV} = -8x\,(1 + x^2)^{-4}\,(1 - 5x^2)$$
$$y^{V} = 48\,(1 + x^2)^{-5}\,(3x - 5x^3)$$
$$y^{VI} = 48\,(1 + x^2)^{-6} \left\{ 3 - 42x^2 + 35x^4 \right\}$$
$$y^{VII} = 1920\,(1 + x^2)^{-7} \left\{ -3x + 14x^3 - 7x^5 \right\}$$
$$y^{VIII} = 1920\,(1 + x^2)^{-8} \left\{ -3 + 81x^2 - 189x^4 + 63x^6 \right\}$$
$$= 5760\,(1 + x^2)^{-8} \left\{ -1 + 27x^2 - 63x^4 + 21x^6 \right\}$$

Allgemein:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-2}\,(n-2)\,!\,(x^2 + 1)^{-n} \left\{ \frac{x\left[(x+i)^n - (x-i)^n\right]}{2i} \right.$$
$$\left. - \frac{n}{2}\left[(x+i)^n + (x-i)^n\right] \right\}.$$

157) $y = x^a e^x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = e^x \left(x^a + \frac{n}{1}\,(x^a)' + \frac{n\,(n-1)}{1 . 2}\,(x^a)'' + \right.$

$$+ \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1 . 2 . 3}\,(x^a)''' + \ldots + \frac{n}{1}\,(x^a)^{(n-1)} + (x^a)^{(n}$$

Andeut. Nach §. 38.

158) $y = x^a \sin x \; ; \; y^{(m)} = ?$

Aufl. $y^{(m)} = \sin\left(x + \frac{m\pi}{2}\right) x^a + \frac{m}{1} \sin\left(x + (m+1)\frac{\pi}{2}\right)(x^a)'$

$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin\left(x + (m-2)\frac{\pi}{2}\right)(x^a)'' + \ldots$

Andeut. Nach §. 38.

159) $y = x^a \cos x \; ; \; y^{(m)} = ?$

Aufl. $y^{(m)} = \cos\left(x + m\frac{\pi}{2}\right) x^a + \frac{m}{1} \cos\left(x + (m-1)\frac{\pi}{2}\right)(x^a)'$

$+ \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos\left(x + (m\ 2) - \frac{\pi}{2}\right)(x^a)'' + \ldots$

160) $f(x) = 2y + 3y' - 4y''^2;$

Aufl. $f'(x) = 2y' + 3y'' - 8y''y'''$

$f''(x) = 2y'' + 3y''' - 8y'''^2 - 8y''y^{IV}$

$f'''(x) = 2y''' + 3y^{IV} - 24y'''y^{IV} - 8y'''y^{V}$

. . . .

161) $f(x) = \sin(y' + y)$

Aufl. $f'(x) = (y'' + y')\cos(y' + y);$

$f''(x) = -(y'' + y')^2 \sin(y' + y) + (y''' + y'')\cos(y' + y)$

$f'''(x) = -(y''+y')^3\cos(y'+y) - 2(y''+y')(y'''+y'')\sin(y'+y)$

$+ (y^{IV} + y''')\cos(y'+y) - (y'''+y'')(y''+y')\sin(y'+y)$

. . . .

162) $f(x) = x + xy';$

Aufl. $f'(x) = 1 + xy'' + y'$

$f''(x) = xy''' + 2y''$

$f'''(x) = xy^{IV} + 3y'''$

$f^{IV}(x) = xy^{V} + 4y^{IV}$

$f^{V}(x) = xy^{VI} + 5y^{V}$

. . . .

163) $f(x) = xy'^3;$

Aufl. $f'(x) = y'^3 + 3xy'^2 y''$

$f''(x) = 6y'^2 y'' + 6xy'y''^2 + 3xy'^2 y'''$

$f'''(x) = 18y'y''^2 + 9y'^2 y''' + 6xy''^3 + 18xy'y''y'''$

$+ 3xy'^2 y^{IV}$

. . . .

164) $f(x) = x^m y;$

Aufl. $f' = mx^{m-1} y + x^m y'$

$f'' = 2mx^{m-1} y' + m(m-1) x^{m-2} y + x^m y''$

$f''' = 3m(m-1) x^{m-2} y' + 3mx^{m-1} y''$

$+ m(m-1)(m-2) x^{m-3} y + x^m y'''$

. . . .

165) $f(x) = ax^2 + bxy' + cy'^2$;

Aufl. $f'(x) = 2ax + bxy'' + by' + 2cy'y''$

$f''(x) = 2a + bxy''' + 2by'' + 2cy'y''' + 2cy''^2$

$f'''(x) = bxy^{IV} + 3by''' + 2cy'y^{IV} + 6cy''y'''$

$f^{IV}(x) = bxy^{V} + 4by^{IV} + 2cy'y^{V} + 8cy''y^{IV} + 6cy'''^2$

$f^{V}(x) = bxy^{VI} + 5by^{V} + 2cy'y^{VI} + 10cy''y^{V} + 20cy'''y^{IV}$

. . . .

166) $f = ax^5y^8$; $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = 1120ax^3y^6.$

167) $f = ax^3y^5$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3 \partial y^2} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3 \partial y^2} = 120axy^3.$

168) $f = e^{xy}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1 + xy)\, e^{xy}.$

169) $f = l\,\frac{xy}{x^2 + y^2 - r^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^4 - 4x^2y^2 + 4r^2x^2 - y^4 + 2r^2y^2 - r^4}{x^2(x^2 + y^2 - r^2)^2}.$

170) $f = \sin(x^2 + y^2)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos(x^2 + y^2) - 4y^2 \sin(x^2 + y^2)$

171) $f = e^{x^2+xy+y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (1 + 2x^2 + 2y^2 + 5xy)\, f.$

172) $f = \frac{e^{xy}}{x + y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{e^{xy}}{(x + y)^3}\,[xy\,(x + y)^2 + 2].$

173) $f = e^{xy+xz+yz}$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \{2\,(x + y + z) + (x+y)(x+z)(y+$ ... $f.$

174) $f = e^{xy+xz+xt+yz+yt+zt}$; $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial t} = ?$

Aufl. $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial t} = \{3 + (s-x)(s-y) + (s-x)(s-z) + (s-x)(s-t)$
$+ (s-y)(s-z) + (s-y)(s-t) + (s-z)(s-t)$
$+ (s-x)(s-y)(s-z)(s-t)\} f$

wenn der Kürze halber $x + y + z + t = s$ gesetzt wird.

175) $f = e^{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

Aufl. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 8xyz \,.\, e^{x^2+y^2+z^2}$.

176) $f = \sin(xy + xz + yz)$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

Aufl. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = -2(x+y+z)\sin(xy+xz+yz)$
$-(x+y)(x+z)(y+z)\cos(xy+xz+yz)$.

177) $f = \sin(x^3 + y^3 + z^3)$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

Aufl. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = -27\, x^2 y^2 z^2 \cos(x^3 + y^3 + z^3)$.

178) $f = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = ?$ und $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2} = ?$

Aufl. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$

$\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2} = 15xy\,(1 + x^2 + y^2)^{-\frac{7}{2}}$

179) $f = e^{xyz}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

Aufl. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\, e^{xyz}$.

180) $f = e^{xyzu}$; $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial u} = ?$

Aufl. $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z\, \partial u} = (1 + 7xyzu + 6x^2y^2z^2u^2 + x^3y^3z^3u^3)\, e^{xyzu}$.

181) $f = a^{xyz}$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

Aufl. $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = [1 + xyz\, la + xyz\,(1 + xyz\, la)\, la$
$+ xyz\, la]\, a^{xyz}\, la$.

182) $f = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + hy^3$; $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 2b.$

183) $f = arc\sin \frac{x}{y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -\frac{y}{(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

184) $f = \sin(x^2 + y^2)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -4xy \sin(x^2 + y^2).$

185) $f = \cos(xy)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \cos(xy).$

186) $f = l(x^2 + xy + y^2)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 2xy - 2y^2}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$

187) $f = e^{x^2+y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 4xy\, e^{x^2+y^2}.$

188) $f = \sin(xyz)$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = ?$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = z\,[\cos(xyz) - xyz \sin(xyz)]$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \cos(xyz) - 3xyz \sin(xyz) - (xyz)^2 \cos(xyz).$$

189) $f = \sin x \sin y + \sin x \sin z + \sin y \sin z$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = ?\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = ?\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} = ?$$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \cos x \cos y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z} = \cos x \cos z$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} = \cos y \cos z.$$

190) $f = \frac{e^x + e^y}{e^{2x} + e^{2y}}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = -\frac{2e^{x+y}(e^x + e\ )(e^{2x} - 4e^{x+y} + e^{2y})}{(e^{2x} + e^{2y})^3}.$

191) $f = \frac{e^{xy}}{x + y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{e^{xy}\,[xy\,(x + y)^2 + 2]}{(x + y)^3}.$

192) $f = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = - \frac{(x + y)(\cos x + \cos y) - 2(\sin x + \sin y)}{(x + y)^3}$.

193) $f = \sin(xyzt)$; $\frac{\partial^4 f}{\partial x \, \partial y \, \partial z \, \partial t} = ?$

Aufl. $\frac{\partial^4 f}{\partial x \, \partial y \, \partial z \, \partial t} = \cos(xyzt) - 7xyzt \sin(xyzt)$
$- 5(xyzt)^2 \cos(xyzt) + (xyzt)^3 \sin(xyzt)$.

194) $y = \frac{x + 29}{x^2 - 2x - 35}$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = (-1)^n \,.\, n! \,[3(x - 7)^{-n-1} - 2(x + 5)^{-n-1}]$.

Andeut. Zerlege den Bruch in die Partialbrüche $\frac{3}{x - 7} - \frac{2}{x + 5}$.

195) $y = \frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 1}$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = (-1) \; n! \,(x + 1)^{-n-2} \,[2x + 3n + 5]$.

Andeut. $\frac{2x + 5}{x^2 + 2x + 1} = \frac{2}{x + 1} + \frac{3}{(x + 1)^2}$.

196) $y = \frac{2x + 2}{x^2 - 4x + 7}$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = (-1)^n \, n! \,[(1 + i)(x - 2 + 3i)^{-n-1}$
$+ (1 - i)(x - 2 - 3i)^{-n-1}]$.

Andeut. $\frac{2x + 2}{x^2 - 4x + 7} = \frac{1 + i}{x - 2 + 3i} + \frac{1 - i}{x - 2 - 3i}$.

197) $y = \frac{x}{x^2 + x(b - a) - ab}$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{a + b} \,[a(x - a)^{-1-n} + b(x + b)^{-1-n}]$.

Andeut. $\frac{x}{x^2 + x(b - a) - ab} = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{1}{x - a} + \frac{b}{a + b} \cdot \frac{1}{x + b}$.

198) $y = \frac{7x^2 + 12x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x}$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = n! \,(-1)^n \,[x^{-n-1} + 2(x + 3)^{-n-1} + 4(x - 1)^{-n-1}]$.

Andeut. $\frac{7x^2 + 12x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x + 3} + \frac{4}{x - 1}$.

199) $y = \frac{3x^2 - 13x}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = (-1)^n n! \,[(x - 3)^{-n-2}(2x - 3n - 9) + (x + 1)^{-n-1}]$.

Andeut. $\frac{3x^2 - 13x}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} = \frac{2}{x - 3} - \frac{3}{(x - 3)^2} + \frac{1}{x + 1}$.

200) $y = \frac{3x^3 + 10x^2 + 14x + 16}{-x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2}$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = (-1)^n n! \Big\{(x + 1)^{-n-3}\Big[x^2 + 2x(n + 2) + \frac{12 + 13n + 3n^2}{2}\Big]$
$- 4(x - 2)^{-1-n}\Big\}$.

Andeut. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^3} - \frac{4}{x-2}$.

201) $y = \cos(a + bx)$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = b^n \cos\left(a + \frac{n\pi}{2} + bx\right)$.

202) $y = \sin(a + bx)$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = b^n \sin\left(a + \frac{n\pi}{2} + bx\right)$.

203) $y = \cos^2 x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = 2^{n-1} \cos\left(\frac{n\pi}{2} + 2x\right)$.

Andeut. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

204) $y = \sin^2 x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = -\,2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Andeut. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

205) $y = \cos^3 x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = \frac{1}{4}\left\{3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}$.

Andeut. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.

206) $y = \sin^3 x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = -\frac{1}{4}\left\{3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) - 3\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}$.

Andeut. $\sin^3 x = -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x)$.

207) $y = \cos^4 x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = 2^{2n-3} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Andeut. $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 6)$.

208) $y = \sin^4 x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = 2^{2n-3} \cos\left(4x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Andeut. $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 6)$.

209) $y = \cos^5 x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $y^{(n)} = \frac{1}{16}\left\{5^n \cos\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right) + 5 \,.\, 3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right)\right.$

$\left. + 10 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}$.

Andeut. $\cos^5 x = \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x)$.

210) $y = \sin^5 x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = \frac{1}{16}\left\{5^n \sin\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right) - 5 \cdot 3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 10 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right\}.$$

Andeut. $\sin^5 x = \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$

211) $y = \cos ax \cos bx$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = \tfrac{1}{2}(a+b)^n \cos\left\{(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right\} + \tfrac{1}{2}(a-b)^n \cos\left\{(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right\}.$$

Andeut. $2\cos ax \cos bx = \cos(a+b)x + \cos(a-b)x.$

212) $y = \sin ax \cos bx$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = \tfrac{1}{2}(a+b)^n \sin\left\{(a+b)x + \frac{n\pi}{2}\right\} + \tfrac{1}{2}(a-b)^n \sin\left\{(a-b)x + \frac{n\pi}{2}\right\}.$$

213) $y = \cos ax \cos bx \cos cx$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = \tfrac{1}{4}(a+b+c)^n \cos\left\{(a+b+c)x + \frac{n\pi}{2}\right\} + \tfrac{1}{4}(a+b-c)^n \cos\left\{(a+b-c)x + \frac{n\pi}{2}\right\} + \tfrac{1}{4}(a-b+c)^n \cos\left\{(a-b+c)x + \frac{n\pi}{2}\right\} + \tfrac{1}{4}(-a+b+c)^n \cos\left\{(-a+b+c)x + \frac{n\pi}{2}\right\}.$$

214) $y = x^r \sin x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) x^r + \frac{n}{1}\sin\left(x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right) r x^{r-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\sin\left(x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) r(r-1)x^{r-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\sin\left(x + (n-3)\frac{\pi}{2}\right) r(r-1)(r-2)x^{r-3} + \dots$$

Andeut. Nach §. 38.

215) $y = x^r e^x$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = e^x \Big\{ r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)\,x^{r-n} + \frac{n}{1} r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+2)\,x^{r-n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+3)\,x^{r-n+2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} r(r-1)\,x^{r-2} + \frac{n}{1} r x^{r-1} + x^r \Big\}$$

Andeut. Nach §. 38.

216) $y = e^{px} \cos(qx + s)$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = (p^2 + q^2)^{\frac{n}{2}} e^{px} \cos\left(qx + s + n \operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right).$$

Andeut. Man setze: $p = r\cos\alpha$; $q = r\sin\alpha$; $r = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{q}{p}$.

217) $y = e^{px} \sin(qx + s)$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = (p^2 + q^2)^{\frac{n}{2}} e^{px} \sin\left(qx + s + n \operatorname{arctg}\frac{q}{p}\right).$$

Andeut. Vergl. 216.

218) $y = e^{px} \sin^2(qx + s)$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = \tfrac{1}{2} p^n e^{px} - \tfrac{1}{2}(p^2 + 4q^2)^{\frac{n}{2}} e^{px} \cos\left(2qs + 2s + n \operatorname{arctg}\frac{2q}{p}\right).$$

Andeut. $\sin^2(qx + s) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2qs + 2s))$.

219) $y = e^{px} \cos^2(qx + s)$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = \tfrac{1}{2} p^n e^{px} + \tfrac{1}{2}(p^2 + 4q^2)^{\frac{n}{2}} \cos\left(2qx + 2s + n \operatorname{arctg}\frac{2q}{p}\right).$$

Andeut. Vergl. 216.

220) $y = x(a + bx)^r$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+2)\,b^{n-1}(a + bx)^{r-n} \{ na + (r+1)bx \}.$$

Andeut. Nach §. 38.

221) $y = x^2(1 + x)^r$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+3)(1 + x)^{r-n} \{ x^2(r+1)(r+2) + 2nx(r+1) + n(n-1) \}.$$

Andeut. Nach §. 38.

222) $y = x^r lx$; $y^{(n)} = ?$

Aufl. $$y^{(n)} = x^{r-n}(-1)^{n-1}(n-1)! \Big\{ 1 - \frac{nr}{n-1} + \frac{nr(r}{1.2.(n-} - \frac{nr(r-1)(r-2)}{1.2.3\,(n-3)} + \frac{nr(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3.4\,(n-4)} \Big\} + (-1)^{n-1} \frac{nr(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1)}{n!}$$

Andeut. Nach §. 38.

c) Ueber die Vertauschung der unabhängig Veränderlichen.

223) Es sei $2(1 - \sin x)\frac{dy}{dx} = (2 - \sin x)\, y \cot x$; man soll statt x die neue Veränderliche t einführen, wenn $x = \arcsin t$ ist.

Aufl. $2(1 - t)\frac{dy}{dt} = \frac{2 - t}{t}\, y.$

Andeut. Setze $\sin x = t$ u. s. w.

224) In der Gleichung $y^3 \frac{d^2y}{dx^2} = 1$ die Veränderliche x durch die neue t zu ersetzen, wenn $x = \frac{1 - t^2}{2t}$ gegeben ist.

Aufl. $y^3 \left[t(t^2 + 1)\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right] = -\frac{1}{4}\left(\frac{t^2 + 1}{t}\right)^3.$

225) Es sei $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x(\sqrt{1 - y^2} - ye^x)$, $x = lt$; man soll x durch t ersetzen.

Aufl. $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = \sqrt{1 - y^2} - ty.$

Andeut. $e^x = t$, $\frac{dy}{dx} = t\frac{dy}{dt}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d\left(t\frac{dy}{dt}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ u. s. w.

226) Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = c + a(2\cos^2 x - \sin^2 x),\ \sin x = t;$$

man soll eine Gleichung zwischen y und der neuen Veränderlichen t aufstellen.

Aufl. $(1 - t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt} + y = c + a(2 - 3t^2).$

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - t^2}\,\frac{dy}{dt}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 - t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - t\frac{dy}{dt}.$

227) In der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ soll x durch t ersetzt ›rden, wenn $ax + b = t$.

Aufl. $\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0.$

Andeut. $\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = a^2\frac{d^2y}{dt^2}.$

228) Es sei

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{b}{2\,(e^y - b)} \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2;\ t = ax^2 + b.$$

Aufl. $4a\,(t - b)\,\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2a\,\dfrac{dy}{dt} + 2a\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 (t - b)$

$$= \frac{2ab}{e^y - b}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 (t - b).$$

Andeut. $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{a}\,\dfrac{dy}{dt}\,\sqrt{t - b}.$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4a\,(t - b)\,\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\,\frac{dy}{dt}.$$

229) Gegeben sei:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4ac - b^2}{(ax^2 + bx + c)^2};\ t = ax^2 + bx + c.$$

Aufl. $4at\left[\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + 2\,\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{1}{t}\,\dfrac{dy}{dt}\right]$

$$= (4ac - b^2)\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t^2}\right].$$

Andeut. $\dfrac{dy}{dx} = (2ax + b)\,\dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (4at - 4ac + b^2)\,\frac{d^2y}{dt^2} + 2a\,\frac{dy}{dt}.$$

230) Es sei: $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{x}{1 - x^2}\,\dfrac{dy}{dx} + y = x$, $x = \sin t.$

Aufl. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y\cos^2 t = \cos^2 t\,\sin t.$

Andeut. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos t}\,\dfrac{dy}{dt},$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^3 t}\left[\cos t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\sin t\right].$$

231) Es sei y eine Function von x, ferner $x = \cos t$, also y und x Functionen von t; man soll $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ausdrücken durch

$$\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^3y}{dt^3}.$$

Aufl. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sin t}\,\dfrac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^3 t}\left[\sin t\,\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cos t\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{1}{\sin^5 t}\left[-2\sin t\cos t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \sin^2 t\,\frac{d^3y}{dt^3} - \sin t\cos t\,\frac{d^2y}{dt^2} + (1 + 2\cos^2 t)\,\frac{dy}{dt}\right].$$

232) Wenn $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x+1}{1-x^2}\frac{dy}{dx} = x + 1$ und $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, welche Gleichung erhält man zwischen y und t?

Aufl. $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-32t^4}{(t^2+1)^5}$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{(t^2+1)^2}{4t}\frac{dy}{dt}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(t^2+1)^4}{16t^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(t^2+1)^3\,(3t^2-1)}{16t^3}\frac{dy}{dt}.$$

233) Aus $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0$ und $t = lx$ eine Gleichung zwischen y und t zu entwickeln.

Aufl. $\frac{d^3y}{dt^3} + (a-3)\frac{d^2y}{dt^2} + (b+2-a)\frac{dy}{dt} + cy = 0$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{-3t}\left[\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right].$$

234) Es sei

$$(1-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} - x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + by = 0\,,\ x = \sin t\,;$$

man soll x durch t ersetzen.

Aufl. $\cos^2 t\,\frac{d^2y}{dt^2} + by = 0$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos t}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^3 t}\left[\cos t\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\sin t\right].$$

235) Aus $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + ay = 0$ und $x = e^t$ eine Gleichung zwischen y und t aufzustellen.

Aufl. $\frac{d^2y}{dt^2} + ay = 0$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

236) Gegeben: $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0$ und $x = \cos t$.

Aufl. $\frac{d^2y}{dt^2} - (a+1)\frac{dy}{dt}\cot g\, t + by = 0$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^3 t}\left[\sin t\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cos t\right].$$

237) $\frac{dy}{dx} + \frac{ay}{\sqrt{1+x^2}} = 2b$; $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

Aufl. $\frac{dy}{dt} + ay = b(e^t + e^{-t})$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}\frac{dy}{dt}$

$$\sqrt{1+x^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

238) Es sei $\frac{d^2y}{dx^2} + ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + be^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$.

Man soll diese Gleichung so umformen, dass nicht mehr x sondern y die unabhängig Variable wird.

Aufl. $\frac{d^2x}{dy^2} - ax - be^y = 0$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-3}\frac{d^2x}{dy^2}.$$

239) In der Gleichung

$$(1-x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax(1-x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{by}{1-x} = 0.$$

x durch t zu ersetzen, wenn $x = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$.

Aufl. $4\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{e^t - 1}{e^t + 1}\frac{dy}{dt}(a+2) + \frac{by(e^t+1)}{2} = 0$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^{-t}(e^t+1)^2\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(e^t+1)^4}{4e^{2t}}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(e^t+1)^3(e^t-1)}{4e^{2t}}\frac{dy}{dt}.$$

$$1 - x^2 = \frac{4e^t}{(e^t+1)^2},\quad 1 - x = \frac{2}{e^t+1}.$$

240) Es sei $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a}{x}\frac{dy}{dx} + by = 0$; $x^2 = c^2t$,

man soll x durch t ersetzen.

Aufl. $t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{a+1}{2}\frac{dy}{dt} + \frac{bc^2}{4}y = 0$.

Andeut. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{c}\sqrt{t}\frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4t}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2}{c^2}\frac{dy}{dt}.$$

241) Man soll die Gleichung $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}}$ so umformen, dass nicht mehr x sondern y die unabhängig Veränderliche ist, wenn der Zusammenhang zwischen y und x gegeben ist durch die Gleichung

$$\sin(2y - x) = a \sin x \quad \ldots \quad (1)$$

Aufl. $\frac{dz}{dy} = (b + 1) \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - b^2) \sin^2 y}}$, wenn $b = \frac{1 - a}{1 + a}$.

Andeut. Setzt man in (1): $x - y = t$,
also
$$x = t + y, \; 2y - x = y - t,$$
so folgt:
$$\sin(y - t) = a \sin(y + t)$$
und hieraus:
$$\sin(y + t) + \sin(y - t) = (1 + a) \sin(y + t)$$
$$\sin(y + t) - \sin(y - t) = (1 - a) \sin(y + t)$$
oder nach bekannten Formeln
$$2 \sin y \cos t = (1 + a) \sin(y + t) \quad \ldots \quad (2)$$
$$2 \cos y \sin t = (1 - a) \sin(y + t) \quad \ldots \quad (3)$$

Daher durch Division:
$$\frac{tg\, y}{tg\, t} = \frac{1 + a}{1 - a}, \text{ also } tg(x - y) = b\, tg\, y \quad \ldots \quad (4)$$
wenn der Kürze halber $\frac{1 - a}{1 + a} = b$ gesetzt wird.

Sucht man aus (4) den Differentialquotienten nach y, so folgt:
$$\frac{\frac{dx}{dy} - 1}{\cos^2(x - y)} = \frac{b}{\cos^2 y}$$
und hieraus mit Berücksichtigung von (4):
$$\frac{dx}{dy} = (1 + b) \frac{\cos^2 y + b \sin^2 y}{\cos^2 y + b^2 \sin^2 y}.$$

Aus (4) folgt, wenn $tg\, \alpha = b\, tg\, y$, also
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2 tg^2 y}}; \; \sin \alpha = \frac{b\, tg\, y}{\sqrt{1 + b^2 tg^2 y}}$$
gesetzt wird,
$$x - y = \alpha,$$
also
$$\sin x = \sin y \cos \alpha + \cos y \sin \alpha$$
und hieraus durch Substitution obiger Werthe:
$$\sin x = \frac{(b + 1) \sin y}{\sqrt{1 + b^2 tg^2 y}}$$

Daher: $1 - a^2 \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1 - b}{1 + b}\right)^2 \sin^2 x = \frac{(\cos^2 y + b \sin^2 y)^2}{\cos^2 y + b^2 \sin^2 y}$

und
$$\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x} = \frac{\cos^2 y + b \sin^2 y}{\sqrt{\cos^2 y + b^2 \sin^2 y}}$$
un ist
$$\frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 x}} \frac{dx}{dy}.$$
-enn man die betreffenden Werthe einführt:
$$\frac{dz}{dy} = (1 + b) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - b^2) \sin^2 y}}.$$

242) Es sei y eine Function von x, man soll für y und x die neuen Veränderlichen η und ξ mittelst der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = \xi\eta \\ y = \xi + \eta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

einführen, wenn ξ die neue unabhängig Veränderliche ist; ferner $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ausdrücken durch $\frac{d\eta}{d\xi}$, $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$.

Aufl. Bezeichnet man die neuen Differentialquotienten durch η' und η'' so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \eta'}{\eta + \xi\eta'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\eta + \xi\eta')\,\eta'' - (1 + \eta')\,(\eta' + \xi'\eta' + \xi\eta'')}{(\eta + \xi\eta')^3}$$

Andeut. Da x, y, η Functionen von ξ sind, so erhält man durch Differentiation der Gleichungen (1) nach ξ:

$$\frac{dx}{d\xi} = \eta + \xi\eta', \quad \frac{dy}{d\xi} = 1 + \eta';$$

daher:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\frac{dx}{d\xi}} \text{ u. s. w.}$$

243) Dieselbe Aufgabe zu lösen, wenn

$$x = a\xi + b\eta, \quad y = \alpha\xi + \beta\eta,$$

wo a, b, α, β, Constante bedeuten.

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha + \beta\eta'}{a + b\eta'}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a\beta - b\alpha)\,\eta''}{(a + b\eta')^3}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{(a\beta - b\alpha)}{(a + b\eta')^5}\left\{(a + b\eta')\,\eta''' - 3b\eta''^2\right\}.$$

244) Aufgabe 242 zu lösen, wenn

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{1}{\eta}.$$

Aufl. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta'\xi^2}{\eta^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\xi^2}{\eta^3}\left\{\eta\,(\eta''\xi^2 + 2\eta'\xi\xi') - 2\eta'^2\xi^2\right\}.$$

245) Dieselbe Aufgabe für

$$x = l\xi; \quad y = e^\eta$$

zu lösen.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \xi\eta' e^{\eta}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \xi e^{\eta}\left[\eta' + \xi\eta'' + \xi\eta'^2\right].$$

246) Es sei u eine Function der unabhängig Veränderlichen x und y; man soll $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ ausdrücken durch

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

wenn gegeben ist:

$$x = \xi + \eta\,;\; y = \xi - \eta.$$

Aufl.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

d) Ueber die Entwickelung der Functionen in Reihen.

247) $y = \cos(\lambda \arcsin x)$ in eine Reihe zu verwandeln.

Aufl.
$$y = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2}\lambda^2 + \frac{x^4}{4!}\lambda^2(\lambda^2 - 2^2) - \frac{x^6}{6!}\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2)$$
$$+ \frac{x^8}{8!}\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2)(\lambda^2 - 6^2) + \ldots$$

Andeut. Man findet

$$y' = -\sin(\lambda \arcsin x)\frac{\lambda}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$y'' = -\frac{\lambda^2 y}{1 - x^2} - \frac{\lambda x}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\lambda \arcsin x)$$

und hieraus

$$(1 - x^2)\,y'' = -\lambda^2 y + y'x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten den $(n - 1)$ten Differentialquotienten, so folgt nach §. 38:

$$\left\{(1 - x^2)\,y''\right\}^{(n-1)} = y^{(n+1)}(1 - x^2) - 2x(n - 1)\,y^{(n)} - (n-1)(n-2)\,y^{(n-1)}$$
$$(y'x)^{(n-1)} = y^{(n)}x + (n - 1)\,y^{(n-1)}$$

und für $x = 0$ ist daher nach (1):

$$y_0^{(n+1)} = y_0^{(n-1)}\left((n-1)^2 - \lambda^2\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da nun, wie leicht zu finden,

$$y_0 = 1\;;\; y_0' = 0\;;\; y_0'' = -\lambda^2,$$

so folgt aus (2):

$$y_0''' = 0\,,\; y_0^{IV} = \lambda^2(\lambda^2 - 2^2)$$
$$y_0^{V} = 0\,,\; y_0^{VI} = -\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2)$$
$$y_0^{VII} = 0\,,\; y_0^{VIII} = -\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2)(\lambda^2 - 6^2) \text{ u. s. w.}$$

248) $y = \sin(\lambda \arcsin x)$ in eine Reihe zu verwandeln.

Aufl. $$y = \frac{x}{1}\lambda - \frac{x^3}{3!}\lambda(\lambda^2 - 1^2) + \frac{x^5}{5!}\lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)$$
$$- \frac{x^7}{7!}\lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)(\lambda^2 - 5^2) + \ldots$$

Andeut. Man findet wie in der vorigen Aufgabe die Gleichungen (1) und (2) und da

$$y_0 = 0\;;\; y_0' = \lambda\;;\; y_0'' = 0\;;$$

so folgt aus (2):

$$y_0''' = -\lambda(\lambda^2 - 1^2)\;;$$
$$y_0^{IV} = 0\;;\; y_0^{V} = \lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)\;;$$
$$y_0^{VI} = 0\;;\; y_0^{VII} = -\lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)(\lambda^2 - 5^2) \text{ u. s. w.}$$

249) Es sei $y = \cos(\lambda \operatorname{arc}\cos x)$.

Aufl. $$\cos\frac{\lambda\pi}{2}\left\{1 - \frac{x^2}{2!}\lambda^2 + \frac{x^4}{4!}\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)\right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{6!}\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2) + \ldots\right\}$$
$$+ \sin\frac{\lambda\pi}{2}\left\{\frac{x}{1}\lambda - \frac{x^3}{3!}\lambda(\lambda^2 - 1^2) + \frac{x^5}{5!}\lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2) - \ldots\right\}$$

Andeut. Man findet wieder die Gleichungen (1) und (2); jedoch ist nun

$$y_0 = \cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right),\; y_0' = \lambda\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right),\; y_0'' = -\lambda^2\cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right) \text{ u. s. w.}$$

250) Es sei $y = \sin(\lambda \operatorname{arc}\cos x)$.

Aufl. $$y = \sin\frac{\lambda\pi}{2}\left\{1 - \frac{x^2}{2!}\lambda^2 + \frac{x^4}{4!}\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)\right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{6!}\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2) + \ldots\right\}$$
$$- \cos\frac{\lambda\pi}{2}\left\{\frac{x}{1}\lambda - \frac{x^3}{3!}\lambda(\lambda^2 - 1^2)\right.$$
$$\left. + \frac{x^5}{5!}\lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2) - \frac{x^7}{7!}\lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)(\lambda^2 - 5^2) + \ldots\right\}$$

Andeut. Entwickele wieder die Gleichungen (1) und (2), wo nun

$$y_0 = \sin\frac{\lambda\pi}{2}\;;\; y_0' = -\lambda\cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)$$
$$y_0'' = -\lambda^2\sin\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)\;;\; y_0''' = \lambda(\lambda^2 - 1^2)\cos\left(\frac{\lambda\pi}{2}\right);$$
$$y_0^{IV} = \lambda^2(\lambda^2 - 2^2)\sin\frac{\lambda\pi}{2}\;;\; y_0^{IV} = -\lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)\cos\;;$$

251) Man soll e^{x^2} unabhängig von der Formel für e^x entwickeln.

Aufl. $e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3} + \frac{x^8}{1.2.3.4} + \ldots$

Andeut. Aus $y = e^{x^2}$ findet man $y' = 2yx$. Nimmt man daher nach §. 38 auf beiden Seiten den $(n-1)$ten Differentialquotienten und setzt $x = 0$, so folgt:

$$y_0{}'^{(n)} = 2(n-1)\, y_0{}^{n-2}.$$

Nun ist $y_0 = 1\,;\ y_0{}' = 0\,;\ y_0{}'' = 2\,;$

daher $y_0{}''' = 0\,;\ y_0{}^{IV} = 2^2 . 1 . 3\,;\ y_0{}^{V} = 0\,;$

$y_0{}^{VI} = 2^3 . 1 . 3 . 5\,;\ y_0{}^{VII} = 0\,;\ y_0{}^{VIII} = 2^4 . 1 . 3 . 5 . 7\,;\ y_0{}^{IX} = 0\,;$

$y_0{}^{X} = 2^5 . 1 . 3 . 5 . 7 . 9$ u. s. w.

und allgemein $y_0{}^{(2n-1)} = 0;\ y_0{}^{(2n)} = 2^n . 1 . 3 . 5 . 7 \ldots (2n-1).$

252) Man soll $\sin(x^2)$ unabhängig von der Formel für $\sin x$ entwickeln.

Aufl. $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots$

Andeut. Aus $y = \sin(x^2)$ folgt:

$$y''x = y' - 4x^3y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nimmt man nun nach §. 38 auf beiden Seiten den $(n-1)$ten Differentialquotienten und setzt $x = 0$, so ergibt sich

$$y_0{}^n = -4(n-1)(n-3)\, y_0{}^{n-4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nun ist aber $y_0 = 0\,;\ y_0{}' = 0 : y_0{}'' = 2\,;\ y_0{}''' = 0\,;\ y_0{}^{IV} = 0\,;$

daher $y_0{}^{V} = 0\,;\ y_0{}^{VI} = -2^3 . 1 . 3 . 5\,;\ y_0{}^{VII} = 0\,;\ y_0{}^{VIII} = 0\,;$

$y_0{}^{IX} = 0\,;\ y_0{}^{X} = 2^5 . 1 . 3 . 5 . 7 . 9$

und allgemein $y_0{}^{(4n+2)}{}_0 = (-1)^n\, 2^{2n+1} . 1 . 3 . 5 . 7 \ldots (4n+1)$ u. s. w.

253) Man soll $\cos(x^2)$ unabhängig von der Formel für $\cos(x)$ entwickeln.

Aufl. $\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots$

Andeut. Man findet wie in der vorigen Aufgabe die Gleichungen (3) und (4).

Nun ist aber: $y_0 = 1\,;\ y_0{}' = 0\,;\ y_0{}'' = 0\,;\ y_0{}''' = 0\,;$

$y_0{}^{IV} = 12 = -2^2 . 1 . 3\,;$

daher $y_0{}^{V} = 0\,;\ y_0{}^{VI} = 0\,;\ y_0{}^{VII} = 0\,;\ y_0{}^{VIII} = +2^4 . 1 . 3 . 5 . 7\,;$

$y_0{}^{IX} = 0\,;\ y_0{}^{X} = 0\,;\ y_0{}^{XI} = 0\,;\ y_0{}^{XII} = -2^6 . 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11$

und allgemein: $y_0{}^{(4n)} = (-1)^n . 2^{2n} . 1 . 3 . 5 \ldots (4n-1)$ u. s. w.

254) $y = l(x + \sqrt{1 + x^2})$ in eine Reihe zu entwickeln.

Aufl. $x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots$

Andeut. Man findet $y''(1 + x^2) = -xy'$. Nimmt man auf beiden Seiten den $n$ten Differentialquotienten und setzt $x = 0$, so folgt:

$$y_0{}^{(m)} = -(m-2)^2\, y_0{}^{(m-2)}.$$

Nun ist: $y_0 = 0\,;\ y_0{}' = 1\,;\ y_0{}'' = 0\,;$

also $y_0{}''' = -1\,;\ y_0{}^{IV} = 0\,;\ y_0{}^{V} = +3^2\,;$

$y_0{}^{VI} = 0\,;\ y_0{}^{VII} = -1^2 . 3^2 . 5^2\,;\ y_0{}^{VIII} = 0\,;\ y_0{}^{IX} = 1^2 3^2 5^2 7^2$

und allgemein: $y_0{}^{(2n+1)} = (-1)^n . 1^2 . 3^2 . 5^2 \ldots (2n-1)^2.$

Das allgemeine Glied wird daher:

$$(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \frac{1 . 3 . 5 . 7 \ldots (2n-1)}{2 . 4 . 6 . 8 \ldots 2n}.$$

255) $y = (arc\sin x)^2$ zu entwickeln.

Aufl. $\frac{x^2}{1\,.\,2}\,.\,2 + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,2^2\,.\,2 + \frac{x^6}{6!}\,.\,4^2\,.\,2^2\,.\,2$

$$+ \frac{x^8}{8!}\,.\,6^2\,.\,4^2\,.\,2^2\,.\,2 + \frac{x^{10}}{10!}\,8^2.\,6^2.\,4^2.\,2^2.\,2 + \ldots$$

Andeut. Man findet $y' = \frac{2 arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y'' = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\, arc\sin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ und hieraus:

$$(1 - x^2)\, y'' = 2 + xy'.$$

Nimmt man nun nach §. 38 auf jeder Seite den $(n-1)$ten Differentialquotienten und setzt dann $x = 0$, so folgt:

$$y_0^{(m)} = (m-2)^2\, y_0^{(m-2)}.$$

Nun ist: $y_0 = 0$; $y_0' = 0$; $y_0'' = 2$;

daher: $y_0''' = 0$; $y_0^{IV} = 2^2\,.\,2$; $y_0^{V} = 0$; $y_0^{VI} = 4^2\,.\,2^2\,.\,2$; $y_0^{VII} = 0$;

$$y_0^{VIII} = 6^2\,.\,4^2\,.\,2^2\,.\,2$$

und allgemein: $y_0^{(2n)} = 2\,.\,2^2\,.\,4^2\,.\,6^2\,.\,8^2\,\ldots\,(2n-2)^2.$

256) $y = \frac{e^x}{1-x} = e^x\,(1-x)^{-1}$ zu entwickeln.

Aufl. $y = 1 + x\left(1 + \frac{1}{1}\right) + x^2\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2}\right)$

$$+ x^3\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\right) + \ldots.$$

Andeut. Nimmt man auf jeder Seite der Gleichung den $n$ten Differentialquotienten, so folgt:

$$y^{(n)} = e^x\, n!\,\Big\{(1-x)^{-n-1} + \frac{1}{1}\,(1-x)^{-n} + \frac{1}{1\,.\,2}\,(1-x)^{-n+1}$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,(1-x)^{-n+2} + \ldots + \frac{(1-x)^{-2}}{(n-1)!} + \frac{(1-x)^{-1}}{n!}\Big\}$$

also für $x = 0$:

$$y_0^{(n)} = n!\,\Big\{1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{1}{n!}\Big\}.$$

Das allgemeine Glied ist daher:

$$x^n\Big\{1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\,.\,2} + \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + \frac{1}{n!}\Big\} \text{ u. s. w.}$$

257) Man soll $y = x\, arctg\, x$ unabhängig von der Reihe für $arctg\, x$ entwickeln.

Aufl. $y = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \frac{x^{10}}{9} - \ldots$

Andeut. Aus $y = x\, arctg\, x$ leitet man ab:

$$y'x = y + 1 - \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right).$$

Nimmt man daher auf jeder Seite den $n$ten Differentialquotienten, so fol

$$y^{(n+1)}\, x + ny^{(n)} = y^{(n)} - \frac{1}{2i}\,(-1)^n\, n!\,\left[(x-i)^{-n-1} - (x+i\right.$$

und hieraus für $x = 0$:

$$(n-1)\, y_0^{(n)} = -\frac{n!}{2}\, i^{-n}\,\Big\{1 + (-1)^n\Big\}.$$

Ist daher n ungerade, so folgt: $y_0^{(n)} = 0$; für ein gerades n dagegen wird

$$y_0^{(n)} = \frac{-n!}{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}$$

Das allgemeine Glied ist daher:

$$\frac{x^{2n}}{(2n!)} \cdot \frac{-(2n)!}{2n-1} \cdot (-1)^n = -\frac{x^{2n}}{2n-1} \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n-1}.$$

258) Man soll $y = x^a l(1+x)$ unabhängig von der Reihe für $l(1+x)$ entwickeln.

Aufl. $y = x^a - \frac{x^{a+2}}{2} + \frac{x^{a+3}}{3} - \frac{x^{a+4}}{4} + \ldots$

Andeut. Nehmen wir an, es sei a ungerade, so folgt:

$$y'x = ay + x^a - x^{a-1} + \ldots + x - 1 + (x+1)^{-1}.$$

Nimmt man daher beiderseits den $m$ten Differentialquotienten, so resultirt für $m > a + 1$:

$$(y'x)^{(m)} = ay^{(m)} + \frac{(-1)^m m!}{(x+1)^{m+1}}$$

und daher für $x = 0$:

$$y_0^{(m)} = \frac{(-1)^m m!}{m-a}.$$

Das allgemeine Glied wird demnach, wenn $m \geq a + 1$:

$$\frac{x^m}{m!}\frac{(-1)^m m!}{m-a} = (-1)^m\frac{x^m}{m-a} = -(-1)^{m-a}\frac{x^m}{m-a},$$

welche Formel auch für ein gerades a gilt.

259) Man soll $y = x^a e^x$ unabhängig von der Formel für e^x entwickeln.

Aufl. $y = x^a + \frac{x^{a+1}}{1} + \frac{x^{a+2}}{1.2} + \frac{x^{a+3}}{1.2.3} + \ldots$

Andeut. Man findet $y'x = ay + yx$. Nimmt man nun auf beiden Seiten den $m$ten Differentialquotienten und setzt $x = 0$, so folgt:

$$y_0^{(m)} = \frac{m}{m-a} y_0^{m-1}.$$

Nun ist aber $y_0^{(m)} = 0$, sobald $m < a$. Für $m = a$ folgt: $y_0^{(a)} = a!$
Daher ist:

$$y_0^{(a+1)} = (a+1)!\,;\; y_0^{(a+2)} = \frac{(a+2)!}{2}$$

$$y_0^{(a+3)} = \frac{(a+3)!}{3!} \ldots\ldots y_0^{a+p} = \frac{(a+p)!}{p!}.$$

[illegible]gemeine Glied ist somit:

$$\frac{x^{a+p}}{(a+p)!}\frac{(a+p)!}{p!} = \frac{x^{a+p}}{p!}.$$

) Man soll $y = x^a \sin x$ unabhängig von der Formel für si[illegible]ickeln.

[illegible]fl. $y = x^{a+1} - \frac{x^{a+3}}{3!} + \frac{x^{a+5}}{5!} - \frac{x^{a+7}}{7!} + \ldots$

Andeut. Aus $y = x^a \sin x$ findet man:

$$y'x = ay + x^{a+1} \cos x,$$

$$\frac{y'x - ay}{x^{a+1}} = \cos x.$$

Nimmt man auf beiden Seiten den ersten Differentialquotienten und multiplicirt mit x^a, so folgt:

$$y''x^2 - 2ay'x + y\,(x^2 + a^2 + a) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Bestimmt man nun den $m$ten Differentialquotienten und setzt $x = 0$, so resultirt:

$$y_0^{(m)} = -\frac{m\,(m-1)}{(m-a)\,(m-a-1)}\, y_0^{m-2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

und man erhält nun leicht: $y_0^{(m)} = 0$, wenn $m \lessgtr a$ und $y_0^{(a+1)} = (a+1)!$; daher $y_0^{(a+2)} = 0$; $y_0^{(a+3)} = -\frac{(a+3)!}{3!}$; $y_0^{(a+4)} = 0$; $y_0^{(a+5)} = \frac{(a+5)!}{5!}$

und allgemein:

$$y_0^{(a+2p+1)} = (-1)^p \, \frac{(a+2p+1)!}{(2p+1)!}$$

261) Man soll $x^a \cos x$ unabhängig von der Formel für $\cos x$ entwickeln.

Aufl. $y = x^a - \frac{x^{a+2}}{2!} + \frac{x^{a+4}}{4!} - \frac{x^{a+6}}{6!} + \ldots$

Andeut. Man findet auf dieselbe Weise wie in der vorigen Aufgabe die zwei Gleichungen (5) und (6) und alsdann leicht: $y_0^{(m)} = 0$ für $m < a$; $y_0^{(a)} = a!$, daher $y_0^{(a+1)} = 0$, $y_0^{(a+2)} = -\frac{(a+2)!}{2!}$ $y_0^{(a+3)} = 0$, $y_0^{(a+4)} = \frac{(a+4)!}{4!}$

und allgemein:

$$y_0^{(a+2p)} = (-1)^p \, \frac{(a+2p)!}{(2p)!}$$

e) Ueber unbestimmte Formen.

262) $\frac{x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1}{x^5 - 6x^4 + 14x^3 - 16x^2 + 9x - 2}$ für $x = 1$?

Aufl. $\frac{0}{0} = -2.$

263) $\frac{x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 20x^3 - 25x^2 - 14x - 3}{x^6 + 3x^5 - 10x^3 - 15x^2 - 9x - 2}$ für $x = -1$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{4}{3}.$

264) $\frac{\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{6x+3} - 5}{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{x-3} - 4}$ für $x = 4$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{7}{12}.$

265) $\frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$ für $x = 7$?

Aufl. $\frac{0}{0} = \frac{112}{27}.$

266) $\dfrac{e^{x-3}-1}{x-3}$ für $x = 3$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = 1.$

267) $\dfrac{\sin(1-x)}{l(2-x)}$ für $x = 1$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = 1.$

268) $\dfrac{\sin(2-x)}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}}$ für $x = 2$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = -4.$

269) $\dfrac{l(x^2-3)}{x-2}$ für $x = 2$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = 4.$

270) $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}(x^3-7)}{x-2}$ für $x = 2$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = -6\pi.$

271) $\dfrac{1-nx^n+(n+1)x^{n-1}-2x^{n-2}}{1-x}$ für $x = 1$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = 2n-3.$

272) $\dfrac{\operatorname{arc\,tg}(x-1)}{x-1}$ für $x = 1$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = 1.$

273) $\dfrac{2\cos x + l(1+x) - 2}{x}$ für $x = 0$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = 0.$

274) $\dfrac{\sqrt{(x-a)^3}+\sqrt[3]{(x^2-a^2)^4}}{e^x-e^a}$ für $x = a$?

Aufl. $\dfrac{0}{0} = 0.$

275) $\frac{l(1+x)-\sin x}{x^2}$ für $x=0$?

Aufl. $\frac{0}{0}=-\frac{1}{2}$.

276) $\frac{l(1+\sin x)}{x}$ für $x=0$?

Aufl. $\frac{0}{0}=1$.

277) $\frac{l(x-2)}{x^2-6x+9}$ für $x=3$?

Aufl. $\frac{0}{0}=\infty$.

278) $\frac{e^{x^2-1}-1}{x^3-1}$ für $x=1$?

Aufl. $\frac{0}{0}=\frac{2}{3}$.

279) $\frac{arctg\, e^x-\frac{\pi}{4}}{x}$ für $x=0$?

Aufl. $\frac{0}{0}=1$.

280) $\frac{\sin(x^2-7x+10)}{l(x^2-5x+7)}$ für $x=2$?

Aufl. $\frac{0}{0}=3$.

281) $\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$ für $x=a$?

Aufl. $\frac{0}{0}=\cos a$.

282) $\frac{x^4-14x^3+60x^2-104x+64}{x^4-17x^3+78x^2-140x+88}$ für $x=2$?

Aufl. $\frac{0}{0}=\frac{2}{3}$.

283) $\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^x$ für $x=\infty$?

Aufl. $1^\infty=e^{-\frac{1}{2}}$.

Andeut. Aus $y=\left(\cos\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^x$ folgt $ly=x\,l\cos\sqrt{\frac{1}{x}}$

also für $x=\infty: ly=\infty\,.\,0=-\frac{1}{2},\ y=e^{-\frac{1}{2}}$.

284) $\sin\frac{3}{x}\, l\,(e^x + 2)$ für $x = \infty$?

Aufl. $0 \,.\, \infty = 3$.

285) $\cot x\, l\cos x$ für $x = 0$?

Aufl. $\infty \,.\, 0 = 0$.

286) $tg\, x\, l\sin x$ für $x = 0$?

Aufl. $0 \,.\, \infty = 0$.

287) $x^2 l\,\frac{1}{x}$ für $x = 0$?

Aufl. $0 \,.\, \infty = 0$.

288) $(e^b - e^x)\, tg\,\frac{\pi x}{2b}$ für $x = b$?

Aufl. $0 \,.\, \infty = \frac{2b}{\pi} e^b$.

289) $tg\,\frac{\pi x}{2m}\, l\left(2 - \frac{x}{m}\right)$ für $x = m$?

Aufl. $\infty \,.\, 0 = \frac{2}{\pi}$.

290) $\cot x\, l\, tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ für $x = 0$?

Aufl. $\infty \,.\, 0 = 2$.

291) $\frac{\pi}{2\cos x} - x\, tg\, x$ für $x = \frac{\pi}{2}$?

Aufl. $\infty - \infty = 1$.

292) $\frac{1}{x^2} - \cot^2 x$ für $x = 0$?

Aufl. $\infty - \infty = \frac{2}{3}$.

293) $\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}$ für $x = 0$?

Aufl. $\infty - \infty = \frac{1}{2}$.

294) $\frac{1}{lx} - \frac{4}{x^4 - 1}$ für $x = 1$?

Aufl. $\infty - \infty = 2$.

295) $\left(\frac{1}{x}\right)^{tg\, x}$ für $x = 0$?

Aufl. $\infty^0 = 1$.

296) Wenn $(y - x)(y - 2x)(y - 3x) = (x + y)^2$; wie gross ist $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$, $y = 0$?

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0} = -1.$

297) Welches ist der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$, $y = 0$, wenn x und y der Gleichung genügen:

$$10y^2x - 6yx^2 + 8x^3 + y^2 + 2yx + x^2 = 0?$$

Aufl. -1.

Andeut. Man erhält

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5y^2 - 6yx + 12x^2 + y + x}{10xy - 3x^2 + y + x}.$$

Nimmt man nun von Zähler und Nenner dieses Bruches den ersten Differentialquotienten und setzt darin $x = y = 0$, so folgt:

$$y' = -\frac{y' + 1}{y' + 1} = -1.$$

298) Dieselbe Aufgabe zu lösen für

$$y^3 + Ay^2x + Byx^2 + Cx^3 + ay^2 + byx + cx^2 = 0.$$

Aufl. Die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$ay'^2 + by' + c = 0.$$

Andeut. Nimmt man in Zähler und Nenner des ersten Differentialquotienten dann wiederum den Differentialquotienten und setzt hierin $x = y = 0$, so folgt:

$$\frac{by' + 2c}{2ay' + b} = -y'.$$

299) Es ist die Gleichung $(x^2 - a^2)^2 + y^4 + by^2 = 0$ gegeben, man soll den Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $y = 0$, $x = \pm a$ bestimmen.

Aufl. $-\frac{4a^2}{b}$.

Andeut. Man findet $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(x^2 - a^2)}{2y^3 + by}$.

Nimmt man den Differentialquotienten von Zähler und Nenner und setzt in dem entsprechenden Bruche $x^2 = a^2$, $y = 0$, so folgt der obige Werth.

300) Es sei die Gleichung $y^4 - ay^2 + bx^2 + cx^4 = 0$ gegeben, man soll den Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$, $y = 0$ bestimmen.

Aufl. $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Andeut. Nimmt man in dem Werthe von $\frac{dy}{dx} = -\frac{bx + 2cx^3}{2y^3 - ay}$ d... tialquotienten von Zähler und Nenner und setzt dann $x = 0$, $y = 0$, so fol

$$\frac{b}{ay'} = y' \text{ u. s. w.}$$

f) Ueber Maxima und Minima.

In den Gleichungen 301 bis 316 x so zu bestimmen, dass dafür y einen ausgezeichneten Werth annimmt.

301) $y = \frac{x}{1 + x^2}$.

Aufl. Für $x = 1$ ein Maximum, für $x = -1$ ein Minimum.

302) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x$.

Aufl. Für $x = 1$ und 3 Minima, für $x = 2$ ein Maximum.

303) $y = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 82x^2 + 420x + 5$.

Aufl. Für $x = 3$ ein Maximum, für $x = -7$ und 5 Minima.

304) $y = x^4 + 12x^3 + 4x^2 - 192x + 1$.

Aufl. Für $x = 2$ und -8 Minima, für $= -3$ ein Maximum,

305) $y = x^4 - 12x^3 + 36x^2 - 112x$.

Aufl. Für $x = 7$ ein Minimum.

306) $y = 12x^5 + 75x^4 - 140x^3 - 870x^2 + 1800x$.

Aufl. Für $x = 1$ und -5 Maxima, für $x = 2$ und -3 Minima.

307) $y = 3x^4 - 68x^3 + 528x^2 - 1728x$.

Aufl. Für $x = 9$ ein Minimum.

308) $y = \frac{x + 4}{x^2 + 4x + 1}$.

Aufl. Für $x = -3$ ein Maximum, für $x = -5$ ein Minimum.

309) $y = \frac{x + 4}{x^2 + 7x + 21}$.

Aufl. Für $x = -1$ ein Maximum, für $x = -7$ ein Minimum.

310) $y = x^2 - 4x + 11$.

Aufl. Für $x = 2$ ein Minimum.

311) $y = x^4 - 14x^3 + 73x^2 - 168x + 160$.

Aufl. Für $x = 3$ und 4 Minima.

312) $y = x^3 - 9x^2 + 15x$.

Aufl. Für $x = 1$ ein Maximum, für $x = 5$ ein Minimum.

313) $y = x^4 - 72x^3 + 40x^2 - 48x$.

Aufl. Für $x = 1$ und 6 Minima, für $x = 2$ ein Maximum.

314) $y = \frac{(x + 1)^4}{(x - 2)^3}$.

Aufl. Für $x = 11$ ein Minimum.

315) $y = \frac{x}{(1 + x^2)^{\frac{5}{2}}}$.

Aufl. Für $x = \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ Maxima.

316) $y = (1 + x^{\frac{1}{3}})(1 + x)^2$.

Aufl. y wird weder ein Maximum noch ein Minimum.

Andeut. Setze $x^{\frac{1}{3}} = z$.

317) Ein Kreissegment von gegebenem Inhalte S so zu bestimmen, dass sein Umfang ein Minimum wird.

Aufl. Dasselbe bildet einen ganzen Kreis.

Andeut. Unter der Bedingung, dass $ax^2 - x^2 \sin\alpha \cos\alpha = S$, soll $ax + x \sin\alpha$ ein Minimum werden, wenn x den halben Centriwinkel bezeichnet. Elimire nun x u. s. w.

318) Mit welchem Halbmesser muss ein Kreis gezeichnet werden, damit das einer gegebenen Bogenlänge b entsprechende Segment ein Maximum wird?

Aufl. Das Segment ist ein Halbkreis.

319) Man soll das grösste Kugelsegment bestimmen, dessen Haube einen gegebenen Inhalt H hat.

Aufl. Das Segment ist eine Halbkugel.

320) Es sei ABC (Fig. 133) der durch die Achse eines senkrechten Kreiskegels gelegte Schnitt; man soll bestimmen, wo $DE \parallel CA$ zu ziehen ist, damit der durch DE senkrecht zu ACB geführte Schnitt das grösstmögliche Parabelsegment S erzeugt.

Fig. 133.

Aufl. $AE = \frac{1}{4} AB$.

Andeut. Setzt man $AB = 2r$, $AC = s$, $AE = x$, so wird

$$S = \frac{2}{3} \sqrt{x(2r - x)} \cdot \frac{s(2r - x)}{2r} = \frac{s}{3r} x^{\frac{1}{2}} (2r - x)^{\frac{3}{2}} \text{ u. s. w.}$$

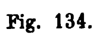


Fig. 134.

321) Zieht man in der einen Basis eines regulären sechsseitigen Prisma drei Diagonalen AB, BG, AG (Fig. 134) und legt durch dieselben drei Ebenen, welche gleiche Neigung zur Ebene des Sechseckes haben, so werden dadurch von dem Prisma drei Tetraeder abgeschnitten und ein Tetraeder hinzugefügt. Der dadurch neu entstandene Körper (Bienenzelle) hat, wie sich leicht zeigen lässt, einerlei Volumen mit dem ursprünglichen Prisma. Man soll nun bestimmen, unter welchem Winkel die Ebenen gegen die Sechsecksfläche geneigt sein müsse damit die Oberfläche der Bienenzelle Minimum wird.

Aufl. Unter $35^0 15' 51,8''$.

Andeut. Die durch AB gelegte Ebene schneidet die zwei Dreiecke AEC, BEC ab, setzt aber dafür den Rhombus $ACBD$ hinzu. Bezeichnet nun a die Sechseckseite und man zieht $DH \perp ABG$ und setzt $EC = DH = x$, so nimmt also die Oberfläche ab um

$$3ax + \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} - 3a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = U.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dU}{dx} = 3a - \frac{3ax\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}$$

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{3a^3}{4}\sqrt{3}\left(x^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

und da für $x = \frac{a}{\sqrt{8}}$ hiernach $\frac{dU}{dx} = 0$ wird und $\frac{d^2U}{dx^2}$ negativ ausfällt, so ist für diesen Werth von x die Abnahme der Oberfläche ein Maximum, die Oberfläche der betreffenden Bienenzelle also ein Minimum. Dass die Oberfläche wirklich eine Abnahme erfährt, ergibt sich aus der Bemerkung, dass für $x = 0$ auch $U = 0$ und für $x < \frac{a}{\sqrt{8}}$, $\frac{dU}{dx}$, somit auch U positiv ist.

Bezeichnet φ den Neigungswinkel DFH, ψ den $\measuredangle DAB$, so erhält man nach Obigem:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{1}{3}$$

$$\cos\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ also } \psi = \varphi \text{ u. s. w.}$$

322) Unter allen dreiseitigen, gleichhohen Pyramiden über derselben Basis diejenige zu bestimmen, deren Oberfläche am kleinsten ist.

Aufl. Die Projection der Spitze auf die Basis ist zugleich der Mittelpunkt des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises.

Andeut. Bezeichnen a, b, c die drei Seiten der Basis Δ, P die Projection der Spitze auf die Grundfläche, α, β, γ die drei von P aus auf a, b, c gefällten Perpendikel, so ist

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2\Delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und wenn h die Höhe der Pyramide bedeutet, so soll

$$a\sqrt{\alpha^2 + h^2} + b\sqrt{\beta^2 + h^2} + c\sqrt{\gamma^2 + h^2}$$

ein Minimum werden, unter der Voraussetzung, dass α, β, γ gleichzeitig der Gleichung (1) genügen.

Aus der Bedingung

$$a\sqrt{\alpha^2 + h^2} + b\sqrt{\beta^2 + h^2} + c\sqrt{\gamma^2 + h^2} + k(a\alpha + b\beta + c\gamma - 2\Delta) = \text{Minimum}$$

resultirt dann:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + h^2}} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + h^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + h^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

woraus hervorgeht, dass die Seitenflächen einerlei Neigung gegen die Basis haben und dass $\alpha = \beta = \gamma$ ist.

323) Unter allen sphärischen Dreiecken, welche dieselben Seiten a und b haben, dasjenige zu finden, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Aufl. Ist C der eingeschlossene Winkel, so wird derselbe durch die Gleichung $\cos C = -\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}$ bestimmt.

Andeut. Ist E der sphärische Excess, so hat man nach sphär. Trig. §.67, XXIV.

$$cotg\,\frac{E}{2} = cotg\,C + \frac{cotg\,\frac{a}{2}\,cotg\,\frac{b}{2}}{sin\,C}$$
$$= cotg\,C + \frac{k}{sin\,C}.$$

Dieser Ausdruck soll nun ein Maximum werden. Man findet: $cos\,C = -\frac{1}{k}$, da für diesen Werth von C der zweite Differentialquotient in $\frac{cotg\,\frac{a}{2}\,cotg\,\frac{b}{2}}{sin\,C}$ übergeht, also positiv ist, so wird dafür $cotg\,\frac{E}{2}$ ein Minimum, also E und der Inhalt des Dreieckes ein Maximum.

324) Unter allen rechtwinkligen sphärischen Dreiecken von derselben Hypotenuse c dasjenige zu bestimmen, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Aufl. Das Dreieck ist gleichschenklig.

Andeut. Sind x und y die Katheten und bezeichnet E den sphär. Excess, so hat man

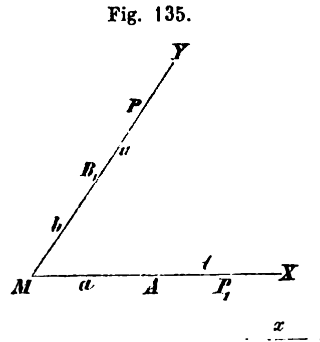
$$cos\,c = cos\,x\,cos\,y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$
$$sin\,E = \frac{sin\,x\,sin\,y}{2cos^2\frac{c}{2}} \text{ (sphär. Tr. §. 65).}$$

Es soll daher $sin\,x\,sin\,y$ unter der Voraussetzung (1) zu einem Maximum gemacht werden. Vergl. §. 65.

g) Ueber die Theorie ebener Curven.

325) In den zwei Geraden MX und MY (Fig. 135) befinden sich zwei Punkte A und B_1, um a und b von M entfernt. Von hier aus bewegen sich in den entsprechenden Geraden zwei Punkte P_1 und P so gegen X und Y hin, dass stets das Product $AP_1 \,.\, B_1P$ der Constanten k gleich ist. Man soll die Enveloppe der Geraden PP_1 bestimmen.

Fig. 135.



Aufl. $(bx + ay - 2b + k)^2 = 4kxy.$

Andeut. Setzen wir $AP_1 = t$, so ist die Gleichung der Geraden PP

$$\frac{x}{a+t} + \frac{y}{b+u} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

oder

$$\frac{x}{a+t} + \frac{yt}{bt+k} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

Nach t differenzirt gibt:

$$-\frac{x}{(a+t)^2}+\frac{ky}{(bt+k)^2}=0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{bt+k}{a+t}=\sqrt{\frac{ky}{x}}$$

oder wenn man

$$\sqrt{\frac{ky}{x}}=p$$

setzt,

$$t=\frac{ap-k}{b-p}.$$

Also ist

$$bt+k=\frac{p\,(ab-k)}{b-p}$$

$$a+t=\frac{ab-k}{b-p}$$

und Gl. (μ) geht hiernach über in:

$$\frac{x\,(b-p)}{ab-k}+\frac{ap-k}{p\,(ab-k)}\,y=1.$$

oder
$$(bx+ay)\sqrt{\frac{ky}{x}}-2ky=(ab-k)\sqrt{\frac{ky}{x}}$$

oder
$$bx+ay-2\sqrt{kxy}=ab-k$$

oder
$$(bx+ay-ab+k)^2=4kxy.$$

Die Enveloppe ist somit im Allgemeinen ein Kegelschnitt, welcher die zwei Geraden berührt. Die Berührungspunkte liegen auf der Geraden

$$bx+ay-ab+k=0.$$

Für $u=-b$ folgt $t=-\frac{k}{b}$ und für $t=-a$ wird $u=-\frac{k}{a}$.

Die Berührungspunkte sind daher die dem Punkte M entsprechenden Punkte der jedesmaligen anderen Geraden.

Ist $k=ab$, sind also in M zwei sich entsprechende Punkte der beiden Geraden vereinigt, so erhält man als Enveloppe:

$$(bx+ay)^2-4abxy=0$$

oder
$$(bx-ay)^2=0$$

und aus der Gleichung (α) folgt:

$$\frac{x}{a+t}+\frac{yt}{bt+ab}=\frac{x}{a+t}+\frac{yt}{b\,(a+t)}=1$$

oder
$$b\,(x-a)=t\,(b-y)$$

d. h. die Enveloppe reducirt sich in diesem Falle auf den Punkt $x=a$, $y=b$.

326) Die Gleichung der Wurflinie im leeren Raume ist bekanntlich

$$y=x\,tg\,\alpha-\frac{g}{2c^2\cos^2\alpha}\,x^2\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

ın soll die Envelöppe aller Parabeln bestimmen, welche ent- wenn man den Elevationswinkel α successiv sich ändern lässt

u fl. $y=h-\frac{x^2}{4h}$, wo $h=\frac{c^2}{2g}$.

Andeut. Differenzire (1) nach α, so folgt $tg\,\alpha = \frac{c^2}{gx}$. Führe nun diesen Werth in (1) ein.

327) Die Enveloppe der Kreise

$$(x - a)^2 + y^2 = 2am + m^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zu bestimmen, wenn a den veränderlichen Parameter bedeutet.

Aufl. $y^2 = 2m\left(x + \frac{m^2 + n^2}{2m}\right)$.

Andeut. Differenzire (1) nach a und führe den Werth von $a = x + m$ in (1) ein.

328) Welches ist die Enveloppe der Geraden

$$ax + by = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wenn a und b der Gleichung

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

genügen?

Aufl. $(C + E^2)\,x^2 + (A + D^2)\,y^2 - 2\,(B + DE)\,xy$
$+ 2\,(BE - CD)\,x + 2\,(BD - AE)\,y = AC - B^2$.

Andeut. Nach (2) ist b eine Function von a. Differenzirt man daher (1) und (2) unter dieser Voraussetzung und setzt die zwei Werthe von $\frac{db}{da}$ einander gleich, so folgt:

$$\frac{x}{y} = \frac{Aa + Bb + D}{Ba + Cb + E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und hieraus:

$$\frac{a}{b}\,\frac{x}{y} + 1 = \frac{a}{b}\,\frac{Aa + Bb + D}{Ba + Cb + E} + 1$$

also wegen (1) und (2) auch:

$$\frac{1}{by} = \frac{1 - Da - Eb}{b(Ba + Cb + E)}$$

Es ist somit:

$$y = \frac{Ba + Cb + E}{1 - Da - Eb} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und nach (3):

$$x = \frac{Aa + Bb + D}{1 - Da - Eb} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Aus den zwei Gleichungen

$$a\,(B + Dy) + b\,(C + Ey) = y - E$$
$$a\,(A + Dx) + b\,(B + Ex) = x - D$$

folgt nun:

$$a = \frac{x\,(C + E^2) - y\,(B + DE) + BE - CD}{AC - B^2 + x\,(CD - BE) + y\,(AE - BD)}$$

$$b = \frac{y\,(A + D^2) - x\,(B + DE) + BD - AE}{AC - B^2 + x\,(CD - BE) + y\,(AE - BD)}.$$

Setzt man diese Werthe in (1) ein, so resultirt obige Gleichung.

329) Man soll die Enveloppe aller Kreise

$$x^2 + (y - z)^2 = (r - \sqrt{a^2 + z^2})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

finden, wenn z den veränderlichen Parameter bedeutet.

Aufl. $y^2 + (x \pm a)^2 = r^2$.

Andeut. Durch Differentiation nach z erhält man:

$$y - z = (r - \sqrt{a^2 + z^2}) \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

und (1) verwandelt sich dadurch in:

$$x^2 + (y - z)^2 = (y - z)^2 \left(\frac{a^2 + z^2}{z^2}\right) = (y - z)^2 + \frac{a^2}{z^2}(y - z)^2$$

Es ist daher

$$\pm x = \frac{a(y - z)}{z},$$

also

$$z = \frac{ay}{a \pm x}; \quad y - z = \frac{\pm xy}{a \pm x}.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (1) ergibt sich:

$$x^2 + \frac{x^2 y^2}{(a \pm x)^2} = \left\{r - \sqrt{a^2 + \frac{a^2 y^2}{(a \pm x)^2}}\right\}^2$$

oder

$$\frac{x^2}{(a \pm x)^2}[y^2 + (a \pm x)^2] = \left[r - \frac{a}{a \pm x}\sqrt{y^2 + (a \pm x)^2}\right]^2.$$

Nimmt man hier das positive Zeichen und setzt $y^2 + (a + x)^2 = r^2$, so folgt:

$$\frac{r^2 x^2}{(a + x)^2} = \left(r - \frac{a}{a + x} r\right)^2 = \left(\frac{rx}{a + x}\right)^2,$$

also eine identische Gleichung.

Wählt man das negative Zeichen und setzt $y^2 + (x - a)^2 = r^2$, so resultirt:

$$\frac{x^2}{(a - x)^2} r^2 = \left(r - \frac{a}{a - x} r\right)^2 = \left(\frac{r}{a - x} x\right)^2,$$

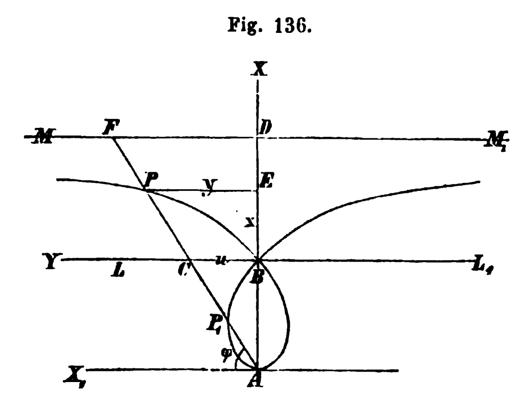
also abermals eine identische Gleichung.

Die Enveloppe ist daher gebildet aus den zwei Kreisen

$$y^2 + (x \pm a)^2 = r^2.$$

330) Es sei A (Fig. 136) ein ausserhalb einer Geraden LL_1 liegender Punkt.

Fig. 136.



Zieht man von A aus beliebige Strahlen, wie AF, und schlägt jedesmal die Strecke BC von dem Durchschnittspunkte C aus auf dem

betreffenden Strahle nach beiden Seiten hin ab, macht also

$$BC = CP = CP_1,$$

so bestimmen die Endpunkte, wie P, P_1 eine Curve. Man soll die Gleichung, die Subtangente, Subnormale u. s. w. derselben finden.

Aufl. 1) Ist B der Coordinatenursprung, $AB = a$ und sind BX und BY die rechtwinkligen Coordinatenachsen, so ist die entsprechende Gleichung:

$$x^3 + ax^2 - ay^2 + xy^2 = 0$$

oder

$$y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

2) Gleichung in Polarcoordinaten:

α) Wenn B der Pol und BX die Achse ist:

$$r = -\frac{a\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

β) Wenn A der Pol und AX_1 die Achse ist:

$r = a\,cotg\,\frac{1}{2}\varphi$ für den Punkt P;

$r = a\,tg\,\frac{1}{2}\varphi$ für den Punkt P_1.

3) Subtangente $= \dfrac{x(a^2 - x^2)}{a^2 + ax - x^2}$.

4) Subnormale $= \dfrac{x(a^2 + ax - x^2)}{(a-x)^2}$.

5) Tangente $= \dfrac{ax(a+x)}{a^2 + ax - x^2}\sqrt{\dfrac{2a^2 - x^2}{a^2 - x^2}}$.

6) Normale $= \dfrac{ax}{(a-x)^2}\sqrt{2a^2 - x^2}$.

7) Krümmungshalbmesser $= \dfrac{a(2a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^2(x+2a)}$.

Andeut. 1) Setzt man $BC = u$, so erhält man:

$$AC : CP = AB : BE$$

oder

$$\sqrt{a^2 + u^2} : u = a : x; \text{ also } u = \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ferner verhält sich:

$$AB : BC = AE : EP$$
$$a : u = a + x : y \text{ u. s. w.}$$

2) Ist B der Pol, so setze man

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

in die Gleichung bei (1).

Ist A der Pol und AX_1 die Achse, so folgt:

$$AC = \frac{a}{\sin\varphi},\ BC = a\,cotg\,\varphi;$$

daher für P:

$$r = AC + BC$$

und für P_1:

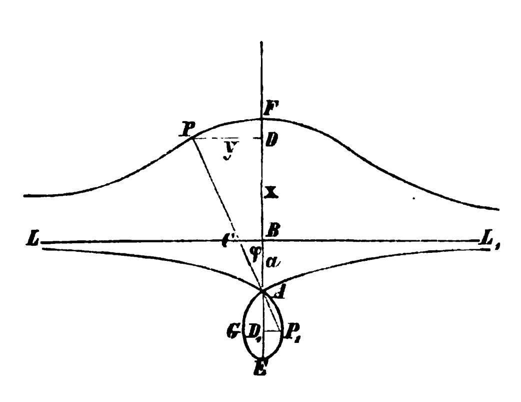
$$r = AC - BC \text{ u. s. w.}$$

3—6) Nach §. 68 und 71.

331) Eine Gerade LL_1 (Fig. 137) und ein Punkt A ausserhalb derselben sind gegeben. Zieht man durch A beliebige Geraden wie PP_1 und ermittelt auf denselben zwei Punkte P und P_1 so, dass



Fig. 137.



$$CA \,.\, CP = CA \,.\, CP_1 = b^2$$

wird, wo b irgend einen constanten Parameter bezeichnet, so bestimmen diese Punkte zu beiden Seiten von LL_1 Curven, deren Eigenschaften entwickelt werden sollen.

Aufl. 1) Gleichung der oberen Curve, wenn B der Anfangspunkt, BF die Achse, $AB = a$ und $\frac{b^2}{a} = BF = c$ gesetzt wird:

$$y = (a + x) \sqrt{\frac{c - x}{x}}$$

oder $xy^2 + x^3 + (2a - c)\, x^2 + a\,(a - 2c)\, x - a^2\, c = 0.$

Gleichung der unteren Curve, wenn B als Anfangspunkt und BE als Achse genommen wird:

$$y = (x - a) \sqrt{\frac{c - x}{x}}.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich nur durch das Zeichen von a. Ist A der Pol und AF die Achse, so findet man für die obere Curve als Polargleichung:

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} + c \,.\, \cos\varphi$$

und für die untere:

$$r = c\cos\varphi - \frac{a}{\cos\varphi}.$$

2) Subtangente $= \frac{2x(x+a)(x-c)}{2x^2 - cx + ac}$.

3) Subnormale $- \frac{(x+a)(2x^2 - cx + ac)}{2x^2}$.

4) Tangente $= \frac{(x+a)\sqrt{c(c-x)}\sqrt{(c+4a)x^2 - 2acx + a^2c}}{(-2x^2 + cx - ac)\sqrt{x}}$.

5) Normale $= \frac{(x+a)\sqrt{c}}{2x^2}\sqrt{c(x-a)^2 + 4ax^2}$.

6) Krümmungshalbmesser $= \varrho = \frac{1}{2}\sqrt{c}\,\frac{\{c(x-a)^2 + 4ax^2\}^{\frac{3}{2}}}{x^2\{3ac - (4a+c)x\}}$

7) Die Leitlinie LL' ist eine Asymptote der Curve.

8) Die Punkte $x = \frac{3ac}{4a+c}$, $y = \pm 4\frac{(a+c)^{\frac{3}{2}}}{4a+c}\sqrt{\frac{a}{3}}$ sind Wendepunkte der oberen Curve. Dieselben sind reell, da $x < c$. Ebenso sind die Punkte $x = \frac{3ac}{4a-c}$, $y = \pm 4\frac{(a-c)^{\frac{3}{2}}}{4a-c}\sqrt{\frac{a}{3}}$ Wendepunkte der unteren Curve. Diese sind aber, da für jeden reellen Punkt $x < c$ sein muss, nur dann reell, wenn c also auch $b < a$ ist.

9) Der Punkt $y = 0$, $x = a$ ist, je nachdem $c < a$, $c > a$, $c = a$, bezüglich ein isolirter Punkt, ein Doppelpunkt oder ein Rückkehrpunkt der ersten Art.

Andeut. 1) Setzt man $CA = v$, also

$$CP = \frac{b^2}{v},\ CA + CP = AP = v + \frac{b^2}{v} = \frac{v^2 + b^2}{v},$$

so erhält man aus der Proportion

$$AC : AB = AP : AD$$

oder

$$v : a = \frac{v^2 + b^2}{v} : a + x$$

sofort

$$v^2 = \frac{ab^2}{x}$$

und aus der Proportion

$$PD : DA = CB : BA$$

oder

$$y : a + x = \sqrt{v^2 - a^2} : a$$

folgt alsdann die verlangte Gleichung der oberen Curve. Ebenso findet man die der unteren Curve.

Setzt man $\measuredangle\, PAF = \varphi$, so wird

$$AC = \frac{a}{\cos\varphi},\ CP = c\cos\varphi,$$

daher

$$r = CP \pm CA.$$

2—6) Nach §. 68 und 71.

7) Für $x = 0$ folgt $y = \infty$ aus der Gleichung der Curve.

8) Man setze $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, und erhält: $3ac - x(4a + c) = 0$.

9) Aus der Gleichung

$$f = xy^2 + x^3 + (2a - c)\,x^2 + a\,(a - 2c)\,x - a^2c = 0$$

folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + (x + a)\,(3x + a - 2c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

Da $x = 0$ nur für $y = \infty$, so resultirt aus $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ und $f = 0$:

$$y = 0\ ;\ (x + a)\,(3x + a - 2c) = 0\ ;\ (x + a)^2\,(c - x) = 0.$$

Ist nun zuerst a positiv, so folgt, da x auch positiv sein muss,

$$y = 0\ ,\ 3x + a - 2c = 0\ ,\ x = c\ ,\ \text{also}\ a + c = 0.$$

Die obere Curve hat daher keine singulären Punkte.

Ist aber a negativ und man setzt $-a$ statt a, so folgt:

$$y = 0\ ;\ (x - a)\,(3x - a - 2c) = 0\ ;\ (x - a)^2\,(c - x) = 0$$

und hieraus

$$y = 0\ ;\ x = a.$$

Nun ist weiter:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2\,(2a + c)\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 2y,$$

woraus für $y = 0$, $x = a$ folgt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,(a - c)\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4a\,(a - c).$$

Der betreffende Punkt ist also

für $c < a$ ein isolirter Punkt,
- $c > a$ ein Doppelpunkt,
- $c = a$ ein Rückkehrpunkt der ersten Art,

indem dafür $t = 0$, somit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 6,$$

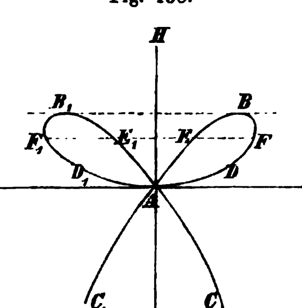
also nicht Null wird.

332) Man soll den Lauf der Curve untersuchen, deren Gleichung

$$y^4 - 2y^2x + 2x^3 = 0$$

ist.

Fig. 138.



Aufl. Die Curve hat die durch Fig. 138 dargestellte Form.

Der Punkt $x = 0$, $y = 0$ ist ein dreifacher Punkt, die Tangenten in demselben sind die YAchse und die zwei Geraden, welche die Winkel der Coordinatenachsen halbiren.

Die mit der YAchse parallele Gerade, deren Gleichung $x = \frac{1}{2}$, ist eine Doppeltangente; die Ordinaten der Berührungspunkte sind: $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

In den Punkten $x = \frac{4}{9}$, $y = \pm\frac{4}{9}\sqrt{3}$ ist die Ordinate ein Maximum.

Nimmt man A als Pol, AX als Achse, so findet man als Polargleichung der Curve:

$$r = -\frac{2\cos\varphi\cos 2\varphi}{\sin^4\varphi}.$$

Andeut. Löst man die Gleichung nach y auf, so folgt:

$$y^2 = x \pm x\sqrt{1-2x}.$$

Damit y reell werde, muss daher x negativ oder $0 < x < \frac{1}{2}$ sein. Setzt man im ersten Falle $x = -x_1$, so resultirt:

$$y^2 = -x_1 + x_1\sqrt{1+2x_1}.$$

Das negative Zeichen der Wurzel ist nämlich unzulässig. Dieser Gleichung entsprechen die zwei Aeste AC und AC_1.

Ist $0 < x < \frac{1}{2}$, so erhält man:

$$y^2 = x + x\sqrt{1-2x}$$
$$y_1^2 = x - x\sqrt{1-2x}.$$

Der ersten Gleichung entsprechen die zwei Aeste BDA und B_1D_1A; der letzten aber die Aeste BEA und B_1E_1A.

Setzt man $f = y^4 - 2y^2x + 2x^3$
so folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(3x^2 - y^2);\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(y^2 - x).$$

Als einzige Auflösung der drei Gleichungen

$$f = 0,\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

findet man: $x = 0,\ y = 0.$

Für diesen Punkt ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = -4y = 0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4x = 0.$$

Man muss daher zu den Differentialquotienten der dritten Ordnung übergehen und findet:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 12,\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2} = -4,$$
$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} = 0,\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24\,y = 0.$$

Die symbolische Gleichung

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + t\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3 = 0$$

zur Bestimmung der trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Berührenden mit der XAchse bilden, wird daher: $t^2 = 1$.

Hieraus folgt: $t = \infty$ und $t = \pm 1$.

Für den Ast BDA ist $y^2 = x + x\sqrt{1-2x}$.

Damit y^2 einen ausgezeichneten Werth erhält, folgt aus

$$1 + \frac{1-3x}{\sqrt{1-2x}} = 0,\ x = \frac{4}{9}.$$

Für denselben wird der zweite Differentialquotient

$$\frac{3x-2}{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}$$

gleich -18, also negativ.

333) Man soll die Gleichung der Tractorie (Linie gleicher Tangenten):

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + al\,\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

untersuchen.

Aufl. 1) Subtangente $- \sqrt{a^2 - y^2}$.

2) Subnormale $= \frac{-y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}}$.

3) Tangente $= a$.

4) Normale $= \frac{ay}{\sqrt{a^2 - y^2}}$.

5) Krümmungshalbmesser $= \frac{a}{y}\sqrt{a^2 - y^2}$.

6) Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\alpha = al\,\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y};\ \beta = \frac{a^2}{y}.$$

7) Gleichung der Evolute

$$\beta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \text{ (Kettenlinie).}$$

8) Die Achse der X ist eine Asymptote der Curve.

Andeut. Man findet:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y};$$

also

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - y^2}};\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2y}{(a^2 - y^2)^2}.$$

Hiernach erhält man dann:

$$x - \alpha = -\sqrt{a^2 - y^2};\ y - \beta = -\frac{a^2 - y^2}{y}$$

und hieraus, mittelst der Gleichung der Curve, die Werthe von α und β (§. 12).

Aus

$$\alpha = al\,\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

folgt:

$$e^{\frac{\alpha}{a}} = \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y};\ e^{-\frac{\alpha}{a}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

woraus sich durch Addition ergibt:

$$e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}} = \frac{2a}{y} = \frac{2}{a}\,\frac{a^2}{y} = \frac{2}{a}\,\beta.$$

8) Für $y = 0$ folgt $x = \infty$.

h) Ueber unbestimmte Integrale.

334) $\int\left(5x^3 - 7x^5 + \frac{4x^3 + 3x^2}{x^4 + x^3 + 1}\right) dx = ?$

Aufl. $\frac{5x^4}{4} - \frac{7x^6}{6} + l\,(x^4 + x^3 + 1) + C.$

335) $\int\left(2\sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt[5]{x^2}} + 7\sqrt[6]{x^5}\right) dx = ?$

Aufl. $\frac{3}{2}\,x^{\frac{4}{3}} + \frac{20}{3}\,x^{\frac{3}{5}} + \frac{42}{11}\,x^{\frac{11}{6}} + C.$

336) $\int\left(\frac{3}{x} + 4\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt[4]{x^3} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}} - 1\right) dx = ?$

Aufl. $3lx + \frac{12}{5}\,x^{\frac{5}{3}} + \frac{20}{7}\,x^{\frac{7}{4}} + \frac{10}{3}\,x^{\frac{3}{5}} - x + C.$

337) $\int \frac{\frac{1}{x} - 2\sin x - 6\sin x \cos x}{lx + 2\cos x - 3\sin^2 x}\, dx = ?$

Aufl. $l\,[lx + 2\cos x - 3\sin^2 x] + C.$

338) $\int (10x - 9)\sin(5x^2 - 9x + 4)\, dx = ?$

Aufl. $-\cos(5x^2 - 9x + 4) + C.$

339) $\int\left(\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) dx = ?$

Aufl. $\operatorname{arctg} x + 2\sqrt{x} - lx + C.$

340) $\int (3x^2 + 5x - 1)^7 (6x + 5)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{8}\,(3x^2 + 5x - 1)^8 + C.$

341) $\int (4\cos x + 3\sin x - \sqrt[3]{x})\, dx = ?$

Aufl. $4\sin x - 3\cos x - \frac{3}{4}\,x^{\frac{4}{3}} + C.$

342) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 2\sqrt[4]{x^3} + \frac{1}{x^2}\right) dx = ?$

Aufl. $\arcsin x - \frac{8}{7}\,x^{\frac{7}{4}} - \frac{1}{x} + C.$

343) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 1}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 1} + C.$

344) $\int a^{2x^2+5} x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{4}\,\frac{a^{2x^2+5}}{la} + C.$

345) $\int e^{x^3-1} x^2\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{3} e^{x^3-1} + C.$

346) $\int x^4 \cos(2x^5 + 7)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{10} \sin(2x^5 + 7) + C.$

347) $\int \frac{(6x+5)\sin(3x^2+5x-1)}{\cos^2(3x^2+5x-1)}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{\cos(3x^2+5x-1)} + C.$

348) $\int \frac{(1+lx)\cos(xlx+1)}{\sin^2(xlx+1)}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{-1}{\sin(xlx+1)} + C.$

349) $\int \frac{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}}{arc\,tg\,x + lx}\, dx = ?$

Aufl. $l\,(arc\,tg\,x + lx) + C.$

350) $\int \frac{\frac{1}{x}\sin^2 x + 2lx\sin x\cos x}{\sin^2 xlx}\, dx = ?$

Aufl. $l\,(\sin^2 xlx) + C.$

351) $\int \frac{e^x\, dx}{\cos^2 e^x} = ?$

Aufl. $tg\, e^x + C.$

352) $\int \frac{dx}{x\sin^2 lx} = ?$

Aufl. $-\cot lx + C.$

Andeut. $\frac{1}{x\sin^2\varphi} = \frac{\frac{1}{x}}{\sin^2\varphi} = \frac{\varphi'}{\sin^2\varphi}$ u. s. w.

353) $\int \frac{\sin(ax+b)}{\cos^2(ax+b)}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{a\cos(ax+b)} + C.$

354) $\int \frac{x \cos(ax^2 + b)}{\sin^2(ax^2 + b)} dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{2a \sin(ax^2 + b)} + C.$

355) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = ?$

Aufl. $\arcsin e^x + C.$

356) $\int x \, tg(3x^2 - 2) dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{6} l \cos(3x^2 - 2) + C.$

Andeut. Schreibe $-\frac{1}{6} \int \frac{-\sin(3x^2 - 2)}{\cos(3x^2 - 2)} 6x \, dx$ u. s. w.

357) $\int x^2 \cot x^3 \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{3} l \sin x^3 + C.$

Andeut. Setze $\frac{1}{3} \int \frac{\cos x^3}{\sin x^3} \frac{d(x^3)}{dx} dx$ u. s. w.

358) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{1 - (x^2 + 2x)^2}} dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2} \arcsin(x^2 + 2x) + C.$

359) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^2 x} = ?$

Aufl. $-\frac{1}{\sin x} + C.$

360) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{\cos x} + C.$

361) $\int \frac{dx}{x \, l^m x} = ?$

Aufl. $-\frac{1}{(m - 1) \, l^{m-1} x} + C.$

362) $\int (1 + lx + e^x) \sin(xlx + e^x) dx = ?$

Aufl. $-\cos(xlx + e^x) + C.$

363) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 (x^3 + 1)} = ?$

Aufl. $\frac{1}{3} tg (x^3 + 1) + C.$

364) $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 (x^4 - 1)} = ?$

Aufl. $-\frac{1}{4} \cot (x^4 - 1) + C.$

365) $\int \frac{3x + 5}{x^2 - 10x + 28} dx = ?$

Aufl. $\frac{3}{2} l (x^2 - 10x + 28) + \frac{20}{\sqrt{3}} arctg \frac{x - 5}{\sqrt{3}} + C.$

Andeut. $\int \frac{3x + 5}{x^2 - 10x + 28} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3(2x - 10) + 40}{x^2 - 10x + 28} dx =$

$\frac{3}{2} l (x^2 - 10x + 28) + \frac{20}{3} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x - 5}{\sqrt{3}}\right)^2}$ u. s. w.

366) $\int \frac{5x - 3}{x^2 + 12x + 45} dx = ?$

Aufl. $\frac{5}{2} l (x^2 + 12x + 45) - 11 \, arctg \frac{x + 6}{3} + C.$

Andeut. Setze $\frac{1}{2} \int \frac{5 \ (2x + 12) - 66}{(x + 6)^2 + 9} dx.$

367) $\int \frac{dx}{a + be^x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{a} l \frac{e^x}{a + be^x} + C.$

Andeut. Setze $e^x = y.$

368) $\int \frac{dx}{(a + be^x)^2} = ?$

Aufl. $\frac{1}{a^2} l \frac{e^x}{a + be^x} + \frac{1}{a (a + be^x)} + C.$

Andeut. Setze $e^x = y$, so folgt $\int \frac{dy}{y (a + by)^2}$. Nun ist $\frac{1}{y (a + by)^2}$

$= \frac{1}{a^2 y} - \frac{b}{a^2 (a + by)} - \frac{b}{a (a + by)^2}$ u. s. w.

369) $\int \frac{7x - 24}{x^2 - 9x + 14} dx = ?$

Aufl. $l [(x - 2)^2 (x - 7)^5] + C.$

370) $\int \frac{5x^2 + 2x - 12}{x^3 + x^2 - 4x - 4} dx = ?$

Aufl. $l[(x^2 - 4)(x + 1)^3] + C.$

Andeut. $x^3 + x^2 - 4x - 4 = N = (x - 2)(x + 2)(x + 1).$

371) $\int \frac{7x^2 + 4x - 43}{x^3 - 19x + 30} dx = ?$

Aufl. $l[(x - 2)(x - 3)^4 (x + 5)^2] + C.$

Andeut. $N = (x - 2)(x - 3)(x + 5).$

372) $\int \frac{10x^2 - 70x + 118}{x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120} dx = ?$

Aufl. $l \frac{(x - 4)(x - 5)^3}{(x - 2)^3 (x - 3)} + C.$

Andeut. $N = (x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5).$

373) $\int \frac{11x^3 - 114x^2 + 313x - 138}{x^4 - 15x^3 + 73x^2 - 129x + 70} dx = ?$

Aufl. $l \frac{(x - 5)^2 (x - 7)^4 (x - 2)^8}{(x - 1)^3} + C.$

Andeut. $N = (x - 5)(x - 7)(x - 2)(x - 1).$

374) $\int \frac{x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 23x + 52}{x^3 + 2x^2 - 29x + 42} dx = ?$

Aufl. $\frac{x^2}{2} + 2x + l[(x - 2)^2 (x - 3)(x + 7)^4] + C.$

375) $\int \frac{6x^2 - 11x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} dx = ?$

Aufl. $-\frac{4}{x - 1} + 3l(x^2 - 3x + 2) + C.$

Andeut. $N = (x - 1)^2 (x - 2).$

376) $\int \frac{x^2 + 4x}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx = ?$

Aufl. $l(x + 1) - \frac{4x + 1}{2(x + 1)^2} + C.$

Andeut. $N = (x + 1)^3.$

377) $\int \frac{2x^2 + 11x + 19}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27} dx = ?$

Aufl. $2l(x + 3) + \frac{1}{x + 3} - \frac{2}{(x + 3)^2}.$

378) $\int \frac{8x^2 - 11x + 13}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3} dx = ?$

Aufl. $5l(x - 1) + \frac{3}{2} l(x^2 - 2x + 3) + \frac{5}{\sqrt{2}} arctg \frac{x - 1}{\sqrt{2}} +$

Andeut. $\int f(x)\,dx = \int \frac{5}{x-1}\,dx + \int \frac{3x+2}{x^2-2x+3}\,dx$ und

$$\int \frac{3x+2}{x^2-2x+3}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{3(2x-2)+10}{x^2-2x+3}\,dx$$
$$= \frac{3}{2}\,l\,(x^2-2x+3) + 5\int \frac{dx}{(x-1)^2+2}.$$

379) $\int \frac{7x^2+13}{x^3-3x^2+x+5}\,dx = ?$

Aufl. $2l\,(x+1) + \frac{5}{2}\,l\,(x^2-4x+5) + 13\,arctg\,(x-2).$

Andeut. $N = (x+1)(x^2-4x+5).$

380) $\int \frac{2x^3-6x^2+10x+4}{x^4-6x^3+20x^2-32x+32}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2}\,l\,[(x-1)^2+3] + \frac{1}{2}\,l\,[(x-2)^2+4]$
$+ \frac{2}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\,arctg\,\frac{x-2}{2} + C.$

Andeut. $N = [(x-1)^2+3]\,[(x-2)^2+4].$

381) $\int \frac{2x^3-2x^2+x+5}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}\,dx = ?$

Aufl. $l\,[(x-2)\sqrt{x^2+1}] - \frac{3}{x-2} + arctg\,x + C.$

Andeut. $N = (x-2)^2\,(x^2+1).$

382) $\int \frac{10x^2-44x+52}{x^3-9x^2+29x-33}\,dx = ?$

Aufl. $5l\,(x-3) + \frac{5}{2}\,l\,(x^2-6x+11)$
$+ \frac{16}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{x-3}{\sqrt{2}} + C.$

Andeut. $N = (x-3)(x^2-6x+11).$

383) $\int \frac{8x^2+54x+96}{x^4+14x^3+70x^2+144x+104}\,dx = ?$

Aufl. $l\,(x+2) - \frac{2}{x+2} - \frac{1}{2}\,l\,(x^2+10x+26)$
$+ 3\,arctg\,(x+5) + C.$

Andeut. $N = [(x+5)^2+1]\,(x+2)^2.$

384) $\int \frac{8x^2+28x+32}{x^3+7x^2+19x+21}\,dx = ?$

Aufl. $5l\,(x+3) + \frac{3}{2}\,l\,(x^2+4x+7) - \frac{7}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C.$

Andeut. $N = (x^2+4x+7)(x+3).$

385) $$\int \frac{4x^3 - 5x^2 - 18x + 199}{x^4 - x^3 - 27x^2 + 23x + 204}\, dx = ?$$

Aufl. $$l\,(x+4)\,(x+3)^2 + \frac{1}{2}\, l\,(x^2 - 8x + 17) + 5 \operatorname{arctg}(x-4) + C.$$

Andeut. $N = (x^2 - 8x + 17)\,(x+4)\,(x+3).$

386) $$\int \frac{3x^3 - 4x^2 + x + 20}{x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 30x + 25}\, dx = ?$$

Aufl. $$l\left\{(x^2 - 4x + 5)\sqrt{x^2 - 2x + 5}\right\} + 2 \operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + 5 \operatorname{arctg}(x-2) + C.$$

Andeut. $N = (x^2 - 2x + 5)\,(x^2 - 4x + 5).$

387) $$\int \frac{6x^3 + 18x^2 + 30x - 6}{x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4x - 7}\, dx = ?$$

Aufl. $$l\left\{(x-1)^2\,(x+1)^3\sqrt{x^2 + 4x + 7}\right\} - \sqrt{3}\, \operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{3}} + C.$$

Andeut. $N = (x-1)\,(x+1)\,(x^2 + 4x + 7).$

388) $$\int \frac{x^3 - 3x^2 + 2x + 4}{x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25}\, dx = ?$$

Aufl. $$\frac{1}{2}\, l\,(x^2 - 4x + 5) + \frac{x-3}{2\,(x^2 - 4x + 5)} + \frac{7}{2} \operatorname{arctg}(x-2) + C.$$

Andeut. $N = [(x-2)^2 + 1]^2.$

389) $$\int \frac{x^5 - 6x^4 + 21x^3 - 41x^2 + 51x - 29}{(x^2 - 2x + 4)^3}\, dx = ?$$

Aufl. $$\frac{4x^3 - 18x^2 + 36x - 43}{12\,(x^2 - 2x + 4)^2} + \tfrac{1}{2}\, l\,(x^2 - 2x + 4) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

390) $$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{8x + \sqrt[4]{x}}\, dx = ?$$

Aufl. $$\frac{1}{4}\sqrt{x} + \frac{5}{24}\, l(1 + 2\sqrt[4]{x}) + \frac{7}{48}\,(1 - 2\sqrt[4]{x} + 4\sqrt{} - \frac{1}{8\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{4\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Andeut. Setze $x = y^4$, so geht das Integral über in:

$$\frac{1}{2}\int\left(y + \frac{8y^2 - y}{8y^3 + 1}\right) dy.$$

Ferner ist $8y^3 + 1 = (2y + 1)(4y^2 - 2y + 1)$ u. s. w.

391) $\int x^2 \sqrt{1 + x}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{2}{7}(1 + x)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(1 + x)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}} + C.$

Andeut. Setze $\sqrt{1 + x} = y$.

392) $\int \frac{x + 1}{x + \sqrt[3]{x}}\, dx = ?$

Aufl. $x - 3\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2} l(1 + \sqrt[3]{x^2}) + 3 arctg \sqrt[3]{x} + C.$

Andeut. Setze $\sqrt[3]{x} = y$, so geht das Integral über in:

$$3\int\left(y^2 - 1 + \frac{y + 1}{y^2 + 1}\right) dy.$$

393) $\int \frac{x - 1}{x + \sqrt{x + 1}}\, dx = ?$

Aufl. $x + 1 - 2\sqrt{x + 1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\, l \frac{(\sqrt{x + 1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^2}{x + \sqrt{x + 1}}$
$- l(x + \sqrt{x + 1}) + C.$

Andeut. Setzt man $\sqrt{x + 1} = y$, so geht das Integral über in:

$$2\int\left(y - 1 - \frac{y + 1}{y^2 + y - 1}\right) dy.$$

394) $\int \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + 3}\, dx = ?$

Aufl. $x + 2\sqrt{x} - l(x + 3)^2 - 2\sqrt{3}\, arctg \sqrt{\frac{x}{3}} + C.$

Andeut. Setzt man $x = y^2$, so folgt:

$$2\int\left(y + 1 - \frac{2y + 3}{y^2 + 3}\right) dy \text{ u. s. w.}$$

395) $\int \frac{x}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + x - \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 3l(1 + \sqrt[3]{x}) + C.$

Andeut. Setze $\sqrt[3]{x} = y$ u. s. w.

396) $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{12}} + \frac{12}{5}x^{\frac{5}{12}} - 4x^{\frac{1}{4}} + 12x^{\frac{1}{12}}$

$- 12 arc\,tg\,x^{\frac{1}{12}} + C.$

Andeut. Setze $x^{\frac{1}{12}} = y$ u. s. w.

397) $\int \frac{\sqrt[8]{x}+x}{1-\sqrt{x}}\,dx = ?$

Aufl. $-8\left\{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{12} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{8}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{8}}\right.$

$\left. + \frac{1}{4}l(x^{\frac{1}{4}}+1) - \frac{3}{4}arc\,tg\,x^{\frac{1}{8}} + \frac{1}{2}l(x^{\frac{1}{8}}-1)\right\} + C.$

Andeut. Man setze $x = y^8$.

398) $\int \frac{\sqrt{x}+2\sqrt[8]{x}}{1-\sqrt[4]{x}}\,dx = ?$

Aufl. $-8\left\{\frac{x^{\frac{5}{4}}}{10} + \frac{x}{8} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{8}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{4}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{8}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}\right.$

$+ \frac{2}{3}x^{\frac{3}{8}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{1}{8}} + \frac{3}{2}l(x^{\frac{1}{8}}-1)$

$\left. - \frac{1}{2}l(x^{\frac{1}{8}}+1)\right\} + C.$

399) $\int \frac{\sqrt[9]{x}+2}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx = ?$

Aufl. $-9\left\{\frac{1}{7}x^{\frac{7}{9}} + \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{4}{9}} + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{9}}\right.$

$+ l(x^{\frac{1}{9}}-1) + \frac{1}{2}l(x^{\frac{2}{9}}+x^{\frac{1}{9}}+1)$

$\left. - \frac{1}{\sqrt{3}}arc\,tg\frac{2x^{\frac{1}{9}}+1}{\sqrt{3}}\right\} + C.$

400) $\int \frac{\sqrt[10]{x}+\sqrt{x}}{1+\sqrt[5]{x}}\,dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{13}x^{\frac{13}{10}} - \frac{1}{11}x^{\frac{11}{10}} + \frac{2}{9}x^{\frac{9}{10}} - \frac{2}{7}x^{\frac{7}{10}} + \frac{2}{5}x^{\frac{1}{2}}$

$- \frac{2}{3}x^{\frac{3}{10}} + 2x^{\frac{1}{10}} - 2arc\,tg\,x^{\frac{1}{10}} + C.$

401) $\int \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x}}\, dx = ?$

Aufl. $12\left\{\frac{x}{6} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} + 4x^{\frac{2}{3}} + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{12}}\right.$

$+ \frac{64}{3}x^{\frac{1}{2}} + \frac{48}{5}x^{\frac{5}{12}} + 128x^{\frac{1}{3}} + 64x^{\frac{1}{4}} + 1024x^{\frac{1}{6}}$

$\left. + 768x^{\frac{1}{12}} + 256\left[13l(2 + x^{\frac{1}{12}}) + 19l(x^{\frac{1}{12}} - 2)\right]\right\} + C.$

Andeut. Setzt man $x^{\frac{1}{12}} = y$, so folgt: $12\int \frac{2y^{13} + 3y^{10}}{y^2 - 4}\, dy$ u. s. w.

402) $\int \frac{(x + \sqrt{x})\, dx}{x - \sqrt[3]{x}} = ?$

Aufl. $x + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + 3l(x^{\frac{1}{6}} - 1) - \frac{3}{2}l(x^{\frac{1}{3}} + 1)$

$+ 3\operatorname{arctg}(x^{\frac{1}{6}}).$

403) $\int \frac{dx}{\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a}} = ?$

Aufl. $\frac{1}{3a}\left\{(x + a)^{\frac{3}{2}} + (x - a)^{\frac{3}{2}}\right\}.$

404) $\int \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} - 4}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{66}{5}x^{\frac{5}{6}} + 88x^{\frac{1}{2}} + 1056x^{\frac{1}{6}}$

$+ 1056\, l\, \frac{x^{\frac{1}{6}} - 2}{x^{\frac{1}{6}} + 2} + C.$

405) $\int \frac{\sqrt{x + a}}{m + n\sqrt{x + a}}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{n}(x + a) - \frac{2m}{n^2}\sqrt{x + a} + \frac{2m^2}{n^3}l(m + n\sqrt{x + a}) + C.$

406) $\int \frac{dx}{m + n\sqrt[3]{ax + b}} = ?$

Aufl. $\frac{3}{a}\left\{\frac{1}{2n}(ax + b)^{\frac{2}{3}} - \frac{m}{n^2}(ax + b)^{\frac{1}{3}}\right.$

$\left. + \frac{m^2}{n^3}l(m + n\sqrt[3]{ax + b})\right\} + C.$

407) $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{x-b}} = ?$

Aufl. $\frac{2}{\sqrt{b-a}} \, arctg \sqrt{\frac{x-b}{b-a}}$, wenn $b > a$,

$\frac{1}{\sqrt{a-b}} \, l \, \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{x-b}+\sqrt{a-b}}$, wenn $b < a$.

408) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+a}+b} = ?$

Aufl. $\frac{4}{3}(x+a)^{\frac{3}{4}} - 2b(x+a)^{\frac{1}{2}} + 4b^2(x+a)^{\frac{1}{4}}$

$- 4b^3 \, l \, (b + \sqrt[4]{x+a}) + C.$

409) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+18}-5x-30} = ?$

Aufl. $-\frac{3}{2} l(y-3) + \frac{10}{7} l(y-2) + \frac{15}{14} l(y-9) + C,$

wo $y = \sqrt{x^2+6x+18} - x.$

Andeut. Setze $\sqrt{x^2+6x+18} = x + y$, so folgt $-\frac{1}{6}\int \frac{y^2-6y+18}{(y-3)(y-2)(y-9)} dy.$

410) $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{a+bx}} = ?$

Aufl. $\frac{2}{35 b^4} \sqrt{a+bx} \left(5b^3x^3 - 6a\,b^2x^2 + 8a^2\,bx - 16\,a^3\right) + C.$

Andeut. Setze $\sqrt{a+bx} = y$

411) $\int \frac{dx}{x^n \sqrt{ax+b}} = ?$

Aufl. $-\frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)\,bx^{n-1}} - \frac{2n-3}{2n-2}\frac{a}{b}\int \frac{dx}{x^{n-1}\sqrt{ax+b}}.$

Andeut. §. 97.

412) $\int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{ax+b}} = ?$

Aufl. $\frac{2x^m\sqrt{ax+b}}{a(2m+1)} - \frac{2bm}{a(2m+1)}\int \frac{x^{m-1}\,dx}{\sqrt{ax+b}}.$

Andeut. §. 97. 5.

413) $\int x^m \sqrt{ax+b} \, dx = ?$

Aufl. $\frac{2x^m(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{a(2m+3)} - \frac{2bm}{a(2m+3)}\int x^{m-1}(ax+b$

414) $\int x^3 \sqrt{ax+b}\, dx = ?$

Aufl. $\frac{(ax+b)^{\frac{3}{2}}}{315\, a^4}\left\{70a^3 x^3 - 60a^2 bx^2 + 48ab^2 x - 32b^3\right\}.$

415) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt[3]{ax+b}} = ?$

Aufl. $\frac{3}{40a^3}(ax+b)^{\frac{2}{3}}\left\{5a^2 x^2 - 6ab\, x + 9b^2\right\} + C.$

416) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt[4]{(ax+b)}} = ?$

Aufl. $\frac{4}{21\, a^2}(ax+b)^{\frac{3}{4}}(3ax - 4b) + C.$

417) $\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^4} = ?$

Aufl. $\frac{b+2cx}{\Delta}\left\{\frac{1}{3X^3} + \frac{5c}{3\Delta X^2} + \frac{10c^2}{\Delta^2 X}\right\} + \frac{20c^3}{\Delta^3}\int \frac{dx}{X},$

wo $X = a + bx + cx^2$; $\Delta = 4ac - b^2$.

Andeut. §. 91. (6).

418) $\int x^8 e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x(x^8 - 8x^7 + 56x^6 - 336x^5 + 1680x^4 - 6720\, x^3 + 20160x^2 - 40320x + 40320) + C.$

Andeut. §. 100. Beisp. 4.

419) $\int x^9 e^x\, dx = ?$

Aufl. $e^x(x^9 - 9x^8 + 72x^7 - 504x^6 + 3024x^5 - 15120x^4 + 60480x^3 - 181440x^2 + 362880x - 362880) + C.$

420) $\int x^{-6} e^x\, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{5}x^{-5} e^x - \frac{1}{20}x^{-4} e^x - \frac{1}{60}x^{-3} e^x - \frac{1}{120}x^{-2} e^x - \frac{1}{120}x^{-1} e^x + \frac{1}{120}\int x^{-1} e^x\, dx.$

421) $\int (2 + 3x - x^2 + 2x^3 - 3x^4)\, e^x\, dx = ?$

Aufl. $(-3x^4 + 14x^3 - 43x^2 + 89x - 87)\, e^x + C.$

422) $\int x^{\frac{9}{2}} e^x\, dx = ?$

Aufl. $x^{\frac{9}{2}} e^x - \frac{9}{2}x^{\frac{7}{2}} e^x + \frac{63}{4}x^{\frac{5}{2}} e^x - \frac{315}{8}x^{\frac{3}{2}} e^x + \frac{945}{16}\int x^{\frac{1}{2}} e^x\, dx.$

423) $\int x^{-\frac{5}{3}} e^x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{3}{2} x^{-\frac{2}{3}} e^x + \frac{9}{2} x^{\frac{1}{3}} e^x - \frac{9}{2} \int x^{\frac{1}{3}} e^x \, dx.$

424) $\int x^{-\frac{7}{2}} e^x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{2}{5} x^{-\frac{5}{2}} e^x - \frac{4}{15} x^{-\frac{3}{2}} e^x - \frac{8}{15} x^{-\frac{1}{2}} e^x + \frac{16}{15} x^{\frac{1}{2}} e^x$

$-\frac{16}{15} \int x^{\frac{1}{2}} e^x \, dx.$

425) $\int \frac{8e^{2x} - e^x}{e^{3x} - e^{2x} - 8e^x + 12} \, dx = ?$

Aufl. $l \frac{e^x - 2}{e^x + 3} - \frac{3}{e^x - 2} + C.$

Andeut. Man setze $e^x = y$, so verwandelt sich das Integral in

$$\int \frac{8y - 1}{y^3 - y^2 - 8y + 12} \, dy = \int \left(\frac{1}{y - 2} + \frac{3}{(y - 2)^2} - \frac{1}{y + 3} \right) dy.$$

426) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{a + be^x}} \, dx = ?$

Aufl. $\frac{2}{b^3} \sqrt{a + be^x} \left\{ \frac{1}{5} (a + be^x)^2 - \frac{2a}{3} (a + be^x) + a^2 \right\} + C.$

427) $\int \frac{5e^x \, dx}{2e^{2x} + e^x - 3} = ?$

Aufl. $l \frac{e^x - 1}{2e^x + 3} + C.$

Andeut. Setzt man $e^x = y$, so erhält man:

$$\int \frac{5dy}{2y^2 + y - 3} = \int \left(\frac{1}{y - 1} - \frac{2}{2y + 3} \right) dy.$$

428) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{a + be^x}} \, dx = ?$

Aufl. $\frac{3}{b^2} \left\{ \frac{1}{5} (a + be^x)^{\frac{5}{3}} - \frac{a}{2} (a + be^x)^{\frac{2}{3}} \right\} + C.$

429) $\int \frac{10 - 7e^x}{e^{2x} - 4e^x + 5} \, dx = ?$

Aufl. $l \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 4e^x + 5} + 3 \operatorname{arc\,tg} (e^x - 2) + C.$

Andeut. Setzt man $e^x = y$, so folgt:

$$\int \left(\frac{2}{y} - \frac{2y - 1}{y^2 - 4y + 5} \right) dy.$$

430) $\int l^7 x\, dx = ?$

Aufl. $x\,(l^7x - 7l^6x + 42l^5x - 210l^4x + 840l^3x - 2520l^2x + 5040lx - 5040) + C.$

431) $\int \frac{dx}{l^5x} = ?$

Aufl. $-\frac{x}{4}\,l^{-4}x - \frac{x}{12}\,l^{-3}x - \frac{x}{24}\,l^{-2}x - \frac{1}{24}\,xl^{-1}x + \frac{1}{24}\int l^{-1}x\,dx.$

432) $\int \frac{dx}{l^7x} = ?$

Aufl. $-\frac{x}{6}\,l^{-6}x - \frac{x}{30}\,l^{-5}x - \frac{x}{120}\,l^{-4}x - \frac{x}{360}\,l^{-3}x - \frac{x}{720}\,l^{-2}x - \frac{x}{720}\,l^{-1}x + \frac{1}{720}\int l^{-1}x\,dx.$

433) $\int x^m\, l^4x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^{m+1}}{m+1}\left\{l^4x - \frac{4}{m+1}\,l^3x + \frac{12}{(m+1)^2}\,l^2x - \frac{24}{(m+1)^3}\,lx + \frac{24}{(m+1)^4}\right\} + C.$

434) $\int \frac{x^m}{l^4x}\,dx = ?$

Aufl. $-\frac{x^{m+1}}{3l^3x} - \frac{(m+1)\,x^{m+1}}{3\,.\,2\,l^2x} - \frac{(m+1)^2\,x^{m+1}}{3\,.\,2\,.\,1\,lx} + \frac{(m+1)^3}{3\,.\,2\,.\,1}\int\frac{x^m\,dx}{lx}.$

435) $\int \frac{x^m}{l^6x}\,dx = ?$

Aufl. $-\frac{x^{m+1}}{5l^5x} - \frac{m+1}{5\,.\,4}\,\frac{x^{m+1}}{l^4x} - \frac{(m+1)^2}{5\,.\,4\,.\,3}\,\frac{x^{m+1}}{l^3x} - \frac{(m+1)^3}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}\,\frac{x^{m+1}}{l^2x} - \frac{(m+1)^4}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2}\,\frac{x^{m+1}}{lx} + \frac{(m+1)^5}{5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,1}\int\frac{x^m dx}{lx}.$

436) $\int \frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta x + \gamma x^2}}\,lx\,dx = ?$

Aufl. $2lx\sqrt{\beta x + \gamma x^2} - 2\sqrt{\beta x + \gamma x^2} + \frac{\beta}{\gamma}\,l\,\frac{\sqrt{\beta + \gamma x} - \gamma\sqrt{x}}{\sqrt{\beta + \gamma x} + \gamma\sqrt{x}}.$

Andeut. Man setze in §. 85. a: $u = lx$, $\frac{dv}{dx} = \frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{\beta x + \gamma x^2}}$.

437) $\int \sin(klx)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x}{k^2 + 1}\left\{\sin(klx) - k\cos(klx)\right\}$

438) $\int \cos(klx)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x}{k^2 + 1}\left\{k\sin(klx) + \cos(klx)\right\}$

Andeut. zu 437 und 438. Man setze das erste Integral gleich A, das andere $= B$, so folgt, wenn man im ersten $u = \sin(klx)$ und $\frac{dv}{dx} = 1$ setzt, durch theilweises Integriren:

$$A = x\sin(klx) - kB.$$

Ebenso wenn man im zweiten $u = \cos(klx)$, $\frac{dv}{dx} = 1$ setzt, durch dieselbe Operation:

$$B = x\cos(klx) + kA.$$

439) $\int \sin(alx + b)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x}{a^2 + 1}\left\{(\cos b + a\sin b)\sin(alx) + (\sin b - a\cos b)\right.$
$\left. . \cos(alx)\right\} + C.$

Andeut. $\int \sin(alx + b)\, dx = \int \left\{\sin(alx)\cos b + \cos(alx)\sin b\right\} dx$
$= \cos b \int \sin(alx)\, dx + \sin b \int \cos(alx)\, dx.$

Man benütze nun 437 und 438.

440) $\int \cos(alx + b)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x}{a^2 + 1}\left\{(a\cos b - \sin b)\sin(alx) + (\cos b\right.$
$\left. + a\sin b)\cos(alx)\right\} + C.$

Andeut. $\int \cos(alx + b)\, dx = \int \left\{\cos(alx)\cos b - \sin(alx)\sin b\right\} dx$
$= \cos b \int \cos(alx)\, dx - \sin b \int \sin(alx)\, dx.$

Man benütze nun 437 und 438.

441) $\int \frac{dz}{z\,(a + blz)^2} = ?$

Aufl. $-\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a + blz} + C.$

Andeut. $\int \frac{dz}{z\,(a + blz)^2} = \frac{1}{b}\int \frac{(a + blz)'}{(a + blz)^2}\, dz.$

$$442)\int \frac{dz}{z\sqrt[3]{a+blz}} = ?$$

Aufl. $\frac{3}{2b}\sqrt[3]{(a+blz)^2}+C.$

Andeut. $\int \frac{dz}{z\sqrt[3]{a+blz}} = \frac{1}{b}\int (a+blz)^{-\frac{1}{3}}(a+blz)^1\,dz.$

$$443)\int \frac{lx\,dx}{(a+bx)^3} = ?$$

Aufl. $-\frac{1}{2b}\frac{lx}{(a+bx)^2}+\frac{1}{2a^2b}\,l\,\frac{x}{a+bx}+\frac{1}{2ab}\cdot\frac{1}{a+bx}+C.$

Andeut. Man setze $u = lx$,

$$\frac{dv}{dx} = (a+bx)^{-3},\ \text{also}\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x};\ v = -\frac{1}{2b}(a+bx)^{-2},$$

so folgt durch theilweise Integration:

$$-\frac{lx}{2b(a+bx)^2}+\frac{1}{2b}\int \frac{dx}{x(a+bx)^2}.$$

Man zerlege nun in Partialbrüche u. s. w.

$$444)\int \frac{l(ax+b)}{(\alpha x+\beta)^2}\,dx = ?$$

Aufl. $-\frac{1}{\alpha}\frac{l(ax+b)}{\alpha x+\beta}+\frac{a}{\alpha(b\alpha-a\beta)}\,l\,\frac{\alpha x+\beta}{ax+b}+C.$

Andeut. Durch theilweise Integration folgt:

$$-\frac{1}{\alpha}\frac{l(ax+b)}{\alpha x+\beta}+\frac{a}{\alpha}\int \frac{dx}{(ax+b)(\alpha x+\beta)}$$

$$445)\int \frac{l(x+a)}{\sqrt{\alpha+\beta x}}\,dx = ?$$

Aufl. $\frac{2}{\beta}l(x+a)\sqrt{\alpha+\beta x}-\frac{2}{\beta}\int \frac{\sqrt{\alpha+\beta x}}{x+a}\,dx.$

Andeut. Durch theilweise Integration folgt:

$$\frac{2}{\beta}\,l(x+a)\sqrt{\alpha+\beta x}-\frac{2}{\beta}\int \frac{\sqrt{\alpha+\beta x}}{x+a}\,dx.$$

Um das letztere Integral zu bestimmen, setze $\alpha+\beta x = u^2$, so verwandelt sich dasselbe in:

$$-\frac{4}{\beta}u-\frac{4}{\beta}(\alpha-a\beta)\int \frac{du}{u^2-\alpha+a\beta} = -\frac{4}{\beta}\sqrt{\alpha+\beta x}-\frac{4}{\beta}(\alpha-a\beta)\int \frac{du}{u^2-\alpha+a\beta}.$$

1. **Fall.** $a\beta-\alpha = m^2$ positiv.

$$\int \frac{du}{u^2+m^2} = \int \frac{\frac{du}{m^2}}{\left(\frac{u}{m}\right)^2+1} = \frac{1}{m}\,arc\,tg\left(\frac{u}{m}\right).$$

2. **Fall.** $a\beta-\alpha = -m^2$ negativ.

$$\int \frac{du}{u^2-m^2} = \frac{1}{2m}\int\left(\frac{1}{u-m}-\frac{1}{u+m}\right)du = \frac{1}{2m}\,l\,\frac{u-m}{u+m}.$$

3. Fall. $a\beta - \alpha = 0$.

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}.$$

446) $\int \frac{l\,(ax+b)}{(\alpha x+\beta)^3}\,dx = ?$

Aufl. $$-\frac{l\,(ax+b)}{2\alpha(\alpha x+\beta)^2} + \frac{a^2}{2\alpha\,(a\beta - b\alpha)^2}\; l\,\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}$$
$$+ \frac{a}{2\alpha\,(a\beta - b\alpha)\,(\alpha x+\beta)} + C.$$

Andeut. Durch theilweise Integration folgt:

$$-\frac{1}{2\alpha}\,\frac{l\,(ax+b)}{(\alpha x+\beta)^2} + \frac{a}{2\alpha}\int \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2\,(ax+b)} \text{ u. s. w.}$$

447) $\int \sin(ax)\,\sin(bx)\,\sin(cx)\,dx = ?$

Aufl. $$-\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(a-b+c)x}{a-b+c} + \frac{\cos(-a+b+c)x}{-a+b+c}\right.$$
$$\left. + \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} - \frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c}\right\} + C.$$

Andeut. Es ist $\sin(ax)\,\sin(bx)\,\sin(cx) = \frac{1}{4}\Big\{\sin(-a+b+c)x$
$+ \sin(a-b+c)x + \sin(a+b-c)x - \sin(a+b+c)x\Big\}$ u. s. w.

448) $\int \cos(ax)\,\cos(bx)\,\cos(cx)\,dx = ?$

Aufl. $$\frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} + \frac{\sin(-a+b+c)x}{-a+b+c}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c} + \frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}\right\} + C.$$

Andeut. $\cos(ax)\,\cos(bx)\,\cos(cx) = \frac{1}{4}\Big\{\cos(a+b+c)x + \cos(-a+b+c)x$
$+ \cos(a-b+c)x + \cos(a+b-c)x\Big\}$

449) $\int \sin(ax)\,\cos(bx)\,\cos(cx)\,dx = ?$

Aufl. $$-\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\cos(-a+b+c)x}{-a+b+c}\right.$$
$$\left. + \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\cos(a-b+c)x}{a-b+c}\right\}$$

Andeut. $\sin(ax)\,\cos(bx)\cos(cx) = \frac{1}{4}\Big\{\sin(a+b+c)x - \sin(-a+$
$+ \sin(a+b-c)x + \sin(a-b+c)x\Big\}$

450) $\int cos(ax)\, sin(bx)\, sin(cx)\, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{4}\left\{\frac{sin(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{sin(a-b+c)x}{a-b+c} - \frac{sin(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{sin(-a+b+c)x}{-a+b+c}\right\} + C.$

Andeut. $cos(ax)\, sin(bx)\, sin(cx) = \frac{1}{4}\left\{cos(a+b-c)x + cos(a-b+c)x - cos(a+b+c)x - cos(-a+b+c)x\right\}$

451) $\int x^5 \sin x\, dx = ?$

Aufl. $-(x^5 - 20x^3 + 120x)\cos x + (5x^4 - 60x^2 + 120) \sin x + C.$

Andeut. §. 104.

452) $\int x^7 \sin x\, dx = ?$

Aufl. $-(x^7 - 42x^5 + 840x^3 - 5040x)\cos x + (7x^6 - 210x^4 + 2520x^2 - 5040)\sin x.$

Andeut. Es lässt sich leicht zeigen, dass

$$\int x^n \sin x\, dx = -U \cos x + U' \sin x,$$

wo U von der Form ist:

$$x^n + ax^{n-2} + bx^{n-4} + cx^{n-6} + \ldots$$

und $x^n = U + U''$ ist. Hieraus können dann $a, b, c, \ldots$ bestimmt werden.

453) $\int x^{-6} \sin x\, dx = ?$

Aufl. $-\cos x\left(\frac{1}{20}x^{-4} - \frac{1}{120}x^{-2}\right) + \sin x\left(-\frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{60}x^{-3}\right) + \frac{1}{120}\int x^{-2} \sin x\, dx.$

454) $\int x^{-7} \sin x\, dx = ?$

Aufl. $-\cos x\left(\frac{1}{30}x^{-5} - \frac{1}{360}x^{-3} + \frac{1}{720}x^{-1}\right) + \sin x\left(-\frac{1}{6}x^{-6} + \frac{1}{120}x^{-4} - \frac{1}{720}x^{-2}\right) - \frac{1}{720}\int x^{-1} \sin x\, dx.$

455) $\int x^7 \cos x\, dx = ?$

Aufl. $(x^7 - 42x^5 + 840x^3 - 5040x)\sin x + (7x^6 - 210x^4 + 2520x^2 - 5040)\cos x + C.$

456) $\int x^{-6} \cos x \, dx = ?$

Aufl. $\sin x \left\{ \frac{1}{20} x^{-4} - \frac{1}{120} x^{-2} \right\} + \cos x \left\{ -\frac{1}{5} x^{-5} + \frac{1}{60} x^{-3} \right\}$

$+ \frac{1}{120} \int x^{-2} \cos x \, dx.$

457) $\int x^{-7} \cos x \, dx = ?$

Aufl. $\sin x \left(\frac{1}{30} x^{-5} - \frac{1}{360} x^{-3} + \frac{1}{720} x^{-1} \right)$

$+ \cos x \left(-\frac{1}{6} x^{-6} + \frac{1}{120} x^{-4} - \frac{1}{720} x^{-2} \right)$

$- \frac{1}{720} \int x^{-1} \cos x \, dx.$

458) $\int \sin^8 x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2^7} \left(\frac{1}{8} \sin 8x - \frac{4}{3} \sin 6x + 7 \sin 4x - 28 \sin 2x \right.$

$\left. + 35x \right) + C.$

459) $\int \cos^9 x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2^8} \left(\frac{1}{9} \sin 9x + \frac{9}{7} \sin 7x + \frac{36}{5} \sin 5x + 28 \sin 3x \right.$

$\left. + 126 \sin x \right) + C.$

460) $\int \sin^{-5} x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3}{8} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8} l \, tg \frac{x}{2} + C.$

Andeut. §. 104. 15.

461) $\int \cos^{-4} x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{\sin x}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{3} tg x + C.$

462) $\int \cos^{-5} x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3}{8} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8} l \frac{1 + tg \frac{x}{2}}{1 - tg \frac{x}{2}} + C.$

463) $\int tg^5 x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{4} tg^4 x - \frac{1}{2} tg^2 x - l \cos x + C.$

464) $\int tg^{-2} x \, dx = ?$

Aufl. $- tg^{-1} x - x + C.$

465) $\int tg^{-3} x \, dx = ?$

Aufl. $- \frac{1}{2} tg^{-2} x - l \sin x + C.$

466) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{8} \left(- \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x + \frac{1}{10} \cos 5x \right) + C.$

Andeut. $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int (- \sin 3x + 3 \sin x)(1 + \cos 2x) \, dx.$

467) $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{16} \left(\frac{1}{12} \cos 6x - \frac{3}{4} \cos 2x \right) + C.$

Andeut. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \frac{1}{16} \int (- \sin 3x + 3 \sin x)(\cos 3x + 3 \cos x) \, dx$

$= \frac{1}{16} \int \left(- \frac{1}{2} \sin 6x + \frac{3}{2} \sin 2x \right) dx.$

468) $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{1}{2^5} \left\{ - \frac{1}{14} \sin 7x - \frac{3}{10} \sin 5x - \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{5}{2} \sin x \right\} + C.$

Andeut. $\int \sin^2 x \cos^5 x \, dx = \frac{1}{2^5} \int (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)(1 - \cos 2x) \, dx.$

$= \frac{1}{2^5} \int \left\{ - \frac{1}{2} \cos 7x - \frac{3}{2} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{5}{2} \cos x \right\} dx.$

469) $\int \frac{dx}{37 - 13 \sin x + 35 \cos x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{5} \, l \, \frac{tg \frac{1}{2} x - 9}{tg \frac{1}{2} x - 4} + C.$

Andeut. Setzt man $tg \frac{1}{2} x = z$, so folgt:

$\int \frac{dz}{72 - 26z + 2z^2} = \int \frac{dz}{(z-4)(z-9)} = \frac{1}{5} \int dz \left(\frac{1}{z-9} - \frac{1}{z-4} \right)$

$= \frac{1}{5} \, l \, \frac{z-9}{z-4}.$

470) $\int \frac{dx}{50 - 14\, sin\, x + 48\, cos\, x} = ?$

Aufl. $\frac{-1}{tg\, \frac{x}{2} - 7} + C.$

471) $\int \frac{dx}{40 - 12\, sin\, x + 38\, cos\, x} = ?$

Aufl. $\frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\, tg \left(\frac{tg\, \frac{x}{2} - 6}{\sqrt{3}} \right) + C.$

472) $\int \frac{52 - 28\, sin\, x + 49\, cos\, x}{8 - 4\, sin\, x + 7\, cos\, x}\, dx = ?$

Aufl. $4\, l\, \frac{tg\, \frac{x}{2} - 3}{tg\, \frac{x}{2} - 5} + 7x + C.$

473) $\int \frac{29 - 35\, sin\, x + 5\, cos\, x}{7 - 5\, sin\, x + 5\, cos\, x}\, dx = ?$

Aufl. $2\, l \left(tg\, \frac{x}{2} - 2 \right) + 4l \left(tg\, \frac{x}{2} - 3 \right) - 6l\, cos \frac{x}{2} + 4x + C.$

474) $\int \frac{dx}{4\, cos\, x + 5\, cos^2 x} = ?$

Aufl. $-\frac{1}{4}\, l\, \frac{tg\, \frac{x}{2} - 1}{tg\, \frac{x}{2} + 1} + \frac{5}{12}\, l\, \frac{tg\, \frac{x}{2} - 3}{tg\, \frac{x}{2} + 3} + C.$

475) $\int \frac{2dx}{25 + 35\, cos\, x + 12\, cos^2 x} = ?$

Aufl. $-\frac{3}{5}\, arc\, tg \left(\frac{tg\, \frac{x}{2}}{2} \right) + \frac{16}{15}\, arc\, tg \left(\frac{tg\, \frac{x}{2}}{3} \right) + C.$

476) $\int x^3\, arc\, sin\, x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^4}{4} arc\, sin\, x + \frac{x}{32} (2x^2 + 3) \sqrt{1 - x^2} - \frac{3}{32} arc\, sin\, x$

Andeut. Integrire zuerst theilweise, dann wende zweimal §. 97. 5. an.

477) $\int x^6\, arc\, sin\, x\, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^7}{7}\, arc\, sin\, x + (5x^6 + 6x^4 + 8x^2 + 16) \frac{\sqrt{1 - x^2}}{245} +$

478) $\int x^4 \, arc\cos x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^5}{5} arc\cos x - (3x^4 + 4x^2 + 8) \frac{\sqrt{1-x^2}}{75} + C.$

479) $\int x^5 \, arc\cos x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{48x^6 - 15}{288} arc\cos x - (8x^4 + 10x^2 + 15) \frac{x\sqrt{1-x^2}}{288} + C.$

480) $\int x^5 \, arc\,tg\, x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^6 + 1}{6} arc\,tg\, x - \frac{x^5}{30} + \frac{x^3}{18} - \frac{x}{6} + C.$

481) $\int x^6 \, arc\,tg\, x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^7}{7} arc\,tg\, x - \frac{x^6}{42} + \frac{x^4}{28} - \frac{x^2}{14} + \frac{1}{14} l(x^2 + 1) + C.$

482) $\int x^7 \, arc\,cotg\, x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^8 - 1}{8} arc\,cotg\, x + \frac{1}{8}\left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x\right) + C.$

483) $\int x^8 \, arc\,cotg\, x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^9}{9} arc\,cotg\, x + \frac{1}{9}\left\{\frac{x^8}{8} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right.$

$\left. + \frac{1}{2} l(x^2 + 1)\right\} + C.$

484) $\int x^{-3} \, arc\sin x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{2} x^{-2} arc\sin x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} + C.$

Andeut. Durch theilweise Integration folgt:

$$-\frac{1}{2} x^{-2} arc\sin x + \frac{1}{2}\int x^{-2} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Für das letztere Integral findet man nach §. 97. 6:

$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

485) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^2}} arc\sin x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{35}(5x^6 + 6x^4 + 8x^2 + 16) \, arc\sin x \sqrt{1-x^2}$

$+ \frac{1}{35}\left(5\frac{x^7}{7} + 6\frac{x^5}{5} + 8\frac{x^3}{3} + 16x\right) + C.$

486) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} \, arc \cos x \, dx = ?$

Aufl. $-\frac{1}{15}(3x^4 + 4x^2 + 8) \, arc \cos x \sqrt{1-x^2}$

$+\frac{1}{15}\left(3\frac{x^5}{5} + 4\frac{x^3}{3} + 8x\right) + C.$

487) $\int x^{-\frac{1}{3}} \, arc \, tg x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} arc tg x - \frac{3}{2} arc tg x^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{8}\sqrt{3} \, l \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3} + 1}{x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3} + 1}$

$-\frac{3}{4} arc tg \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1 - x^{\frac{2}{3}}} + C.$

Andeut. Durch theilweise Integration folgt:

$$\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} arc \, tg \, x - \frac{3}{2}\int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2+1} \, dx.$$

Um das letztere Integral zu finden, setze $x^{\frac{1}{3}} = z$, so ergibt sich:

$$-\frac{3}{2}\int \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2+1} \, dx = -\frac{9}{2}\int \frac{z^4 dz}{z^6+1}.$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche folgt:

$$\frac{z^4}{z^6+1} = \frac{1}{3(z^2+1)} + \frac{1}{6}\left\{\frac{z\sqrt{3}-1}{z^2 - z\sqrt{3}+1} - \frac{z\sqrt{3}+1}{z^2+z\sqrt{3}+1}\right\}$$

Daher:

$$\int \frac{z^4 dz}{z^6+1} = \frac{1}{3} \, arc \, tg \, z + \frac{1}{4\sqrt{3}} \, l \, \frac{z^2 - z\sqrt{3}+1}{z^2+z\sqrt{3}+1} + \frac{1}{6} \, arc \, tg \, \frac{z}{1-z^2}.$$

488) $\int \frac{arc \sin x}{\sqrt{1+x}} \, dx = ?$

Aufl. $2 \, arc \sin x \sqrt{1+x} + 4\sqrt{1-x} + C.$

489) $\int \frac{x^6}{\sqrt{1-x^2}} \, arc \sin x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{-x\sqrt{1-x^2}}{48}(8x^4 + 10x^2 + 15) \, arc \sin x$

$+\frac{5}{32}(arc \sin x)^2 + \frac{1}{48}\left(\frac{4}{3}x^6 + \frac{5}{2}x^4 + \frac{15}{2}x^2\right) + C.$

490) $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 14x^2 + 42x + 5}{(x^2+x-2)^2} \, arc \, tg \, x \, dx = ?$

Aufl. $\frac{x^3 - 7x^2 + x - 7}{x^2+x-2} \, arc \, tg \, x + l \frac{(1-x)^2}{(2+x)^3} + C.$

i) Ueber bestimmte Integrale.

491) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+2x)^5} = ?$

Aufl. $\frac{1}{8}$.

492) $\int_0^\infty \frac{dx}{6x^2+17x+12} = ?$

Aufl. $l\frac{9}{8}$.

493) $\int_0^\infty \frac{dx}{(a+bx)(a_1+b_1x)} = ?$ (wenn a, b, a_1, b_1 positive Zahlen bedeuten und $a_1b - ab_1$ nicht Null ist).

Aufl. $\frac{l(a_1b) - l(ab_1)}{a_1b - ab_1}$.

494) $\int_0^\infty \frac{dx}{(a+bx)(a_1+b_1x)(a_2+b_2x)} = ?$ (wenn a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 positiv sind und $\frac{a}{b} > \frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2}$.)

Aufl. Bezeichnet man die positiven Differenzen $ab_1 - a_1b$, $ab_2 - a_2b$, $a_1b_2 - a_2b_1$ der Reihe nach durch p, q, r, so folgt:

$$\frac{1}{pqr}\left(brl\,\frac{a_1b}{ab_1} + b_2pl\,\frac{a_1b_2}{a_2b_1}\right)$$

495) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a+bx+cx^2} = ?$ (wenn c und $4ac - b^2$ positiv ist.)

Aufl. $\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}$.

496) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} = ?$ (c und $4ac - b^2$ positiv.)

Aufl. $\frac{4\pi c}{\sqrt{(4ac-b^2)^3}}$.

497) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3} = ?$$

Aufl. $$\frac{12\pi c^2}{(4ac-b^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

498) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(a+bx+cx^2)^2} = ?$$

Aufl. $$\frac{4a\pi}{(4ac-b^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

499) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(a+bx+cx^2)^3} = ?$$

Aufl. $$\frac{2\pi(b^2+2ac)}{(4ac-b^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

500) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^4} = ?$$

Aufl. $$\frac{40\pi c^3}{(4ac-b^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

501) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^4} = ?$$

Aufl. $$-\frac{20\pi bc^2}{(4ac-b^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

502) $$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^4+2x^2(\beta^2-\alpha^2)+(\alpha^2+\beta^2)^2} = ?$$

Aufl. $$\frac{\pi}{4\beta(\alpha+\beta)}.$$

Andeut. Nenner $= \left\{(x+\alpha)^2+\beta^2\right\}\left\{(x-\alpha)^2+\beta^2\right\}$.

503) $$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = ?$$ (wenn a, c, $4ac-b^2$ positiv.)

Aufl. $$\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\, \frac{\sqrt{a}+\sqrt{c}+\sqrt{a+b+c}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}+\sqrt{a+b+c}}.$$

Andeut. §. 94 (2).

504) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}} = ?$ (wenn a, c, $4ac - b^2$ positiv.)

Aufl. $\frac{2}{(2\sqrt{ac}+b)\sqrt{a}}$.

Andeut. In §. 91. (6) $p = \frac{3}{2}$.

505) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = ?$

Aufl. $\frac{2(2p-b)}{3p^2\sqrt{a^3}}$, wenn $2\sqrt{ac}+b = p$ gesetzt wird.

506) $\int_0^\infty \frac{xdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^5}} = ?$

Aufl. $\frac{4}{3p^2\sqrt{a}}$, wenn $p = 2\sqrt{ac}+b$.

Andeut. In §. 91. (7) $m = 1$, $p = \frac{5}{2}$.

507) $\int_0^\infty xe^{-ax} \cos bx \, dx = ?$

Aufl. $\frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}$.

Andeut. In §. 104. (43) $m = 1$, $-a$ statt a u. s. w.

508) $\int_0^\infty xe^{-ax} \sin bx \, dx = ?$

Aufl. $\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}$.

Andeut. §. 104. (44)

509) $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin bx \, dx = ?$

Aufl. $\frac{2b(3a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^3}$.

510) $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos bx \, dx = ?$

Aufl. $\frac{2a(a^2-3b^2)}{(a^2+b^2)^3}$.

511) $\int_0^\infty x^m e^{-ax} \sin bx\, dx = ?$

Aufl. $\frac{m}{a^2+b^2}\left\{ a\int_0^\infty x^{m-1}e^{-ax} \sin bx\, dx \right.$

$\left. + b\int_0^\infty x^{m-1}e^{-ax} \cos bx\, dx \right\}.$

512) $\int_0^\infty x^m e^{-ax} \cos bx\, dx = ?$

Aufl. $\frac{m}{a^2+b^2}\left\{ a\int_0^\infty x^{m-1}e^{-ax} \cos bx\, dx \right.$

$\left. - b\int_0^\infty x^{m-1} e^{-ax} \sin bx\, dx \right\}.$

513) $\int_0^\infty x^4 e^{-ax} \sin bx\, dx = ?$

Aufl. $\frac{96ab\,(a+b)\,(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^5}.$

514) $\int_0^\infty x^3 e^{-ax} \cos bx\, dx = ?$

Aufl. $\frac{6\,(a^4 - 3a^2b^2 + b^4)}{(a^2+b^2)^4}.$

515) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = ?$

Aufl. $\frac{\pi}{2ab}.$

516) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = ?$

Aufl. $\frac{\pi}{4}\,\frac{a^2+b^2}{a^3b^3}.$

Andeut. $\int \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = 4\int \frac{dx}{\left\{a^2(1+\cos 2x) + b^2(1-\cos\right.}$

$= 2\int \frac{2dx}{\left\{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2x\right\}^2} = 2\int \frac{dy}{(p+q\cos y)^2}.$

Setze nun in §. 104. 14: $\alpha = 1$, $\beta = o$, $a = p$, $b = q$, $n = 2$,

$$A = \frac{p}{p^2 - q^2},\ B = o,\ C = -\frac{q}{p^2 - q^2},\ \text{so folgt:}$$

$$-\frac{q}{p^2 - q^2}\frac{\sin y}{p + q\cos y} + \frac{p}{p^2 - q^2}\int\frac{dy}{p + q\cos y} = \frac{b^2 - a^2}{4a^2b^2}\frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$
$$+ \frac{a^2 + b^2}{4a^2b^2}\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$

und das bestimmte Integral ist daher:

$$= \frac{a^2 + b^2}{4a^2b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\ \text{u. s. w.}$$

517) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x\, dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = ?$$

Aufl. $\frac{\pi}{4a^3b}$.

Andeut. $$\int\frac{2(1 + \cos 2x)\,dx}{\{a^2(1 + \cos 2x) + b^2(1 - \cos 2x)\}^2} = \int\frac{(1 + \cos y)\,dy}{(p + q\cos y)^2}$$

oder nach §. 104. 14:

$$= \frac{1}{2a^2}\frac{\sin y}{p + q\cos y} + \frac{1}{2a^2}\int\frac{dy}{p + q\cos y} = \frac{1}{2a^2}\frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}$$
$$+ \frac{1}{2a^2}\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\ \text{u. s. w.}$$

518) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x\, dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^2} = ?$$

Aufl. $\frac{\pi}{4ab^3}$.

Andeut. Bezeichnen wir die Integrale der Aufg. 517 und 518 bezüglich durch P und Q, so ist

$$a^2P + b^2Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2ab}\ \text{u. s. w.}$$

519) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^3} = ?$$

Aufl. $\frac{\pi}{16\,a^5b^5}\left[3(a^4 + b^4) + 2a^2b^2\right]$.

Andeut. Schreibe $$\int\frac{8dx}{\{a^2(1 + \cos 2x) + b^2(1 - \cos 2x)\}^3}$$

$$= 4\int\frac{dy}{(p + q\cos y)^3}\ \text{u. s. w. nach §. 104. (14)}$$

k) Ueber die Reihen von Bürmann und Lagrange.

* 520) Man soll $\sin x$ in eine Reihe nach Potenzen von $\cos^2 x$ entwickeln.

Aufl. $$\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1 \,.\, 1}{2 \,.\, 4}\cos^4 x - \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\cos^6 x - \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8}\cos^8 x - \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10}\cos^{10} x - \ldots$$

Andeut. Setze in §. 116: $f(x) = \sin x$; $\varphi(x) = \cos^2 x$; $a = \frac{\pi}{2}$.

521) Man soll $\cos x$ nach Potenzen von $\sin^2 x$ entwickeln.

Aufl. $$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1 \,.\, 1}{2 \,.\, 4}\sin^4 x - \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\sin^6 x - \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8}\sin^8 x - \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10}\sin^{10} x - \ldots$$

Andeut. Setze: $f(x) = \cos x$; $\varphi(x) = \sin^2 x$; $a = 0$.

522) $l(1 + x)$ nach Potenzen von $\sin x$ zu entwickeln.

Aufl. $$l(1 + x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^3 x - \frac{5}{12}\sin^4 x + \frac{43}{120}\sin^5 x - \frac{17}{60}\sin^6 x + \ldots$$

Andeut. Setze: $f(x) = l(1 + x)$; $\varphi(x) = \sin x$; $a = 0$, also $\varphi(o) = f(o) = 0$.

523) Man soll lx nach Potenzen von $(x - 1)$ entwickeln.

Aufl. $$lx = x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

Andeut. $f(x) = lx$; $\varphi(x) = x - 1$; $a = 1$.

524) Es sei $\frac{\sin(\lambda x)}{\sin x}$ nach Potenzen von $\sin^2 x$ zu entwickeln.

Aufl. $$\frac{\sin(\lambda x)}{\sin x} = \lambda - \frac{\lambda(\lambda^2 - 1^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\sin^2 x + \frac{\lambda(\lambda^2 - 1^2)(\lambda^2 - 3^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}\sin^4 x - \ldots$$

Andeut. Setze: $f(x) = \frac{\sin(\lambda x)}{\sin x}$; $\varphi(x) = \sin^2 x$; $a = 0$.

525) $\cos(\lambda x)$ nach Potenzen von $\sin^2 x$ zu entwickeln.

Aufl. $$\cos(\lambda x) = 1 - \frac{\lambda^2}{1 \,.\, 2}\sin^2 x + \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\sin^4 x - \frac{\lambda^2(\lambda^2 - 2^2)(\lambda^2 - 4^2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6}\sin^6 x + \ldots$$

526) Man soll $f(x) - f(a)$ nach Potenzen von $(e^{-x} - e^{-a})$ entwickeln.

Aufl. $$f(x) - f(a) = - e^{a}(e^{-x} - e^{-a})\, f'(a)$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2} e^{2a}(e^{-x} - e^{-a})^2 \,[f'(a) + f''(a)]$$
$$- \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3} e^{3a}(e^{-x} - e^{-a})^3 [f'''(a) + 3f''(a) + 2f'(a)]$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} e^{4a}(e^{-x} - e^{-a})^4 \,[f^{IV}(a) + 6\,f'''(a)$$
$$+ 11 f''(a) + 6\,f'(a)] - \ldots.$$

527) $\sin x$ nach Potenzen von $\cot^2 x$ zu entwickeln.

Aufl. $$\sin x = 1 - \frac{1}{2} \cot^2 x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cot^4 x - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \cot^6 x + \ldots$$

Andeut. $f(x) = \sin x$; $\varphi(x) = \cot^2 x$; $a = \frac{\pi}{2}$.

528) $\cos x$ nach Potenzen von $tg^2 x$ zu entwickeln.

Aufl. $$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\, tg^2 x + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\, tg^4 x - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\, tg^6 x + \ldots$$

Andeut. $f(x) = \cos x$; $\varphi(x) = tg^2 x$; $a = 0$.

529) Es sei $x = a + \frac{k}{x}$; man soll x in eine Reihe nach Potenzen von k entwickeln.

Aufl. $$x = a + \frac{k}{a} - \frac{k^2}{a^3} + \frac{2k^3}{a^5} - \frac{5k^4}{a^7} + \ldots.$$

Andeut. Setze in §. 118. (7) $\psi(x) = \frac{1}{x}$ u. s. w.

530) Es sei $x = a + \frac{k}{x^2}$; man soll x in eine Reihe nach Potenzen von k entwickeln.

Aufl. $$x = a + \frac{k}{a^2} - \frac{2k^2}{a^5} + \frac{7k^3}{a^8} - \frac{30k^4}{a^{11}} + \ldots.$$

Andeut. Setze in §. 118 (7) $\psi(x) = x^{-2}$.

531) Es sei $x = a + \frac{k}{x + b}$.

Aufl. $$x = a + \frac{k}{a + b} - \frac{k^2}{(a+b)^3} + \frac{2k^3}{(a+b)^5} - \frac{5k^4}{(a+b)^7} + \ldots$$

Andeut. Setze $x + b = a + b + \frac{k}{x + b}$ oder $y = \alpha + \frac{k}{y}$ u. s. w.

532) Es sei $x = a + \frac{k}{e^x}$.

Aufl. $x = a + ke^a - k^2e^{-2a} + \frac{3}{2}k^3e^{-3a} - \frac{8}{3}k^4e^{-4a} + \ldots$

Andeut. Setze $\psi(x) = e^{-x}$ u. s. w.

533) Es sei $x = a + kx^3$.

Aufl. $x = a + ka^3 + \frac{k^2}{1.2} \cdot 6a^5 + \frac{k^3}{1.2.3} \cdot 72a^7$

$+ \frac{k^4}{1.2.3.4} \cdot 1320a^{10} + \ldots$

534) Es sei $x = a + kx^m$; man soll lx nach Potenzen von k entwickeln.

Aufl. $lx = la + ka^{m-1} + \frac{k^2}{1.2}(2m-1)\,a^{2m-2}$

$+ \frac{k^3}{1.2.3}(3m-1)(3m-2)\,a^{3m-3}$

$+ \frac{k^4}{1.2.3.4}(4m-1)(4m-2)(4m-3)\,a^{4m-4} + \ldots$

Andeut. Setze in §. 118. (7): $\psi(x) = x^m$, $f(x) = lx$, $f'(x)\,\psi(x) = x^{m-1}$ u. s. w.

535) Es sei $x = a + \frac{k}{\sin x}$; man soll $\cos x$ nach Potenzen von k entwickeln.

Aufl. $\cos x = \cos a - k + \frac{k^2}{1.2}\frac{\cos a}{\sin^2 a} - \frac{k^3}{1.2.3}\frac{2 + 4\cos^2 a}{\sin^4 a}$

$+ \frac{k^4}{1.2.3.4}\frac{3\cos a\,(11 + 9\cos^2 a)}{\sin^6 a} + \ldots$

Andeut. Setze $\psi(x) = \frac{1}{\sin x}$, $f(x) = \cos x$.

536) Es sei $x = a + k\sin x$; man soll $\cos x$ nach Potenzen von k entwickeln.

Aufl. $\cos x = \cos a - k\sin^2 a - \frac{k^2}{1.2} \cdot 3\sin^2 a\cos a$

$+ \frac{k^3}{1.2.3} \cdot 4\sin^2 a\,(4\sin^2 a - 3) + \ldots.$

537) Es sei $x = a + k\cos x$ und $\sin x$ in eine Reihe nach Po von k zu entwickeln.

Aufl. $\sin x = \sin a + k\cos^2 a - \frac{k^2}{1.2} \cdot 3\cos^2 a\sin a$

$+ \frac{k^3}{1.2.3} \cdot 4\cos^2 a\,(3 - 4\cos^2 a) + \ldots.$

538) Es sei $x = a + ke^{mx}$; man soll e^{nx} entwickeln.

Aufl. $e^{nx} = e^{na} + kne^{(m+n)a} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot n\,(2m + n)\; e^{(2m+n)a}$

$+ \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n(3m + n)^2\; e^{(3m+n)a}$

$+ \frac{k^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot n(4m + n)^3\; e^{(4m+n)a} + \ldots .$

539) Es sei $x = a + kx^m$; man soll x^n in eine Reihe entwickeln.

Aufl. $x^n = a^n + kna^{m+n-1} + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \cdot n\,(2m + n - 1)\; a^{2m+n-2}$

$+ \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot n\,(3m + n - 1)\,(3m + n - 2)\; a^{3m+n-3}$

$+ \frac{k^4}{1.2.3.4} \cdot n(4m + n - 1)(4m + n - 2)(4m + n - 3)$
$a^{4m+n-4} + \ldots$

l) Ueber die Quadratur und Rectification ebener Curven, die Quadratur der Oberflächen und Cubatur von Rotationskörpern.

α) Quadraturen.

540) Die Gleichung der Tractorie ist:

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + al\,\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}.$$

Man soll den über der XAchse liegenden Theil derselben quadriren.

Aufl. $-\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{a^2}{2}\, arc\, sin\, \frac{y}{a}.$

Andeut. $\int y\, dx = \int y\, \frac{dx}{dy}\, dy = -\int \sqrt{a^2 - y^2}\, dy$ u. s. w. nach §. 97. 13. (19)

541) Man soll den Inhalt der Schleife AP_1EG (Fig. 137) der in Aufg. 331 unterhalb der Leitlinie LL_1 gefundenen Curve

$$r = c\, cos\, \varphi - \frac{a}{cos\, \varphi}$$

berechnen.

Aufl. Sezt man $\frac{a^2}{b} = c$, so folgt:

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{c}{2}\right)\sqrt{b^2 - a^2} + \left(\frac{c^2}{4} - b^2\right) arc\, cos\, \frac{a}{b}.$$

Andeut. Man findet:

$$\int \frac{1}{2}\, r^2 d\varphi = \varphi\left(\frac{c^2}{4} - ac\right) + \frac{a^2}{2}\, tg\, \varphi + \frac{c^2}{4}\, sin\, \varphi\, cos\, \varphi.$$

Für $cos\, \varphi = \frac{a}{b}$ erhält man hieraus die halbe Schleife.

542) Den Inhalt der Fläche zu berechnen, welcher zwischen der in Aufg. 331 gefundenen oberen Curve und der Leitlinie LL_1 liegt.

Aufl. $\frac{\pi c^2}{4} + \pi b^2$.

Andeut. Die Gleichung der Curve ist nach Aufg. 331:

$$y = (a + x)\sqrt{\frac{c - x}{x}}.$$

Da hiernach für $x = 0$, $y = \infty$ wird, so berechne man zuerst das Segment über $x - \varepsilon$ und lasse alsdann ε unendlich klein werden.

543) Wie gross ist der Inhalt der Fläche, welche von der Curve $y = (x - a)\sqrt{\frac{c - x}{a}}$ und der YAchse über der Abscisse a begrenzt wird, wenn $b \geq a$.

Aufl. $2\left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right) arc\,sin\,\frac{a}{b} + \left(a + \frac{c}{2}\right)\sqrt{b^2 - a^2}$.

Anmerk. Ist $b < a$, so wird die halbe Fläche über der Abscisse

$$c = \frac{\pi}{2}\left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right)$$

und die ganze Fläche ist somit

$$= \pi\left(b^2 - \frac{c^2}{4}\right).$$

544) Die Gleichung einer geschlossenen Curve heisst

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{5}} = 1.$$

Man soll berechnen: a) das über der Abscisse x liegende Flächenstück, b) einen Quadranten, c) die ganze Fläche.

Aufl. a) $\frac{abx(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{48a^6}(8x^4 - 26a^2x^2 + 33a^4)$

$+ \frac{5}{16}ab\,arc\,sin\,\frac{x}{a}$; b) $\frac{5}{32}\pi ab$; c) $\frac{5}{8}\pi ab$.

Andeut. Um das binomische Integral $\frac{b}{a^5}\int (a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}dx$ zu bestimmen, wende man dreimal die Formel (2) des §. 97 an.

545) Den Inhalt der geschlossenen Figur, welche von der Curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{2m+1}} = 1$$

begrenzt ist, zu bestimmen, wenn m eine positive ganze Zahl bezei…

Aufl. $\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots\ldots (2m + 1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots\ldots (2m + 2)}\,\frac{\pi ab}{2}$.

Andeut. Bei der Bestimmung des Quadranten handelt es sich zunächst — Auffindung des Integrales

$$\frac{b}{a^{2m+1}}\int_0^a (a^2 - x^2)^{m+\frac{1}{2}}dx.$$

Setzt man zu diesem Ende in §. 97 (2):

$$a = -1\,,\ b = a^2\,,\ n = 2\,,\ m = 0\,,\ p = m + \frac{1}{2},$$

so folgt:

$$\int (a^2 - x^2)^{m+\frac{1}{2}}\, dx = \frac{(a^2 - x^2)^{m+\frac{1}{2}}x}{2m+2} + \frac{a^2(2m+1)}{2m+2}\int (a^2 - x^2)^{m-1+\frac{1}{2}}\, dx$$

und hieraus:

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{m+\frac{1}{2}}\, dx = \frac{a^2(2m+1)}{2m+2}\int_0^a (a^2 - x^2)^{m-1+\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{a^2(2m+1)}{2m+2}\cdot\frac{a^2(2m-1)}{2m}\int_0^a (a^2 - x^2)^{m-2+\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{a^2(2m+1)}{2m+2}\cdot\frac{a^2(2m-1)}{2m}\cdot\frac{a^2(2m-3)}{2m-2}\int_0^a (a^2 - x^2)^{m-3+\frac{1}{2}}\, dx$$

und allgemein

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{m+\frac{1}{2}}\, dx = \frac{a^2(2m+1)}{2m+2}\cdot\frac{a^2(2m-1)}{2m}\cdots\cdots\frac{a^2(2m-2r+3)}{2m-2r+4}$$

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{m-r+\frac{1}{2}}\, dx.$$

Für $r = m + 1$ resultirt hiernach:

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^{m+\frac{1}{2}}\, dx = \frac{a^2(2m+1)}{2m+2}\cdot\frac{a^2(2m-1)}{2m}\cdot\frac{a^2(2m-3)}{2m-2}\cdots\frac{a^2}{2}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2m+1)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,(2m+2)}\cdot\frac{\pi ab}{2}.$$

546) Die Gleichung der Fusspunktcurve der Ellipse ist

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2;\,^*)$$

man soll diese Curve quadriren.

Aufl. $\frac{\pi}{2}(a^2 + b^2)$.

Andeut. Für die Gleichung in Polarcoordinaten erhält man

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2}\cos 2\varphi.$$

Für den mit $\varphi = 0$ verschwindenden Sector folgt:

$$\int_0^\varphi \frac{r^2 d\varphi}{2} = \frac{1}{4}\left[(a^2 + b^2)\varphi + \frac{a^2 - b^2}{2}\sin 2\varphi\right].$$

Für $\varphi = \pi$ ergibt sich hieraus die halbe Fläche u. s. w.

---

*) Vergl. die Note auf S. 239.

547) Die Polargleichung der Fusspunktcurve des Kreises ist

$$r = a\cos\varphi + b;\text{*)}$$

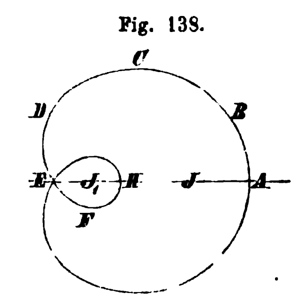


Fig. 138.

deren Gestalt ist durch Fig. 138 dargestellt. Man soll die Inhalte der Flächenräume J und J_1 bestimmen.

Aufl. Setzt man $arc\cos\left(-\frac{b}{a}\right) = \alpha$, so wird

$$J_1 = \frac{1}{2}\left\{(a^2 + 2b^2)(\pi - \alpha) - 3b(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$J + J_1 = \frac{1}{2}\left\{(a^2 + 2b^2)\,\alpha + 3b\,(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$J + 2J_1 = \pi(a^2 + 2b^2).$$

Andeut. Für $\varphi = 0$ bis $\varphi = \alpha$ erhält man die Fahrstrahlen des Astes $ABCDE$, von $\varphi = \alpha$ bis $\varphi = \pi$ dagegen die Radien des Astes EFH.

Nun ist $\int \frac{1}{2} r^2 d\varphi = (a^2 + 2b^2)\frac{\varphi}{4} + \frac{a^2}{8}\sin 2\varphi + ab\sin\varphi$ und demnach

$$\int_0^\alpha \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}(J + J_1) = (a^2 + 2b^2)\frac{\alpha}{4} - \frac{b}{a}\frac{a^2}{4}\sin\varphi + ab\sin\varphi$$

$$= (a^2 + 2b^2)\frac{\alpha}{4} + \frac{3b}{4}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$\frac{1}{2}J_1 = \int_\alpha^\pi \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{\pi}{4}(a^2 + 2b^2) - (a^2 + 2b^2)\frac{\alpha}{4} - \frac{3b}{4}\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= (a^2 + 2b^2)\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{3b}{4}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

548) Die schleifenförmige Curve

$$x^4 + y^4 = a^2xy$$

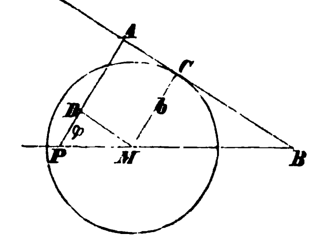
zu quadriren.

Aufl. Ganze Fläche $= \frac{\pi a^2}{4}$.

Andeut. Als Polargleichung folgt:

$$r^2 = \frac{a^2\sin 2\varphi}{2 - \sin^2 2\varphi}.$$

Fig. 139.



*) Denn ist (Fig. 139) P der Pol, $\perp$ zur Berührenden AB, $PA \parallel MC$, so

$$PA = PD + DA$$

oder

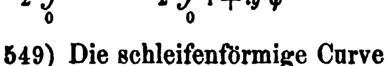
$$r = a\cos\varphi + b.$$

Da der Nenner dieses Bruches immer positiv ist, so muss für ein reelles r stets $\varphi < \frac{\pi}{2}$ gewählt werden. Es wächst r von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und nimmt dafür den grössten Werth an. Die Curve hat hiernach die durch Fig. 140 angedeutete Gestalt.

Fig. 140.

Als Inhalt der halben Schleife ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}}{1 + tg^4\varphi}\, d\varphi \text{ u. s. w.}$$



549) Die schleifenförmige Curve

$$x^6 + y^6 = a^2x^2y^2$$

zu quadriren.

Aufl. Ganze Schleife $= \frac{\pi a^2}{6}$.

Andeut. Die Polargleichung ist:

$$r^2 = \frac{a^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi}{\sin^6\varphi + \cos^6\varphi} = \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)^3 - 3\sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{4 - 3\sin^2 2\varphi}.$$

$$\text{Halbe Schleife} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}}{1 + tg^6\varphi}\, d\varphi \text{ u. s. w.}$$

550) Die schleifenförmige Curve

$$x^{2n} + y^{2n} = a^2x^{n-1}y^{n-1}$$

zu quadriren.

Aufl. Ganze Schleife $= \frac{\pi a^2}{2n}$.

Andeut. Als Polargleichung findet man:

$$r^2 = \frac{a^2 \sin^{n-1}\varphi \cos^{n-1}\varphi}{(\sin^2\varphi)^n + (\cos^2\varphi)^n} = \frac{a^2 \sin^{n-1}\varphi \cos^{n-1}\varphi}{\sin^{2n}\varphi + \cos^{2n}\varphi}.$$

$$\text{Halbe Schleife} = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-1}\varphi \cos^{n-1}\varphi}{\sin^{2n}\varphi + \cos^{2n}\varphi}\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin^{n-1}\varphi}{\cos^{n+1}\varphi}}{1 + (tg^n\varphi)^2}\, d\varphi$$

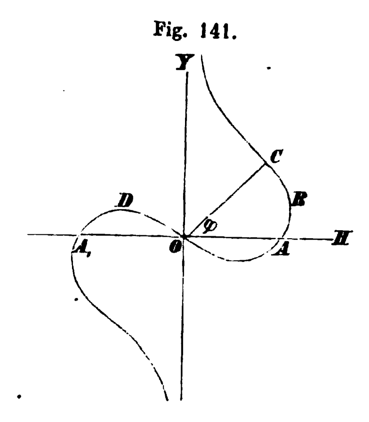
$$= \frac{a^2}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n\, tg^{n-1}\varphi \frac{d\, tg\,\varphi}{d\varphi}}{1 + (tg^n\varphi)^2}\, d\varphi = \frac{a^2}{2n} \operatorname{arctg}(tg^n\varphi) \text{ u. s. w.}$$

551) Die Curve

$$x(x^2 + y^2 + xy) = a^2(x + 2y)$$

zu quadriren.

Fig. 141.



Aufl. Eine Discussion der Gleichung ergibt, dass die Curve eine durch Fig. 141 dargestellte Form hat, und dass der Inhalt des Sectors $OABC$ ausgedrückt ist durch

$$\frac{a^2}{2}\, l\,(1 + tg\varphi + tg^2\varphi).$$

Andeut. Setze $y = 0$, dann $x = 0$. Die Ordinatenachse $x = 0$ ist eine Asymptote u. s. w. Für Polarcoordinaten geht die Gleichung über in:

$$r^2 = \frac{a^2(\cos\varphi + 2\sin\varphi)}{\cos\varphi\,(1 + \sin\varphi\cos\varphi)} = \frac{a^2(1 + 2\,tg\,\varphi)}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}$$

$$= \frac{a^2(1 + 2tg\varphi)\dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{tg^2\varphi + tg\varphi + 1} = \frac{a^2(1 + 2\,tg\,\varphi)\dfrac{d\,tg\,\varphi}{d\varphi}}{tg^2\varphi + tg\varphi + 1} = \frac{a^2\left[\dfrac{d\,tg\,\varphi}{d\varphi} + 2\,tg\,\varphi\,\dfrac{d\,tg\,\varphi}{d\varphi}\right]}{tg^2\varphi + tg\varphi + 1}.$$

Also ist
$$\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\, l\,(1 + tg\,\varphi + tg^2\varphi).$$

Für die Fläche ODA_1 folgt:

$$\frac{1}{2}\int_{\pi - arc\,tg\frac{1}{2}}^{\pi} r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\, l\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{a^2}{2}\, l\,\frac{3}{4}.$$

552) Die Curve (gleichseitige Hyperbel)

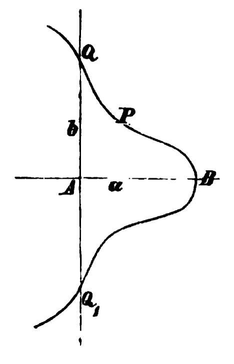
$$r^2\cos 2\varphi = 1$$

zu quadriren.

Aufl. $4l\,\dfrac{1 + tg\,\varphi}{1 - tg\,\varphi}.$

Andeut.
$$\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\int\frac{\dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{1 - tg^2\varphi}$$
$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1 - tg\varphi} + \frac{1}{1 + tg\varphi}\right)\frac{d\,tg\,\varphi}{d\varphi}\,d\varphi.$$

Fig. 142.



553) Man soll die Curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

quadriren.

Aufl. Eine Discussion der Gleichung ergibt Fig. 142 als Gestalt der Curve. Der Inhalt der halben Fläche ist:

$$-\,6ab\left(1 - a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{8}{105} + \frac{4}{35}a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{7}c\right.$$
$$\left. + \frac{16\,ab}{35}\right.$$

Für $x = a$ folgt: $ABPQ = \dfrac{16ab}{35}$.

Andeut. Die Quadratur erfordert die Bestimmung des Integrales

$$b\int\sqrt{1-a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}}\,dx.$$

Man setze: $1-a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}=z^2$, so wird das binomische Integral rational und

$$=-6ab\int z^2(1-z^2)^2\,dz \text{ u. s. w.}$$

554) Man soll den Inhalt der geschlossenen Curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{4}{3}}=1$$

berechnen.

Aufl. $\frac{3}{4}\pi ab\sqrt{2}$.

Andeut. Setzt man $a^{-4}=c$, so handelt es sich um die Auffindung des binomischen Integrales $b\int x^3(x^{-4}-c)^{\frac{3}{4}}\,dx$. Substituirt man $x^{-4}-c=z^4$, so wird dasselbe rational und $=-b\int z^6(z^4+c)^{-2}\,dz$. Wendet man hierauf §. 97 (4) einmal an, so folgt:

$$\frac{b}{4}(z^4+c)^{-1}z^3-\frac{3b}{4}\int\frac{z^2dz}{z^4+c}.$$

Nun ist

$$\frac{z^2}{z^4+c}=\frac{a}{2\sqrt{2}}\left[\frac{z}{z^2-a^{-1}z\sqrt{2}+a^{-2}}-\frac{z}{z^2+a^{-1}z\sqrt{2}+a^{-2}}\right]$$

$$=\frac{a}{4\sqrt{2}}\left[\frac{2z-a^{-1}\sqrt{2}+a^{-1}\sqrt{2}}{z^2-a^{-1}z\sqrt{2}+a^{-2}}-\frac{2z+a^{-1}\sqrt{2}-a^{-1}\sqrt{2}}{z^2+a^{-1}z\sqrt{2}+a^{-2}}\right]$$

folglich

$$\int\frac{z^2dz}{z^4+c}=\frac{a}{4\sqrt{2}}\,l\,\frac{z^2-a^{-1}z\sqrt{2}+a^{-2}}{z^2+a^{-1}z\sqrt{2}+a^{-2}}+\frac{a\sqrt{2}}{4}\Big[\operatorname{arc\,tg}(az\sqrt{2}-1)$$
$$+\operatorname{arc\,tg}(az\sqrt{2}+1)\Big]$$

und das zu suchende Integral ist daher

$$=\frac{b}{4a^3}x(a^4-x^4)^{\frac{3}{4}}-\frac{3ab}{8\sqrt{2}}\,l\,\frac{(a^4-x^4)^{\frac{1}{2}}-(a^4-x^4)^{\frac{1}{4}}x\sqrt{2}+x^2}{a^2}$$
$$-\frac{3ab\sqrt{2}}{16}\left\{\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(a^4-x^4)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{x}-1\right]+\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{(a^4-x^4)^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{x}+1\right]\right\}.$$

Dem letzten Theile dieses Ausdruckes, welcher nicht für alle Werthe von x stetig ist, kann man die von diesem Vorwurfe freie Form geben:

$$-\frac{3ab\sqrt{2}}{16}\arccos\frac{x^2-\sqrt{a^4-x^4}}{a^2}.$$

Bestimme nun den Quadranten $=\frac{3\pi ab\sqrt{2}}{16}$ u. s. w.

555) Die Curve $(x^2+y^2)(x^2+2y^2)=a^2xy$ zu quadriren.

Aufl. Eine Discussion der Gleichung ergibt die durch Fig. 140 repräsentirte Form der Curve. Halbe Schleife $=\frac{a^2}{4}l2$.

Andeut. Polargleichung: $r^2=\frac{a^2\sin 2\varphi}{3-\cos 2\varphi}$. Bestimme nun $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r^2d\varphi$ u. s. w.

556) Quadratur der Curve $(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}} = a^2 x y^2$.

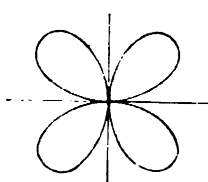


Fig. 143.

Aufl. Gestalt der Curve: Fig. 143. **Inhalt** eines jeden Blattes $= \frac{a^2}{6}$.

Andeut. Polargleichung: $r^2 = a^2 \sin^2\varphi \cos\varphi$.

Bestimme $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi$ u. s. w.

557) Die Gleichung einer Curve ist:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2)^2 = a^4 x^2.$$

Man soll dieselbe quadriren.

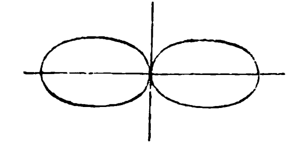


Fig. 144.

Aufl. Gestalt der Curve Fig. 144. Inhalt eines Ovales $= \frac{\pi a^2}{8}$. 4

Andeut. Polargleichung:

$$r^2 = \frac{a^2 \cos\varphi}{1 + \sin^2\varphi}.$$

558) Die Curve $y = ax^m + bx^n$ zu quadriren, wenn $m + n = 2$ und $4mn \cdot ab = -1$ ist.

Aufl. $ax^m - bx^n$.

Andeut. Man findet: $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (max^{m-1} - nbx^{n-1})^2$

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \pm (ax^m - bx^n).$$

Wegen des Doppelzeichens berücksichtige man, dass

$$y^2 + \frac{x^2}{mn} = a^2x^{2m} + b^2x^{2n} + 2abx^2 + \frac{x^2}{mn} = a^2x^{2m} + b^2x^{2n} + \frac{x^2}{mn}(1 + 2abmn)$$

$$= a^2x^{2m} + b^2x^{2n} + \frac{x^2}{2mn} = (ax^m - bx^n)^2$$

also

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{y^2 + \frac{x^2}{mn}}.$$

β) Rectificationen.

559) Die Tractorie

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + al\,\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

zu rectificiren.

Aufl. Bogen über der Abscisse $x = al\,\frac{y}{a}$.

Andeut. $\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ in ein Integral nach y, gibt: $\int \frac{a}{\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{dx}{dy}\, dy = \int \frac{a}{y}\, dy$. Bestimme hiernach $\int_a^y \frac{a}{y}\, dy$ u. s. w.

560) Die Neil'sche Parabel $ay^2 = x^3$ zu rectificiren.

Aufl. $\frac{8a}{27}\left[\left(1+\frac{9x}{4a}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right]$.

561) Die Curve, deren Gleichung

$$\frac{9a^4}{4}y^2 = (x^2+a^2)^3$$

ist, zu rectificiren.

Aufl. $x + \frac{2}{3a^2}x^3$.

562) Die Curve $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ zu rectificiren (vgl. §. 73, Aufg. 7).

Aufl. Ganze Curvenlänge $= 6a$.

Andeut. Da $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ und $\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ stets positiv sind, so setze dafür bezüglich $\cos^2 t$ und $\sin^2 t$. Alsdann wird $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{3a}{2}\sin 2t$ und $\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

$$= \frac{3a}{4}\int \sin 2t.\ 2dt = -\frac{3a}{4}\cos 2t = \frac{3a}{4}(2\sin^2 t - 1) \text{ u. s. w.}$$

563) Die Evolute der Ellipse, deren Gleichung nach §. 72, Beisp. 2

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

ist, wenn $\alpha = \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{c^2}{a}$, $\beta = \frac{a^2-b^2}{b} = \frac{c^2}{b}$, zu rectificiren.

Aufl. $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$.

Andeut. Setze $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t$; $\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2 t$, so wird

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \pm\frac{3}{2}\sin 2t\sqrt{\alpha^2\cos^2 t+\beta^2\sin^2 t}$$

$$= \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}\sin 2t\sqrt{\alpha^2+\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)\cos 2t}.$$

Da der Bogen mit abnehmendem x oder wachsendem t abnimmt, so ist von dem Doppelzeichen das negative zu wählen und zu setzen:

$$\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \frac{3}{(\alpha^2-\beta^2)\,4\sqrt{2}}\int\sqrt{\alpha^2+\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)\cos 2t}$$

$$\frac{d}{dt}[\alpha^2+\beta^2+(\alpha^2-\beta^2)\cos 2t]\,dt = \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}[\alpha^2\cos^2 t+\beta^2\sin^2 t]^{\frac{3}{2}} + C.$$

wo $a > b$, also $\alpha < \beta$.

Da für $x = 0$, $y = \beta$ der Bogen verschwindet, so wird

$$C = \frac{\beta^3}{\beta^2-\alpha^2}$$

und der Bogen $= \frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\left\{\beta^3 - \left[\alpha^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}+\beta^2\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}$.

Für $x = \alpha$, $y = 0$ folgt für den Viertels-Bogen der Evolute:

$$\frac{1}{\beta^2 - \alpha^2}(\beta^3 - \alpha^3) = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{\alpha + \beta} = \frac{c^2}{ab}\,\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

564) Die Curve zu rectificiren, deren Gleichung

$$y = k + l\,(nx + m + n) + l\,(nx + m - n)$$

gegeben ist.

Aufl. $x + l\,\dfrac{nx + m - n}{nx + m + n}$.

565) Die Gleichung einer Curve sei

$$y = \frac{1}{2b}\left(\frac{x^3}{3} + a^2x\right) - \frac{b}{2a}\,arc\,tg\,\frac{x}{a}.$$

Dieselbe zu rectificiren.

Aufl. $\dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{x^3}{3} + a^2x\right) + \dfrac{b}{2a}\,arc\,tg\,\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{b}\left(\dfrac{x^3}{3} + a^2x\right) - y.$

566) Die Curve $y = \dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{x^2}{2} - ax\right) - \dfrac{b}{2}\,l\,(x - a)$ zu rectificiren.

Aufl. $\dfrac{1}{b}\left(\dfrac{x^2}{2} - ax\right) - y.$

567) Rectification der Curve

$$y = \frac{a^2 - b^2}{2ab}\left(a\,arc\,tg\,\frac{x}{b} + b\,arc\,tg\,\frac{x}{a}\right).$$

Aufl. $x + \dfrac{a^2 - b^2}{2ab}\left(a\,arc\,tg\,\dfrac{x}{b} - b\,arc\,tg\,\dfrac{x}{a}\right).$

568) Man soll die Curve

$$y = \frac{1}{2c}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(a + b) + abx\right] - \frac{c}{2(a - b)}\,l\,\frac{x - a}{x - b},$$

wo $a > b$, rectificiren.

Aufl. $\dfrac{1}{2c}\left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}(a + b) + abx\right] + \dfrac{c}{2(a - b)}\,l\,\dfrac{x - a}{x - b}.$

569) Rectification der Curve

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - (a + b - c)\,x + (c - a)(c - b)\,l\,(x - c)\right]$$
$$- \frac{1}{2(a - b)}\left[(a - c)\,l\,(x - a) + (c - b)\,l\,(x - b)\right]$$

Aufl. $\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x^2}{2} - (a + b - c)\,x + (c - a)(c - b)\,l\,(x - c)\right]$
$+ \dfrac{1}{2(a - b)}\left[(a - c)\,l\,(x - a) + (c - b)\,l\,(x - b)\right]$

570) Die Curve, deren Polargleichung

$$r = \varphi^2 - 4\varphi + 3$$

ist, zu rectificiren.

Aufl. $\frac{\varphi^3}{3} - 2\varphi^2 + 5\varphi$.

Andeut. Nach §. 122. (2)

571) Die Curve $r = a\cos\varphi + b$ zu rectificiren.

Aufl. Bogen gleich dem entsprechenden Bogen einer Ellipse mit den Halbachsen $a + b$ und $a - b$.

Andeut. $r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = a^2 \sin^2\varphi + (a\cos\varphi + b)^2 = (a - b)^2$

$+ 2ab\,(1 + \cos\varphi) = (a - b)^2 + 2ab\,.\,2\cos^2\frac{\varphi}{2}$

$= (a - b)^2\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + 4\,ab\cos^2\frac{\varphi}{2} = (a + b)^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$

$+ (a - b)^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}$.

Also, wenn man $\frac{\varphi}{2} = \psi$ setzt,

$$\int\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = 2\int\sqrt{(a + b)^2\cos^2\psi + (a - b)^2\sin^2\psi}\;d\psi.$$

Ist nun $\alpha\cos\psi = x$; $\beta\sin\psi = y$; also $\frac{dx}{d\psi} = -\alpha\sin\psi$; $\frac{dy}{d\psi} = \beta\cos\psi$;

so folgt: $\int\sqrt{\left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\psi}\right)^2}\,d\psi = \int\sqrt{\alpha^2\sin^2\psi + \beta^2\cos^2\psi}\;d\psi$ und nach §. 122 Beisp. 3. ergibt sich hieraus obige Behauptung.

572) Eine Curve ist durch die Gleichungen

$$x = \frac{5t^3}{3} + 8t^2 + 3t + 1$$

$$y = 4t^3 + t^2 - 4t - 2$$

bestimmt, man soll dieselbe rectificiren.

Aufl. $\frac{13t^3}{3} + 4t^2 + 5t$.

Andeut. Nach §. 122. 2.

γ) Complanationen.

573) Die Tractorie, deren Gleichung

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + al\,\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

ist, dreht sich um die X Achse, man soll die Oberfläche des Rotationskörpers bestimmen.

Aufl. $2\pi a\,(a - y)$, wenn für $y = a$ die Oberfläche Null wird.

574) Die Oberfläche des Rotationskörpers, der durch Umdrehung der Curve

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

entsteht, zu bestimmen.

Aufl. $\frac{12}{5}\pi a^2$.

Andeut. Setze $x = a\cos^3\varphi$, $y = a\sin^3\varphi$,

also
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = 3a\sin\varphi\cos\varphi.$$

und
$$2\pi\int y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = -\frac{6}{5}\pi a^2\sin^5\varphi,$$

wo das negative Zeichen zu nehmen ist, damit mit abnehmendem x oder wachsendem φ die Oberfläche abnimmt u. s. w.

575) Man soll die Oberfläche des Körpers finden, welcher durch Umdrehung der Fusspunktcurve der Ellipse

$$r^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$$

entsteht.

Aufl. $2\pi\left\{a^2 + \frac{b^4}{\sqrt{a^4 - b^4}}\, l\,\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}{b^2}\right\}$.

Andeut. Setzt man zur Bestimmung des Integrales $2\pi\int r\sin\varphi\sqrt{r_1^2 + r^2}\,d\varphi$ für $r^2 r_1^2 + r^4 = a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi$, so geht dasselbe über in:

$$2\pi\int\sin\varphi\sqrt{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Oder wenn man $\cos\varphi = x$ setzt, in:

$$-2\pi\int\sqrt{(a^4 - b^4)\,x^2 + b^4}\,dx.$$

Nach §. 97 (18) findet man dafür, wenn man wieder statt x den Werth $\cos\varphi$ einführt:

$$-\pi\cos\varphi\sqrt{(a^4 - b^4)\cos^2\varphi + b^4} - \frac{\pi b^4}{\sqrt{a^4 - b^4}}\, l\left\{\cos\varphi\sqrt{a^4 - b^4} + \sqrt{(a^4 - b^4)\cos^2\varphi + b^4}\right\}.$$

Nimmt man nun das Integral zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und verdoppelt das Resultat, so erhält man den obigen Werth.

576) Man soll die Oberfläche des Körpers finden, der entsteht, wenn man die vorige Curve um die YAchse dreht.

Aufl. $2\pi\left\{b^2 + \frac{a^4}{\sqrt{a^4 - b^4}}\, arc\cos\frac{b^2}{a^2}\right\}$.

Andeut. Es handelt sich hier um die Bestimmung des Integrales

$$2\pi\int\cos\varphi\sqrt{a^4\cos^2\varphi + b^4\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Man setze $\sin\varphi = x$ und berücksichtige §. 97 (19).

577) Man soll die Oberfläche des Körpers finden, der ents[...] wenn die Cardioide um die XAchse gedreht wird.

Aufl. $\frac{128\pi a^2}{5} = \frac{32\pi}{5}(2a)^2$.

Andeut. Man setze $x = 2a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$; $y = 2a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$, so folgt:

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = 4a\cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$2\pi\int y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,d\varphi = 128a^2\pi\int \cos^4\tfrac{1}{2}\varphi\,\sin\tfrac{1}{2}\varphi\,.\,\tfrac{1}{2}d\varphi = -\frac{128a^2\pi}{5}\cos^5\tfrac{1}{2}\varphi.$$

578) Man soll die Oberfläche des Körpers finden, der durch Umdrehung der Curve $y = ax^m + bx^n$, wo $m + n = 2$; $1 + 4mn\,ab = 0$ ist, entsteht.

Aufl. $\pi(a^2x^{2m} - b^2x^{2n} + ab(m - n)x^{m+n})$.

Andeut. $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = max^{m-1} - nbx^{n-1}$ u. s. w.

δ) Cubaturen.

579) Man soll den Inhalt des Rotationskörpers berechnen, der durch Umdrehung der Curve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ um die XAchse entsteht.

Aufl. $\frac{8}{35}$ der umschriebenen Kugel.

Andeut. $\int \pi y^2 dx = \pi\int\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx = \pi\int\left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right.$
$\left. + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right)dx$ u. s. w.

580) Man soll den Inhalt des Körpers finden, der durch Umdrehung der Cardioide (§. 81, Aufg. 1) um die XAchse entsteht.

Aufl. $\frac{64}{3}\pi a^3$ oder der 16fache Inhalt der erzeugenden Kugel.

Andeut. Nach §. 81 ist die Gleichung der Cardioide:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Man findet hieraus:

$$y^2 = -x^2 + 2ax + 2a^2 \pm \sqrt{4a^3(a + 2x)}.$$

Ist x positiv, so muss, damit y^2 nicht negativ wird, gesetzt werden:

$$y^2 = -x^2 + 2ax + 2a^2 + \sqrt{4a^3(a + 2x)}.$$

Ist aber x negativ, so sind beide Werthe zulässig.

Der Körper, welcher von dem Curventheile, der positiven Abscissen entspricht, erzeugt wird, ist daher:

$$\pi\int_0^{4a} y^2dx = \pi\left(-\frac{x^3}{3} + ax^2 + 2a^2x\right)_{x=0}^{x=4a} + \pi\sqrt{a^3}\int_0^{4a}(a + 2x)^{\frac{1}{2}}\,.\,2dx$$

$$= \pi\left(-\frac{64a^3}{3} + 16a^3 + 8a^3\right) + \pi\sqrt{a^3}\,\frac{2}{3}\left[(a + 2x)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=4a}$$

$$= \pi\,\frac{8a^3}{3} + \frac{2\pi}{3}\sqrt{a^3}\left[(9a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right] = 15\,.\,\frac{4\pi a^3}{3}.$$

Um den Theil des Körpers zu erhalten, der von dem Curventheile erzeugt wird, welcher negativen Abscissen entspricht, setze man

$$y_1^2 = -x^2 - 2ax + 2a^2 + \sqrt{4a^3(a - 2x)}$$
$$y_2^2 = -x^2 - 2ax + 2a^2 - \sqrt{4a^3(a - 2x)},$$

wo jetzt x positiv ist.

Man erhält alsdann

$$\pi \int_0^{\frac{a}{2}} (y_1^2 - y_2^2)\, dx = \pi \int_0^{\frac{a}{2}} 2\sqrt{4a^3(a-2x)}\, dx = -\pi\sqrt{4a^3}\int_0^{\frac{a}{2}} -2(a-2x)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= -\frac{2\pi}{3}\sqrt{4a^3}\left[(a-2x)^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=\frac{a}{2}} = \frac{4\pi}{3}a^{\frac{3}{2}}.$$

Daher ist der ganze Körper $= 16 \cdot \frac{4\pi a^3}{3}$.

581) Man soll den Körper berechnen, der durch Umdrehung der Fusspunktcurve der Ellipse (vergl. Aufg. 546) um die XAchse erzeugt wird.

Aufl. $\frac{\pi a}{6}(2a^2 + 3b^2) + \frac{\pi b^4}{2c}\, l\left(\frac{a+c}{b}\right)$.

Andeut. Löst man die Gleichung nach x auf, so folgt:

$$y^2 = \frac{b^2}{2} - x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{4c^2x^2 + b^4},$$

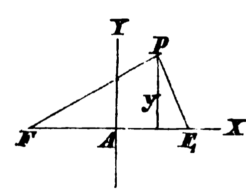
indem das negative Zeichen nicht zulässig ist. Hieraus ergibt sich:

$$\pi \int_0^a y^2 dx = \pi\left(\frac{ab^2}{2} - \frac{a^3}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\int_0^a \sqrt{4c^2x^2 + b^4}\, dx$$

u. s. w. nach §. 97 (18).

582) Bezeichnet $2c$ den Abstand zweier festen Punkte F und F_1 (Fig. 145), so bestimmen die Punkte P, für welche das Produkt der Entfernungen $PF \cdot PF_1$ einen constanten Werth a^2 hat, die sogenannte Cassinische Curve. Man soll nun das Volumen des durch Umdrehung derselben um die XAchse erzeugten Körpers bestimmen.

Fig. 145.



Aufl. $\frac{\pi}{3}(a^2 - 2c^2)\sqrt{c^2 + a^2} + \frac{\pi a^4}{c}\, l\, \frac{c + \sqrt{c^2 + a^2}}{a}$,

wenn $c < a$;

$$-\frac{\pi}{6}\left(\sqrt{c^2 + a^2} - \sqrt{c^2 - a^2}\right)^3 + \frac{\pi a^4}{c}\, l\, \frac{c + \sqrt{c^2 + a^2}}{c + \sqrt{c^2 - a^2}},$$

wenn $c > a$.

Andeut. Als Gleichung der Curve erhält man:

$$\left\{y^2 + (c + x)^2\right\}\left\{y^2 + (c - x)^2\right\} = a^4.$$

Je nachdem nun $c > a$, $c < a$ oder $c = a$, besteht die Curve aus einem Oval, aus zweien oder geht in die Lemniscate über.

Aus der vorstehenden Gleichung ergibt sich: $y^2 = -(c^2 + x^2) + \sqrt{a^4 + 4c}$ indem das negative Zeichen nicht zulässig ist.

Hieraus findet man nun nach §. 97 (18):

$$\pi\int y^2 dx = -\pi\left(c^2x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{\pi x}{2}\sqrt{a^4 + 4c^2x^2} + \frac{\pi a^4}{4c}\, l\left(2cx + \sqrt{a^4 + 4c^2x^2}\right.$$

Um den ganzen Körper zu erhalten, sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich $c \lesseqgtr a$ erstreckt sich das Integral zur Bestimmung des halben Körpers bezüglich von $x = 0$ bis $x = \sqrt{c^2 + a^2}$ oder von $x = \sqrt{c^2 - a^2}$ bis $x = \sqrt{c^2 + a^2}$.

583) Wie gross ist der Inhalt des Rotationskörpers, welcher erzeugt wird durch Umdrehung der Curve

$$y = (a + c - x)\sqrt{\frac{x}{c - x}}$$

um die Achse der X vom Scheitel an gerechnet.

Aufl. $\pi \left\{ax(x - a) + x^2\left(\frac{c}{2} - \frac{x}{3}\right) + a^2 cl \frac{c}{c - x}\right\}$.

Andeut. $\pi \int y^2 dx = \pi \int \frac{(a + c - x)^2 x}{c - x} dx$

$$= \pi \int \left\{x(2a + c) - x^2 - a^2 - \frac{a^2 c}{x - c}\right\} dx$$

$$= \pi \left\{ax(x - a) + x^2\left(\frac{c}{2} - \frac{x}{3}\right) - a^2 cl(c - x)\right\} + C.$$

Für $x = 0$ folgt $C = \pi a^2 clc$ u. s. w.

584) Man soll den Inhalt des birnförmigen Körpers finden, der durch Umdrehung der Curve $y = x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$ um die XAchse entsteht.

Aufl. $\pi a^3 \left(l4 - \frac{4}{3}\right)$.

Andeut. Man erhält: $\pi \int y^2 dx = \pi \int \frac{x^2(a + x)}{a - x} dx$

$$= -\pi \int \left(x^2 + 2ax + 2a^2 + \frac{2a^3}{x - a}\right) dx$$

$$= -\pi \left\{\frac{x^3}{3} + ax^2 + 2a^2 x + 2a^3 l(a - x)\right\} + C.$$

Da das Integral für $x = 0$ verschwinden muss, so folgt $C = 2\pi a^3 la$. Daher ist das Volumen $= \pi\left(2a^3 la - 2a^3 l(a - x) - \frac{x^3}{3} - ax^2 - 2a^2 x\right) = \pi\left(2a^3 l \frac{a}{a - x} - \frac{x^3}{3} - ax^2 - 2a^2 x\right)$ u. s. w.

Gedruckt bei E. Polz in Leipzig.


UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06388 1307